

А.Ф. Александров  
Л.С. Богданкевич  
А.А. Рухадзе

# ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ПЛАЗМЫ

Под редакцией проф.  
А. А. РУХАДЗЕ

Допущено  
Министерством  
высшего и среднего  
специального  
образования СССР  
в качестве  
учебного пособия  
для студентов  
физических  
и инженерно-физических  
специальностей вузов



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1978

22.333

A 46

УДК 538.3 (075)

РЕЦЕНЗЕНТЫ:  
СОВЕТ ПО ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ ОТДЕЛЕНИЯ  
ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И АСТРОНОМИИ АН СССР;  
АКАДЕМИК Р. З. САГДБЕВ

А 46 **Александров А. Ф. и др.**  
Основы электродинамики плазмы: Учеб. пособие для вузов/А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе; Под ред. А. А. Рухадзе. — М.: Высш. школа, 1978. — 407 с., ил.

В пер.: 1 р. 20 к.

В книге изложены основы электродинамики материальных сред с пространственной и временной дисперсией, рассмотрены линейные электромагнитные явления в термодинамически равновесной и неравновесной плазме, флуктуации, квазилинейная теория колебаний и нелинейное взаимодействие электромагнитных волн в плазме. Предназначается для студентов физических и инженерно-физических специальностей.

А  $\frac{20409 - 423}{001(01) - 78}$  98—78

22.333  
537

В последние годы курс физики плазмы занял прочное место среди лекционных курсов, читаемых студентам физических специальностей. Однако учебного пособия по физике плазмы в отечественной литературе до сих пор нет. Имеющиеся многочисленные монографии довольно сложны и посвящены, как правило, различным прикладным проблемам.

Совет по физике плазмы Академии Наук СССР поставил вопрос о создании учебного пособия по физике плазмы. Предполагается, что оно будет состоять из трех томов, посвященных соответственно элементарным процессам в плазме, электродинамике плазмы и различным прикладным проблемам. Предлагаемую книгу по электродинамике плазмы, очевидно, можно рассматривать как один из томов будущего учебного пособия по физике плазмы. Она написана на основе курса лекций, составленных одним из авторов (А. А. Рухадзе), читаемых авторами в течение ряда лет студентам радиофизического отделения физического факультета МГУ, а также сотрудникам физического института им. П. Н. Лебедева АН СССР.

Книга состоит из трех частей. В первой части изложены основы линейной электродинамики термодинамически равновесной и однородной плазмы, во второй — современные представления о линейных электромагнитных явлениях в неравновесной и пространственно неоднородной плазме (теория устойчивости плазмы), а в третьей — методы исследования нелинейных электродинамических процессов в плазме.

Изложение материала ведется на основе наиболее общей модели плазмы — кинетического уравнения с самосогласованным взаимодействием, причем рассмотрены как газовая, невырожденная плазма, так и вырожденная плазма твердых тел. В книге приведено большое число задач с решениями, в которых обсуждены более простые модели плазмы и области их применимости, а также рассмотрен ряд конкретных явлений, представляющих практический интерес. В приложениях даны необходимые математические сведения из векторного анализа и тензорного исчисления.

Авторы далеки от мысли, что предлагаемое пособие лишено недостатков. Более того, они сознают, что третья его часть как по полноте изложения основного материала, так и по отбору конкретных задач намного уступает первым двум.

Авторы признательны акад. В. Л. Гинзбургу за предоставленное право пользоваться материалом книги В. Л. Гинзбурга и А. А. Рухадзе «Волны в магнитоактивной плазме» («Наука», 1975) без ограничений, а также В. Ю. Шаферу, прочитавшему корректуру пособия и сделавшему ряд полезных замечаний.

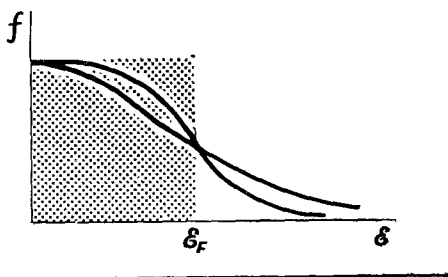
Все пожелания, замечания и отзывы о книге просьба направлять по адресу: Москва, К-51, Неглинная ул., 29/14, издательство «Высшая школа».

*А в т о р ы*



# Часть 1

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ РАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЫ



### Глава I

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ

### § 1. Определение плазмы

Прежде чем перейти к последовательному изложению основ электродинамики плазмы, необходимо ответить на вопросы: что такое плазма, как она распространена в природе и каковы ее наиболее характерные особенности?

В настоящее время представление о плазме как о четвертом состоянии вещества прочно входит в повседневную жизнь наряду с такими понятиями, как газ, жидкость и твердое тело. Это объясняется чрезвычайно широким распространением плазменного состояния вещества в природе, а также большими перспективами практического использования плазмы в различных областях новой техники.

Впервые термин «плазма» был введен И. Ленгмюром в 1923 г. при изучении явлений, происходящих при электрическом разряде в газах. Таким образом, первое определение плазмы было связано непосредственно с представлением об ионизованном газе, что оказалось очень плодотворным. Дадим предварительное определение плазмы как ионизованного газа, состоящего из большого числа положительно и отрицательно заряженных частиц, а в ряде случаев также

из нейтральных атомов и молекул. Именно наличие в плазме большого числа заряженных частиц обуславливает те характерные ее свойства, которые позволяют определить плазму как четвертое состояние вещества и существенно отличают от обычных газов.

Приведенное определение плазмы является не строгим и далеко не полным. Полного определения плазмы по существу невозможно дать, так как оно должно охватывать очень широкий круг явлений в самых разнообразных условиях. В настоящей книге понятие плазмы будет раскрыто также лишь частично, поскольку предметом ее изучения являются только электродинамические свойства плазмы.

С ионизованным газом приходится встречаться практически всюду. Он присутствует в верхних слоях атмосферы Земли — ионосфере. Если в нижних слоях атмосферы до высот порядка 100 км число заряженных частиц ничтожно мало, то выше их число становится достаточно большим и на высотах 300 ÷ 500 км достигает максимума. Именно этот слой ионосферы, называемый *F*-слоем, обеспечивает распространение электромагнитных волн вокруг Земли и устойчивую радиосвязь на Земле. Еще выше число заряженных частиц падает, и на очень больших высотах происходит переход к разреженной межпланетной плазме.

Другой распространенный пример — это плазма звездных атмосфер. Вещество в большинстве космических объектов (звезды, туманности и т. п.) находится в ионизованном состоянии, т. е. в состоянии плазмы. В плазме звезд, в частности Солнца, происходят реакции синтеза легких элементов, так называемые термоядерные реакции, обеспечивающие огромное выделение энергии и нагрев плазмы. В настоящее время ученые многих стран мира изучают возможности создания подобной высокотемпературной плазмы в земных условиях, поставив перед собой задачу осуществления управляемого термоядерного синтеза и обеспечения человечества неисчерпаемым запасом энергии. Именно с развитием этих исследований связано второе рождение понятия плазмы, расширившее и обогатившее знания о плазме и сделавшее науку о плазме важным и самостоятельным разделом физики.

Примером распространенной в природе плазмы является также плазма газового разряда. Интенсивные исследования плазмы газового разряда связаны с потребностями развития классической и квантовой электроники, для которых газоразрядные приборы играют большую роль.

Наконец, следует особо отметить твердотельную плазму — электронную плазму металлов и электронно-дырочную плазму полупроводников.

Перечисленный ряд можно продолжить практически неограниченно, говоря о плазме в магнитогидродинамических и термоионных преобразователях тепловой энергии в электрическую, о плазме в растворах электролитов и т. д. Однако приведенных примеров достаточно для того, чтобы убедиться в чрезвычайно широком распространении плазмы в природе и важности изучения ее свойств.

## § 2. Параметры плазмы

Как отмечалось, плазма состоит из заряженных и нейтральных частиц. Положительно заряженными частицами плазмы являются положительные ионы (газовая плазма) и дырки (плазма твердого тела), а отрицательно заряженными частицами — электроны и отрицательные ионы. Как правило, отрицательные ионы не играют большой роли в плазменных явлениях, и в дальнейшем их влиянием будем пренебрегать.

Состав нейтральной компоненты плазмы может быть достаточно сложным: помимо атомов и молекул в нормальном состоянии в плазме в гораздо большем количестве могут присутствовать атомы и молекулы в различных возбужденных состояниях. Но поскольку плазма — это газ, для ее описания используются те же понятия, что и для обычного газа. Введем основные параметры плазмы, исходя из простых молекулярно-кинетических представлений.

Прежде всего необходимо знать концентрацию (плотность) частиц разного сорта  $N_\alpha$ , где индекс  $\alpha$  означает сорт частиц. Далее все величины, относящиеся к электронам плазмы, будем обозначать индексом  $e$ , к ионам (дыркам) — индексом  $i$ , а к нейтральным частицам — индексом  $n$ . Если в плазме присутствуют ионы нескольких сортов, следует задавать отдельно концентрацию ионов каждого сорта. В дальнейшем, однако, нас будет мало интересовать квантовомеханическое состояние атомов и молекул, поэтому под  $N_n$  будем понимать полное число нейтральных частиц в единице объема независимо от того, находятся ли эти частицы в нормальном или возбужденном состоянии.

Состав плазмы удобно также характеризовать другим параметром — отношением концентрации электронов к концентрации нейтральных частиц, или степенью ионизации  $r = N_e/N_n^*$ . По степени ионизации плазму обычно подразделяют на слабоионизованную ( $r < 10^{-2} \div 10^{-3}$ ) и полностью ионизованную ( $r \rightarrow \infty$ ), т. е. плазму, состоящую только из заряженных частиц.

Поскольку в плазме присутствуют частицы различных сортов, нужно знать их заряд  $e_\alpha$  и массу  $m_\alpha$ . В газовой плазме заряд электронов  $e_e \equiv e$ , причем  $|e| = 4,8 \cdot 10^{-10}$  СГСЕ, масса  $m_e = m = 9,1 \cdot 10^{-28}$  г; заряд ионов  $e_i = Ze$  ( $Z$  — кратность ионизации), масса  $m_i = M = A \cdot 1,66 \cdot 10^{-24}$  г, где  $A$  — атомный вес соответствующего газа\*\*. Для нейтральных частиц, очевидно,  $e_n = 0$ , а  $m_n \approx m_i = M$ . В плазме твердого тела массы носителей заряда (электронов и дырок) отличны от массы свободного электрона. Поэтому там, где могут возникнуть

---

\* Часто под степенью ионизации понимают  $r = N_e / (N_n + \sum_i N_i)$ . При таком определении для полной ионизации  $r = 1$ ; при  $r > 1$  степень ионизации равна среднему заряду ионов плазмы.

\*\* Далее всюду под  $m$  подразумевается масса свободного электрона, а под  $M$  — масса иона.

недоразумения, будем обозначать их  $m_e^*$  и  $m_i^*$ . В металлах  $m_e^* \approx m_e$ , а в полупроводниках, как правило,  $m_e^* \approx (0,01 \div 0,1) m_e$ , а  $m_i^* \approx m_e$ . Заряд отрицательных носителей равен заряду электрона, а заряд положительных носителей  $e_i = -e$ .

Частицы, образующие плазму, находятся в состоянии хаотического теплового движения. Для характеристики этого движения вводят понятие температуры плазмы в целом  $T$  или отдельных ее компонент  $T_\alpha$ . Температура плазмы вводится в предположении, что плазма в целом находится в состоянии термодинамического равновесия, а функции распределения частиц всех сортов по импульсам  $p_\alpha$  (скоростям) являются максвелловскими с одной и той же температурой  $T$ ; в этом случае плазма называется и з о т е р м и ч е с к о й. Гораздо чаще в плазме имеется частичное термодинамическое равновесие, когда отдельные ее компоненты имеют максвелловские распределения по скоростям с различными температурами:

$$f_{\text{max}} = \frac{N_\alpha}{(2\pi m_\alpha T_\alpha)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha T_\alpha}\right). \quad (2.1)$$

Такая плазма является н е и з о т е р м и ч е с к о й. В случае максвелловской функции распределения частиц температура  $T_\alpha$  характеризует среднюю кинетическую энергию теплового движения частиц данного сорта:

$$\frac{3}{2} \kappa T_\alpha = \left(\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}\right), \quad (2.2)$$

где  $\kappa = 1,38 \cdot 10^{-16}$  эрг/град — постоянная Больцмана;  $T_\alpha$  — температура частиц сорта  $\alpha$ , К;  $v_\alpha$  — скорость хаотического теплового движения частиц сорта  $\alpha$ , см/с (черта сверху означает усреднение по всем частицам данного сорта  $\alpha$ ). Часто пользуются понятием температуры плазмы и тогда, когда функция распределения частиц отличается от максвелловской, понимая под температурой  $T_\alpha$  величину, определенную соотношением (2.2).

Температуру компонент плазмы будем измерять в основном в градусах абсолютной шкалы; кроме того, будем использовать энергетическую систему единиц измерения, в которой постоянная Больцмана  $\kappa = 1$ , а  $T_\alpha$  измеряется в электрон-вольтах ( $1 \text{ эВ} = 11\,600 \text{ К} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$ ).

Сделаем еще одно замечание, связанное с функцией распределения частиц и определением температуры плазмы. Как известно из курса статистической физики, о максвелловском распределении частиц можно говорить лишь при достаточно высоких температурах, когда отсутствует фермиевское вырождение, обусловленное принципом Паули. Явление фермиевского вырождения возможно для частиц с полужелым спином (электроны, дырки и ионы атома водорода) и становится существенным, когда энергия Ферми превышает тепловую:

$$\varepsilon_{F\alpha} = \frac{p_{F\alpha}^2}{2m_\alpha} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 N_\alpha^{2/3}}{2m_\alpha} \gg \kappa T_\alpha, \quad (2.3)$$

где  $p_{F\alpha} = (3\pi^2)^{1/3} \hbar N_\alpha^{1/3}$  — граничный импульс Ферми, а  $\hbar = h/(2\pi) = 1,05 \cdot 10^{-27}$  эрг·с — постоянная Планка.

При этом распределение частиц по импульсам определяется выражением

$$f_{F\alpha} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \left\{ \exp \left[ \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} - \varepsilon_{F\alpha}/T_\alpha \right] + 1 \right\}^{-1}, \quad (2.4)$$

называемой функцией распределения Ферми.

Неравенство (2.3) выполняется при относительно низких температурах и высоких концентрациях:  $N_\alpha \gg 5 \cdot 10^{15} T_\alpha^{3/2} (m_\alpha/m)^{3/2}$ . В вырожденной плазме понятие температуры как меры энергии среднего хаотического движения частиц теряет смысл. Эту роль играет энергия Ферми  $\varepsilon_{F\alpha} \approx 5 \cdot 10^{-27} N_\alpha^{2/3} (m/m_\alpha)$  эрг, не зависящая от температуры плазмы и возрастающая с увеличением концентрации частиц.

Остановимся на абсолютных значениях основных параметров плазмы  $N_\alpha$  и  $T_\alpha$  в зависимости от конкретных условий. Так, в F-слое ионосферы  $N_e \approx N_i \approx 10^6$  см<sup>-3</sup>,  $N_n \leq 10^{10}$  см<sup>-3</sup>, т. е.  $r \geq 10^{-4}$ , а температура плазмы оказывается довольно высокой, порядка  $(3 \div 5) \cdot 10^3$  К. На больших высотах, превышающих радиус Земли, в межпланетной плазме концентрация заряженных частиц колеблется в пределах  $10^{-2}$  см<sup>-3</sup>  $\approx N_e \approx N_i \leq 10$  см<sup>-3</sup>, причем  $N_n \ll N_e$ , т. е. плазма практически полностью ионизована, а температура  $T \approx 10^4$  К. Концентрация  $N$  и температура  $T$  плазмы звезд меняются в очень широких пределах: концентрация от  $10^2 \div 10^3$  см<sup>-3</sup> до  $10^{22} \div 10^{26}$  см<sup>-3</sup> и выше, температура от  $10^4 \div 10^5$  К до  $10^9 \div 10^{10}$  К, при этом плазма полностью ионизована. Так, например, в солнечной короне  $N_e \approx N_i \approx 10^4 \div 10^8$  см<sup>-3</sup>, а  $T \approx 10^6 \div 10^8$  К. В установках для получения термоядерного синтеза, поскольку реакции слияния ядер пороговые, температура плазмы должна превышать  $T \geq 10^8$  К, концентрация же заряженных частиц в зависимости от методов нагрева и удержания плазмы составляет либо  $N_e \approx N_i \approx 10^{14} \div 10^{15}$  см<sup>-3</sup>, либо  $N_e \approx N_i \approx 10^{22} \div 10^{23}$  см<sup>-3</sup>.

Плазму газового разряда в противоположность термоядерной часто называют низкотемпературной. Ее температура обычно не превышает  $10^4 \div 10^5$  К, а концентрация заряженных частиц  $N_e \approx N_i \approx 10^8 \div 10^{15}$  см<sup>-3</sup>, причем такая плазма практически всегда слабоионизована, так как  $N_n \approx 10^{12} \div 10^{17}$  см<sup>-3</sup>. В плазме сильного течения разряда, образующейся при электрическом взрыве металлических проволочек  $T \approx 10^4 \div 10^5$  К, а концентрации заряженных частиц  $N_e \approx N_i \approx 10^{18} \div 10^{20}$  см<sup>-3</sup> при практически полной ионизации. В металлах электронную плазму образуют свободные носители заряда, концентрация которых  $N \approx 10^{21} \div 10^{22}$  см<sup>-3</sup>, причем эффективная масса носителей зарядов имеет порядок массы сво-

бодного электрона. При столь высоких концентрациях свободные электроны в металлах оказываются вырожденными, и условие вырождения (2.3) выполняется вплоть до температур  $T \ll 10^4$  К. Твердотельная плазма полупроводников, образованная из отрицательных (электронов) и положительных (дырок) носителей заряда, может быть как вырожденной, так и невырожденной. В полупроводниках с большим числом легких носителей (электронов) при  $N_e \gg 10^{16} \div 10^{18} \text{ см}^{-3}$  и эффективной массой  $m_e^* \approx 10^{-2}m$  вырождение наступает при температурах  $T_e < 10^2$  К, вырождение по тяжелым носителям заряда (дыркам) наступает при еще более низких температурах, в то время как в полупроводниках с малым числом носителей при  $N_e \leq 10^{14} \div 10^{15} \text{ см}^{-3}$ , как правило, электронно-дырочная плазма оказывается невырожденной.

Разумеется, приведенные численные значения являются ориентировочными и указывают лишь на порядок величин  $N_\alpha$  и  $T_\alpha$  в различных условиях.

### § 3. Квазинейтральность. Плазменная частота и дебаевский радиус

Данное выше определение плазмы является неточным. Дело в том, что не всякий ионизованный газ представляет собой плазму. Нужно еще, чтобы он обладал свойством квазинейтральности, т. е. в среднем за достаточно большие промежутки времени и на достаточно больших расстояниях был в целом нейтральным. Выясним, каковы эти характерные промежутки времени и расстояния, или иначе, каковы временные и пространственные масштабы разделения зарядов и нарушения нейтральности плазмы. Требование квазинейтральности накладывает связь на величины концентраций электронов и ионов:

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha} = 0, \quad (3.1)$$

где  $e_{\alpha}$ ,  $N_{\alpha}$  — соответственно заряд и концентрация частиц сорта  $\alpha$ .

В случае, когда в плазме имеются однократно ионизованные ионы только одного сорта, это условие записывается в виде

$$[N_e = N_i], \quad (3.2)$$

так как заряд электрона  $e = -e_i$ .

Оценим вначале из простых физических соображений временной масштаб разделения зарядов. Представим себе, что какой-либо электрон плазмы отклонился от своего первоначального равновесного положения в плазме. При этом возникает возвращающая сила, по порядку величины равная средней силе взаимодействия частиц, т. е.  $F \approx \approx e^2/r_{\text{cp}}^2$ , где  $r_{\text{cp}}$  — среднее расстояние между частицами:  $r_{\text{cp}} =$

$= \left( \frac{3}{4\pi N_e} \right)^{1/3}$ . В результате электрон начнет колебаться около равновесного положения с частотой

$$\omega \approx \sqrt{\frac{F}{mr_{cp}}} \approx \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_e}{3m}} \sim \omega_{Le}, \quad (3.3)$$

где величина

$$\omega_{Le} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_e}{m}}$$

называется электронной ленгмюровской, электронной плазменной или просто плазменной частотой и является чрезвычайно важной характеристикой плазмы. Естественно принять за временной масштаб разделения зарядов величину, обратную электронной ленгмюровской частоте:

$$\tau \sim 1/\omega_{Le}, \quad (3.4)$$

поскольку за отрезки времени  $t \gg \tau$  частицы совершат много колебаний около равновесного положения и плазма в целом будет вести себя как квазинейтральная система. Плазменная частота не зависит от температуры, поэтому она одинакова для вырожденной и невырожденной плазмы:  $\omega_{Le} \approx \sqrt{3 \cdot 10^9 N_e}$ , для полупроводниковой плазмы  $\omega_{Le} \sim \sqrt{3 \cdot 10^9 N_e \frac{m}{m_e}}$ . По этим формулам легко оценить порядок величины плазменной частоты для различных реальных плазм. Так, для ионосферной плазмы  $\omega_{Le} \approx 5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ , для термоядерной плазмы и плазмы газового разряда  $\omega_{Le} \approx 10^8 \div 10^{16} \text{ с}^{-1}$ , а для плазмы твердых тел  $\omega_{Le} \approx 10^{13} \div 5 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ .

Рассмотрим теперь пространственный масштаб разделения зарядов. Из простых физических соображений ясно, что его величина должна определяться длиной, на которую может сместиться возмущение плотности заряженных частиц вследствие их теплового движения за время, равное периоду плазменных колебаний. Таким образом, пространственный масштаб разделения зарядов для невырожденной плазмы равен

$$d \approx \frac{v_{Te}}{\omega_{Le}} = \sqrt{\frac{\chi T_e}{4\pi e^2 N_e}} = r_{De}, \quad (3.5)$$

где  $v_{Te} = \sqrt{\frac{\chi T_e}{m}}$  — скорость теплового движения электронов, а величина

$$r_{De} = \sqrt{\frac{\chi T_e}{4\pi e^2 N_e}} \approx 7 \sqrt{\frac{T(\text{K})}{N_e(\text{см}^{-3})}} [\text{см}] \quad (3.6)$$

носит название электронного дебаевского радиуса и играет в физике плазмы фундаментальную роль.

Для вырожденной плазмы энергия хаотического движения электронов представляет собой энергию Ферми, поэтому в выражении (3.6)  $\chi T_e$  следует заменить на  $\varepsilon_{Fe}$ :

$$r_{De} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{Fe}}{4\pi e^2 N_e}}. \quad (3.7)$$

Итак, для квазинейтральности плазмы необходимо, чтобы ее характерные размеры  $L$  были много большими дебаевского радиуса:

$$L \gg r_{De}. \quad (3.8)$$

Только при этом условии систему заряженных частиц можно считать плазмой, т. е. материальной средой с новыми качественными свойствами. В противном случае получается простая совокупность отдельных заряженных частиц, к которой применима электродинамика вакуума.

Приведем численные оценки величины  $r_{De}$ . Для ионосферной плазмы  $r_{De} \approx 10^{-1}$  см, для термоядерной плазмы и плазмы газового разряда  $r_{De} \approx 10^{-3} \div 10^{-4}$  см, для плазмы твердых тел  $r_{De} \approx 10^{-5} \div 10^{-7}$  см. Из этих оценок следует, что в реальных условиях дебаевский радиус — очень малая величина, и условие (3.8) практически всегда выполняется с большим запасом.

#### § 4. Газовое приближение. Плазменный параметр

В приведенном определении плазма была охарактеризована как газ заряженных частиц. Но газом нельзя считать любую систему частиц. Совокупность заряженных частиц образует газ, или, как говорят, для нее применимо **г а з о в о е п р и б л и ж е н и е**, если средняя потенциальная энергия частиц мала по сравнению с их средней кинетической (тепловой) энергией. Только при этом условии частицы газа являются почти свободными и слабо взаимодействуют между собой. Для кулоновски взаимодействующих частиц указанное требование записывается в виде

$$\frac{e^2}{r_{cp}} \sim e^2 N^{1/3} \ll \chi T. \quad (4.1)$$

С этим неравенством связана важная характеристика плазмы:

$$\eta = \frac{e^2}{r_{cp} \chi T} = \frac{e^2 N^{1/3}}{\chi T} \sim \frac{e^2 4\pi e^2 N}{r_{cp} \chi T 4\pi e^2 N} \sim \frac{r_{cp}^2}{r_{De}^2} \ll 1. \quad (4.2)$$

Величина  $\eta$  называется **п л а з м е н н ы м п а р а м е т р о м**, и условие применимости газового приближения сводится к требованию  $\eta \ll 1$ . Неравенство (4.2) означает, что среднее расстояние между заряженными частицами в плазме должно быть меньше дебаевского



радиуса, или иначе, внутри дебаевской сферы (радиус сферы  $r_D$ ) должно находиться много частиц.

В реальной газовой плазме неравенства (4.1) и (4.2), как правило, выполняются с большим запасом: для ионосферной плазмы  $\eta \leq 10^{-4}$ , а для термоядерной плазмы и плазмы газового разряда  $\eta \leq 10^{-2}$ .

Для вырожденной плазмы плазменный параметр  $\eta$  есть отношение средней потенциальной энергии к энергии Ферми:

$$\eta = \frac{e^2 N^{1/3}}{\varepsilon_{Fe}} = \frac{2me^2}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 N^{1/3}} \sim \frac{r_{cp}^2}{4\pi r_{De}^2} \ll 1. \quad (4.3)$$

Из сравнения неравенств (4.2) и (4.3) видно, что в невырожденной плазме условие применимости газового приближения при заданной температуре выполняется тем лучше, чем меньше плотность заряженных частиц  $N$ , в то время как в вырожденной плазме выполнение этого условия облегчается с ростом  $N$ . Газовое приближение применимо в металлах лишь при концентрации носителей заряда  $N_e \geq 10^{22} \text{ см}^{-3}$ , а в полупроводниках с эффективной массой носителей  $m^* = 10^{-2} m$  и при меньших концентрациях носителей заряда — порядка  $N_e > > (10^{16} \div 10^{17}) \text{ см}^{-3}$ . Таким образом, условие (4.3) для реальных металлов находится на грани применимости.

## Задачи к главе I

**Задача 1.** Исследовать колебания однородной газовой плазмы, возникшие при малом смещении электронов относительно ионов.

**Решение.** Обозначим вектор смещения электронов относительно ионов через  $\mathbf{S}$ . Плотность нескомпенсированного заряда электронов при смещении  $\mathbf{S}$  будет равна

$$\rho = \text{div } eN_e \mathbf{S} = eN_e \text{ div } \mathbf{S}.$$

Этот заряд создает электрическое поле  $\mathbf{E}$ , величина которого определяется из уравнения Пуассона:

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho = 4\pi eN_e \text{ div } \mathbf{S}.$$

Отсюда, учитывая, что при  $\mathbf{S} = 0$  и  $\mathbf{E} = 0$ , можно написать

$$\mathbf{E} = 4\pi eN_e \mathbf{S}.$$

Таким образом, поле  $\mathbf{E}$  параллельно смещению электронов  $\mathbf{S}$  и действует на каждый электрон с силой

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} = -4\pi e^2 N_e \mathbf{S},$$

стремящейся вернуть электрон в первоначальное равновесное положение. В результате имеем уравнение движения электрона вида

$$m \frac{d^2 \mathbf{S}}{dt^2} = -e\mathbf{E} = -4\pi e^2 N_e \mathbf{S}.$$

Это уравнение описывает колебания плазмы около равновесного положения ( $\mathbf{S} = 0$ ) с частотой

$$\omega_0 = \omega_{Le} = \left( \frac{4\pi e^2 N_e}{m} \right)^{1/2}.$$

**Задача 2.** Найти потенциал пробного заряда  $q$ , помещенного в пространственно однородную газовую плазму с температурой электронов  $T_e$  и ионов  $T_i$ .

**Решение.** Заряд  $q$  создает электрическое поле, которое поляризует плазму. В результате в плазме наряду с плотностью внешнего заряда  $q\delta(\mathbf{r})$  появится индуцированная плотность заряда  $\rho(\Phi)$ , где  $\Phi$  — искомый потенциал. Потенциал подчиняется уравнению Пуассона:

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho(\Phi) - 4\pi q\delta(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Плотность индуцированного заряда в плазме равна

$$\rho = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \tilde{N}_{\alpha}, \quad (2)$$

где  $\tilde{N}_{\alpha}(\Phi)$  — плотность частиц сорта  $\alpha$  в плазме при наличии поля  $\Phi$ .

Согласно барометрической формуле

$$\tilde{N}_{\alpha}(\Phi) = N_{\alpha} e^{-\frac{e_{\alpha}\Phi}{\chi T_{\alpha}}}, \quad (3)$$

где  $N_{\alpha}$  — плотность частиц в отсутствие поля  $\Phi$  (в отсутствие заряда  $q$ ), поэтому по условию квазинейтральности плазмы  $\sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha} = 0$ . Таким образом, из уравнения Пуассона имеем

$$\Delta\Phi = -4\pi q\delta(\mathbf{r}) - 4\pi \sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha} e^{-\frac{e_{\alpha}\Phi}{\chi T_{\alpha}}} \approx -4\pi q\delta(\mathbf{r}) + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2 N_{\alpha}}{\chi T_{\alpha}} \Phi. \quad (4)$$

Здесь потенциал точечного заряда считается достаточно слабым, так что  $e_{\alpha}\Phi \ll \chi T_{\alpha}$ .

Разложим потенциал  $\Phi(\mathbf{r})$  в ряд Фурье:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \Phi(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (5)$$

и используем соотношение

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad (6)$$

находим решение уравнения Пуассона в виде

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi q}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k^2 + \frac{1}{r_D^2}}, \quad (7)$$

где

$$\frac{1}{r_D^2} = \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2 N_{\alpha}}{\chi T_{\alpha}} = \frac{1}{r_{De}^2} + \frac{1}{r_{Di}^2} \quad (8)$$

( $r_{De}$ ,  $r_{Di}$  — дебаевские радиусы электронов и ионов соответственно).

Интегрирование полученного выражения лучше всего провести методом теории функций комплексного переменного с обходом полюса  $k = i/r_D$  и замыканием контура интегрирования по большой окружности в верхней полуплоскости комплексного  $\mathbf{k}$ . В результате получим

$$\Phi(r) = \frac{q}{r} e^{-r/r_D}$$

Таким образом, поле пробного заряда в плазме отличается от поля в вакууме тем, что оно экранируется на больших расстояниях  $r > r_D$ . Такое экранирование — следствие преимущественной группировки заряженных частиц противоположного знака вокруг пробного заряда. На расстояниях  $r < r_D$  поле пробного заряда в плазме практически не отличается от поля в вакууме.

**Задача 3.** На диаграмме  $N(T)$  электронной плазмы указать области вырождения носителей заряда и применимости газового приближения.

**Решение.** Условие вырождения для электронной плазмы записывается в виде

$$\varepsilon_F > \chi T.$$

На диаграмме зависимости  $\ln N$  от  $\ln T$  (рис. 1) условие

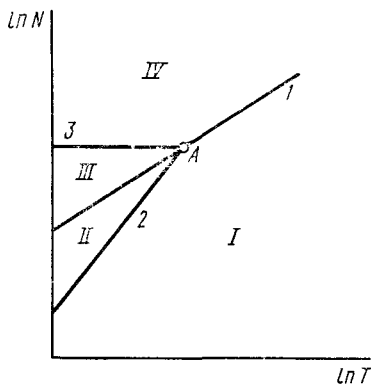


Рис. 1

$$\varepsilon_F = \chi T = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 N^{2/3}}{2m} \quad (1)$$

дает прямую 1, разделяющую область вырожденной плазмы от невырожденной. Условием применимости газового приближения в невырожденном состоянии будет

$$\eta_{\text{кл}} = \frac{e^2 N^{1/3}}{\chi T} < 1. \quad (2)$$

На той же диаграмме  $\eta_{\text{кв}} = 1$  дает прямую 2. В вырожденном же состоянии для применимости газового приближения необходимо выполнение условия

$$\eta_{\text{кв}} = \frac{e^2 N^{1/3}}{\varepsilon_F} < 1. \quad (3)$$

Поскольку энергия Ферми не зависит от  $T$ , а зависит только от  $N$ , условие  $\eta_{\text{кв}} = 1$  дает прямую 3, проходящую через точку  $A$ , где пересекаются три прямые  $\varepsilon_F = T = e^2 N^{1/3}$ . Следовательно, в области I имеется невырожденная плазма со слабым взаимодействием, к которой применимо газовое приближение; в области II — невырожденная плазма с сильным взаимодействием, т. е. классическая жидкость; в области III — вырожденная плазма с сильным взаимодействием, т. е. квантовая жидкость. Как в области II, так и в области III газовое приближение неприменимо. Наконец, область IV изменения параметров  $N$  и  $T$  характеризует вырожденную плазму со слабым взаимодействием, к которой газовое приближение применимо.

## ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ СРЕД С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ И ВРЕМЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

### § 5. Уравнения электромагнитного поля в среде и граничные условия

Основная особенность плазмы с электродинамической точки зрения состоит в том, что она является средой с резко выраженной частотной (временной) и пространственной дисперсией. Смысл этих понятий будет раскрыт далее. Сейчас же сформулируем уравнения электромагнитного поля в плазме как в материальной среде.

В предыдущих параграфах было дано определение плазмы как системы, состоящей из заряженных частиц, но в целом квазинейтральной. Отсюда следует, что специфические особенности плазмы могут проявиться только тогда, когда распределение заряженных частиц в ней становится неоднородным и возникают макроскопические электромагнитные поля. Электромагнитные поля в плазме могут создаваться и внешними источниками, однако существенно, что эти поля влияют на характер распределения и движение заряженных частиц в плазме, индуцируя в ней заряды и токи, которые сами создают электромагнитные поля, изменяя полное поле в системе. Происходит так называемое самосогласованное воздействие заряженных частиц и поля друг на друга.

Таким образом, уравнения электромагнитного поля в плазме должны учитывать индуцированные заряды и токи. Эти уравнения для плазмы, как и для любой другой материальной среды, могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho + 4\pi\rho_0, \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции;  $\mathbf{E}$  — вектор напряженности электрического поля;  $\mathbf{j}$  и  $\rho$  — соответственно плотности тока и заряда, индуцируемых в среде;  $\mathbf{j}_0$  и  $\rho_0$  — плотности тока и заряда внешних источников поля.

В дальнейшем будем считать внешние источники поля либо заданными, либо отсутствующими ( $\rho_0 = 0$ ,  $\mathbf{j}_0 = 0$ ). В последнем случае, образуя дивергенцию от первого уравнения системы (5.1), получим

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Подставляя сюда значение  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  из последнего уравнения системы (5.1), находим, что индуцированные заряды и токи удовлетворяют уравнению непрерывности, выражающему закон сохранения количества электричества:

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (5.2)$$

Система уравнений (5.1) приобретает конкретное физическое содержание, если ясен физический смысл входящих в нее величин. Физический смысл напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  и магнитной индукции  $\mathbf{B}$  в среде, так же как и в вакууме, определяется выражением для силы Лоренца, действующей со стороны поля на пробный точечный заряд  $e$ , движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{F} = e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\}. \quad (5.3)$$

Таким образом, в системе уравнений поля (5.1) влияние среды характеризуется появлением (по сравнению с уравнениями поля в вакууме) одной новой векторной величины  $\mathbf{j}$  — плотности индуцированного тока в среде; плотность индуцированного заряда  $\rho$  выражается через  $\mathbf{j}$  с помощью уравнения непрерывности (5.2).

Удобнее, однако, вместо  $\mathbf{j}$  ввести векторную величину  $\mathbf{D}$ , называемую вектором электрической индукции и определяемую из соотношения

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + 4\pi \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{j}(t', \mathbf{r}). \quad (5.4)$$

Используя это соотношение и уравнение непрерывности (5.2), из системы уравнений электромагнитного поля в среде (5.1) можно исключить плотности индуцированных заряда и тока и записать ее в виде

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Система уравнений (5.1) или (5.5) не является замкнутой до тех пор, пока не задана связь плотности индуцированных токов и зарядов с напряженностью электрического поля  $\mathbf{E}$  и магнитной индукцией  $\mathbf{B}$  (или связь величины  $\mathbf{D}$  с  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ ). Поскольку магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  можно выразить с помощью третьего уравнения системы (5.1) через напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$ , достаточно задать связь величины  $\mathbf{j}$  с  $\mathbf{E}$  (либо  $\mathbf{D}$  с  $\mathbf{E}$ ).

Установление этой связи является задачей той или иной конкретной модели. В частности, далее такая связь будет установлена для плазмы из уравнений, описывающих движение частиц плазмы. Однако, не задаваясь конкретной моделью среды, из общих соображений

можно утверждать, что в линейной электродинамике эта связь должна иметь вид

$$j_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\sigma}_{ij}^{\wedge}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(t', \mathbf{r}'). \quad (5.6)$$

Аналогично для величин  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$

$$D_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\varepsilon}_{ij}^{\wedge}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(t', \mathbf{r}'). \quad (5.7)$$

В этих соотношениях, называемых материальными уравнениями линейной электродинамики, учтено, что состояние среды (индуцированные в ней заряды и токи) в заданный момент времени  $t$  в точке пространства  $\mathbf{r}$  может зависеть от значения поля во все предшествующие моменты времени (в соответствии с принципом причинности) и от значения поля в любой точке среды. Именно в этом проявляется частотная (временная) и пространственная дисперсия среды. Физически частотная дисперсия связана с инерцией зарядов и процессами релаксации поля в среде, а пространственная дисперсия — с передачей действия поля из одной точки среды в другую из-за наличия в плазме процессов переноса и теплового движения частиц. Функции  $\hat{\sigma}_{ij}^{\wedge}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}')$  и  $\hat{\varepsilon}_{ij}^{\wedge}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , называемые часто функциями влияния и представляющие собой ядра интегральных соотношений (5.6) и (5.7), характеризуют эффективность передачи действия поля из одной точки пространства — времени в другую. Задачей конкретной модели среды как раз и является нахождение явного выражения этих функций.

Для решения электродинамических задач системы уравнений (5.1), (5.5) должны быть дополнены граничными условиями, которые выводятся из самих уравнений поля путем их интегрирования по бесконечно тонкому пограничному слою раздела двух сред. Сформулируем эти условия на примере однородной поверхности раздела двух сред. Рассмотрим бесконечно тонкий слой вблизи границы раздела сред 1 и 2. Предположим, что направление нормали  $\mathbf{n}$  к рассматриваемому участку границы раздела совпадает с направлением оси  $x$  (рис. 2). Рассмотрим второе уравнение системы (5.5):

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Интегрирование этого уравнения по пограничному слою (вдоль оси  $x$ ) дает

$$\int_1^2 \frac{\partial B_x}{\partial x} dx + \int_1^2 \left( \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dx = 0.$$

Устремим теперь толщину пограничного слоя между средами 1 и 2 к нулю и учтем, что вектор  $\mathbf{B}$  как физическая величина (она опре-

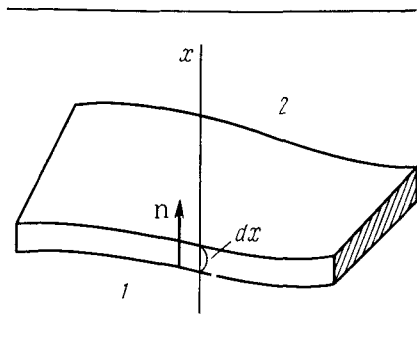
деляет силу, действующую на частицу) не может терпеть бесконечных скачков. Это означало бы появление бесконечных сил. Не могут терпеть бесконечных скачков и тангенциальные (вдоль поверхности раздела сред) производные  $\mathbf{V}$ . В результате интегрирования получаем

$$B_{2x} - B_{1x} = 0,$$

или в общей форме

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad (5.8)$$

Рис. 2



т. е. условие непрерывности нормальных к поверхности раздела компонент вектора магнитной индукции.

Интегрируя аналогичным образом третье уравнение системы (5.5), которое также явно не зависит от свойств среды, находим условие непрерывности тангенциальных компонент вектора напряженности электрического поля:

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}. \quad (5.9)$$

Выведем теперь граничное условие из последнего уравнения системы (5.5). Интегрирование этого уравнения по бесконечно тонкому пограничному слою дает

$$\int_1^2 \frac{\partial D_x}{\partial x} dx + \int_1^2 \left( \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dx = 4\pi\sigma_0,$$

где  $\sigma_0$  — поверхностная плотность зарядов внешних источников.

Здесь уже отличны от нуля оба интеграла, поскольку индукция  $\mathbf{D}$ , не являясь реальной физической величиной, может испытывать бесконечные скачки. Обозначая в общем виде

$$\frac{1}{4\pi} \int_1^2 \left( \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dx = \frac{1}{4\pi} \int_1^2 \operatorname{div} [\mathbf{n} [\mathbf{Dn}]] dx = -\sigma,$$

получаем граничное условие

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi(\sigma + \sigma_0), \quad (5.10)$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность индуцированных зарядов.

Наконец, аналогичное интегрирование первого уравнения системы (5.5) приводит к граничному условию

$$[\mathbf{n}, \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1] = \mathbf{B}_{2t} - \mathbf{B}_{1t} = \frac{4\pi}{c} [\mathbf{i} + \mathbf{i}_0], \quad (5.11)$$

где  $i_0$  — поверхностная плотность тока внешних источников, а  $i$  определяется равенством

$$i = - \frac{1}{4\pi} \int_1^2 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dx = - \int_1^2 \left( \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) dx = - \int_1^2 \mathbf{j} dx. \quad (5.12)$$

Соотношения (5.8) ÷ (5.12) представляют собой полную систему граничных условий для уравнений поля (5.5), дополненных материальным уравнением (5.7) [либо (5.1) и (5.6)].

## § 6. Тензор комплексной проводимости и диэлектрической проницаемости

Обратимся теперь к анализу материальных уравнений для плазмы, т. е. изучим общий вид и общие свойства функциональных связей (5.6) и (5.7) без получения явного вида этих связей для какой-либо конкретной модели плазмы.

Рассмотрим соотношение (5.6) и (5.7) для случая однородной в пространстве и во времени среды. Однородность во времени означает, что среда не меняет своих свойств во времени под действием внешних причин, не связанных с действием электромагнитного поля. Очевидно, в этом случае ядра интегральных соотношений (5.6) и (5.7) являются разностными функциями времени и координат, т. е. зависят от  $t-t'$  и  $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ . Тогда

$$j_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\sigma}_{ij}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') E_j(t', \mathbf{r}'), \quad (6.1)$$

$$D_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\varepsilon}_{ij}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') E_j(t', \mathbf{r}'). \quad (6.2)$$

Электромагнитное поле в среде с помощью разложения в ряд Фурье можно представить в виде совокупности плоских монохроматических волн, зависимость которых от времени и координат описывается функцией  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$  ( $\omega$  — частота,  $\mathbf{k}$  — волновой вектор). В силу линейности уравнений поля достаточно рассмотреть лишь одну компоненту разложения, т. е. принять, что

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (6.3)$$

Такая же зависимость принимается и для всех других входящих в уравнения поля величин.

Соотношение (6.1) при этом запишется в виде

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\sigma}_{ij}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') e^{-i\omega(t'-t) + i\mathbf{k}(\mathbf{r}'-\mathbf{r})} E_j(\omega, \mathbf{k}), \quad (6.4)$$



или

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} dt_1 \int d\mathbf{r}_1 \hat{\sigma}_{ij}(t_1, \mathbf{r}_1) e^{i\omega t_1 - i\mathbf{k}\mathbf{r}_1} E_j(\omega, \mathbf{k}). \quad (6.5)$$

Здесь  $t_1 = t - t'$ .  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ .

Отсюда сразу же следует, что связь между амплитудами  $j_i(\omega, \mathbf{k})$  и  $E_j(\omega, \mathbf{k})$  имеет вид

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}), \quad (6.6)$$

где

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} dt_1 \int d\mathbf{r}_1 \hat{\sigma}_{ij}(t_1, \mathbf{r}_1) e^{i\omega t_1 - i\mathbf{k}\mathbf{r}_1}. \quad (6.7)$$

Величина  $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  называется тензором комплексной проводимости среды.

Аналогично вводится тензор комплексной диэлектрической проницаемости среды:

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}), \quad (6.8)$$

где

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} dt_1 \int d\mathbf{r}_1 \hat{\varepsilon}_{ij}(t_1, \mathbf{r}_1) e^{i\omega t_1 - i\mathbf{k}\mathbf{r}_1}. \quad (6.9)$$

Зависимость этих тензоров от  $\omega$  определяет частотную (временную) дисперсию, а зависимость их от волнового вектора  $\mathbf{k}$  — пространственную дисперсию электромагнитного поля в среде.

С учетом выражения для электрической индукции (5.4) из (6.6) и (6.8) легко установить следующую связь между тензорами  $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  и  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ :

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}). \quad (6.10)$$

При этом, естественно, предполагалось, что  $\omega \neq 0$ .

Необходимо отметить, что тензоры  $\hat{\sigma}_{ij}(t, \mathbf{r})$  и  $\hat{\varepsilon}_{ij}(t, \mathbf{r})$  являются действительными функциями своих переменных, так как они связывают между собой действительные величины  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ ,  $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$  и  $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ . Этого нельзя сказать о тензорах  $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  и  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  даже как о функциях действительных переменных  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ . Однако из действительности функций  $\hat{\sigma}_{ij}(t, \mathbf{r})$  и  $\hat{\varepsilon}_{ij}(t, \mathbf{r})$  следуют определенные свойства величин  $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  и  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ . В самом деле, из выражений (6.7) и (6.9) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \varepsilon_{ij}^*(-\omega, -\mathbf{k}), \\ \operatorname{Re} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \operatorname{Re} \varepsilon_{ij}(-\omega, -\mathbf{k}), \\ \operatorname{Im} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= -\operatorname{Im} \varepsilon_{ij}(-\omega, -\mathbf{k}), \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

где  $\text{Re } \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  и  $\text{Im } \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  — соответственно действительная и мнимая части компонент тензора  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ .

В случае изотропной среды, т. е. среды, свойства которой одинаковы в любой точке пространства и в любых направлениях, тензор диэлектрической проницаемости является функцией лишь одного единственного вектора  $\mathbf{k}$ , причем функцией четной, не меняющейся при замене  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ . Тензор  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  при этом может выражаться лишь через единичный тензор  $\delta_{ij}$  и тензор  $k_i k_j$ ; других тензоров второго ранга из единственного вектора  $\mathbf{k}$  составить невозможно. Поэтому для изотропной среды тензор  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  можно представить в виде

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{tr}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l(\omega, k). \quad (6.12)$$

Это означает, что в изотропной среде из 9 компонент тензора  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  независимыми являются только две:  $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$  и  $\varepsilon^l(\omega, k)$ , называемые поперечной и продольной диэлектрической проницаемостью соответственно. Смысл этих названий легко понять, если учесть, что тензор  $\frac{k_i k_j}{k^2}$  при умножении на  $E_j$  выделяет продольную относительно волнового вектора часть поля ( $\mathbf{kE}$ ), а следовательно, величина  $\varepsilon^l(\omega, k)$  характеризует электромагнитные свойства среды по отношению к продольному полю. Тензор же  $\left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right)$  при умножении на  $E_j$  выделяет поперечную относительно вектора  $\mathbf{k}$  часть поля  $[\mathbf{kE}]$ , т. е.  $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$  характеризует электромагнитные свойства среды по отношению к поперечному полю.

Аналогично записывается для изотропной среды и тензор комплексной проводимости:

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \sigma^{tr}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \sigma^l(\omega, k), \quad (6.13)$$

причем на основании соотношения (6.10) получаем

$$\varepsilon^{tr, l}(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma^{tr, l}(\omega, k). \quad (6.14)$$

Запишем соотношения (6.11) для изотропной среды:

$$\begin{aligned} \text{Re } \varepsilon^{tr, l}(\omega, k) &= \text{Re } \varepsilon^{tr, l}(-\omega, k), \\ \text{Im } \varepsilon^{tr, l}(\omega, k) &= -\text{Im } \varepsilon^{tr, l}(-\omega, k). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Легко показать, что аналогичным соотношениям удовлетворяет и тензор  $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  с заменой  $\text{Re} \rightleftharpoons \text{Im}$ .

Тензор диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  как функция частоты  $\omega$ , определенная с помощью одностороннего преобразования Фурье (6.9), является аналитической в верхней полуплоскости комплексного переменного  $\omega$  и поэтому удовлетворяет соотношению (интеграл Коши)

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - \delta_{ij} = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \mathcal{P} \frac{\varepsilon_{ij}(\omega', \mathbf{k}) - \delta_{ij}}{\omega' - \omega}, \quad (6.16)$$

где  $\mathcal{P}$  означает, что интеграл следует понимать в смысле главного значения.

Разделив это соотношение на действительные и мнимые части, получим известные формулы Крамерса—Кронига, связывающие между собой  $\text{Re } \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  и  $\text{Im } \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ :

$$\begin{aligned} \text{Re } \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - \delta_{ij} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \mathcal{P} \frac{\text{Im } \varepsilon_{ij}(\omega', \mathbf{k})}{\omega' - \omega}, \\ \text{Im } \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \mathcal{P} \frac{\text{Re } \varepsilon_{ij}(\omega', \mathbf{k}) - \delta_{ij}}{\omega' - \omega}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Отсюда следует, что в случае изотропной среды формулы Крамерса—Кронига справедливы как для продольной  $\varepsilon^l(\omega, k)$ , так и для поперечной  $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$  диэлектрической проницаемости.

Не представляет труда запись формул Крамерса—Кронига также для тензора комплексной проводимости:

$$\begin{aligned} \text{Re } \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \mathcal{P} \frac{\text{Im } \sigma_{ij}(\omega', \mathbf{k})}{\omega' - \omega}, \\ \text{Im } \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \mathcal{P} \frac{\text{Re } \sigma_{ij}(\omega', \mathbf{k})}{\omega' - \omega}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

В заключение заметим, что задачей той или иной конкретной модели среды как раз и является вычисление тензора  $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  и  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ . Именно эту задачу и будем решать для плазмы.

## § 7. Энергия электромагнитного поля в среде

Продолжая изучение общих свойств тензора диэлектрической проницаемости материальных сред с пространственной дисперсией, рассмотрим вопрос об энергии электромагнитного поля в такой среде. Внешние источники, создающие поле в среде, естественно, изменяют ее энергию, что обусловлено взаимодействием электромагнитного поля с источниками, или, иными словами, работой поля над внешними источниками. Чтобы вычислить эту работу, умножим первое уравнение системы (5.5) скалярно на  $\mathbf{E}$ , а третье на  $\mathbf{B}$  и вычтем одно из другого. В результате получим

$$\frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{c}{4\pi} \text{div} [\mathbf{E}\mathbf{B}] - \mathbf{E}\mathbf{j}_0. \quad (7.1)$$

Проинтегрировав это соотношение по некоторому объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$ , найдем, используя теорему Гаусса,

$$\frac{1}{4\pi} \int_V d\mathbf{r} \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{c}{4\pi} \oint dS [\mathbf{E}\mathbf{B}] - \int_V d\mathbf{r} \mathbf{E} \mathbf{j}_0. \quad (7.2)$$

Переходя теперь к пределу неограниченной среды и замечая, что на бесконечности поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  должны исчезать, первым слагаемым в правой части соотношения (7.2) пренебрежем. Второе же слагаемое представляет собой работу поля над внешними источниками в единицу времени, т. е.

$$dA/dt = \int_V d\mathbf{r} \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (7.3)$$

Эта работа, естественно, компенсируется изменением энергии поля  $W$ . Таким образом,

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dA}{dt} = -\int_V d\mathbf{r} \mathbf{j}_0 \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \int_V d\mathbf{r} \left( \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right). \quad (7.4)$$

Рассмотрим далее поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$  в виде плоских монохроматических волн  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ . Учитывая действительность функций  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ ,  $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$  и  $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ , запишем

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{E}^*(\omega, \mathbf{k}) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (7.5)$$

Аналогично записываются  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$ . Подставляя такие разложения в формулу (7.4) и производя усреднение по времени, получим

$$\frac{d\bar{W}}{dt} = \frac{i\omega}{4\pi} \int_V d\mathbf{r} (\mathbf{E}\mathbf{D}^* - \mathbf{E}^*\mathbf{D}) = \frac{i\omega}{4\pi} V (\mathbf{E}\mathbf{D}^* - \mathbf{E}^*\mathbf{D}), \quad (7.6)$$

где  $V$  — достаточно большой объем среды.

Заметим, что используя выражение (7.4) для монохроматических полей вида (7.5), которые не исчезают на бесконечности, на первый взгляд, поступаем непоследовательно. Однако это не так, поскольку даже если поля остаются конечными и на бесконечности, при переходе к пределу неограниченной среды поверхностный интеграл в правой части соотношения (7.2) растет гораздо медленнее объемного, и им можно пренебречь. Более того, в формуле (7.6) введен большой, но конечный объем среды  $V$  ввиду того, что указанное пренебрежение поверхностным интегралом остается справедливым и в этом случае.

Подставляя далее в (7.6) материальное уравнение (6.8), получим выражение для среднего количества энергии, выделяющейся в среде в единицу времени:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{d\bar{W}}{dt} = \frac{i\omega}{4\pi} \int d\mathbf{r} [\epsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) - \epsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k})] E_i E_j^* = \\ &= \frac{i\omega}{4\pi} V [\epsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) - \epsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k})] E_i E_j^*. \end{aligned} \quad (7.7)$$

При выводе этого соотношения использовано свойство тензора комплексной диэлектрической проницаемости (6.11):

$$\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(-\omega, -\mathbf{k}).$$

Из формулы (7.7) непосредственно следует, что количество тепла, выделяющегося в единице объема в единицу времени, равно

$$\frac{Q}{V} = \frac{i\omega}{4\pi} [\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k})] E_i E_j^*. \quad (7.8)$$

Соотношение (7.8) позволяет сделать весьма важный вывод: в среде, в которой тензор диэлектрической проницаемости при действительных  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  является эрмитовским, т. е.  $\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k})$ , тепло не выделяется, т. е.  $Q = 0$  (см. приложение II). Это означает, что плоская монохроматическая волна в такой среде не поглощается. Таким образом, можно сказать, что за поглощение электромагнитного поля в среде ответственна антиэрмитовская часть тензора диэлектрической проницаемости.

Соотношение (7.8) принимает особо простой вид и позволяет сделать дальнейшие выводы о свойствах тензора диэлектрической проницаемости для изотропных сред, когда тензор  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  записывается в виде (6.12). Для изотропной среды из соотношения (7.8) получаем

$$\frac{Q}{V} = \frac{\omega}{2\pi k^2} \{ \text{Im } \varepsilon^l(\omega, k) |(\mathbf{kE})|^2 + \text{Im } \varepsilon^{tr}(\omega, k) |[\mathbf{kE}]|^2 \}, \quad (7.9)$$

где  $\text{Im } \varepsilon^l(\omega, k)$  и  $\text{Im } \varepsilon^{tr}(\omega, k)$  — мнимые части компонент  $\varepsilon^l(\omega, k)$  и  $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$  при действительных  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ .

Первое слагаемое этого выражения определяет поглощение продольного (вихревого) поля в среде (в котором  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ ), а второе — поперечного (вихревого) поля (в котором  $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ ).

Из соотношения (7.9) следует очень важное свойство тензора  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  для изотропной среды, находящейся в состоянии термодинамического равновесия. Очевидно, что в такой среде любые электромагнитные волны должны поглощаться, поэтому  $Q > 0$ . Учитывая это, из соотношения (7.9) получаем, что в термодинамически равновесной среде

$$\text{Im } \varepsilon^l(\omega, k) > 0; \quad \text{Im } \varepsilon^{tr}(\omega, k) > 0. \quad (7.10)$$

Нарушение любого из этих неравенств приводит к тому, что возможно изменение знака  $Q$ , т. е. возможна перекачка энергии от среды к электромагнитному полю. В такой среде возникшее флуктуационным образом поле может нарастать во времени, вызывая тем самым уменьшение энергии среды. Очевидно, что это возможно только в том случае, если среда находится в термодинамически неравновесном состоянии. Следует, однако, заметить, что нарушение какого-либо из неравенств (7.10) еще не является достаточным условием развития неустойчивости в среде и нарастания электромагнитного поля в ней.

Нужно, чтобы в той области значений  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ , в которой  $\text{Im } \varepsilon^l < 0$  и  $\text{Im } \varepsilon^{lr} < 0$ , в среде могли распространяться электромагнитные волны.

При написании формулы (7.5) электромагнитное поле в среде считалось строго монохроматическим. Реально поле в среде всегда состоит из суперпозиции монохроматических полей с частотами, близкими к некоторому значению  $\omega$ . Поэтому вместо (7.5) необходимо записать

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, t) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{E}^*(\omega, \mathbf{k}, t) e^{+i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (7.11)$$

где  $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, t)$  — медленно меняющаяся функция времени  $t$ .

При этом в разложении Фурье

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' e^{-i\omega' t} \mathbf{E}(\omega', \mathbf{r}) \quad (7.12)$$

величина  $\mathbf{E}(\omega', \mathbf{r})$  как функция  $\omega'$  имеет резкие максимумы вблизи  $\omega' = \pm \omega$ . Это означает, что

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, t) = \int_0^{\infty} d\omega' e^{i(\omega - \omega')t} \mathbf{E}(\omega', \mathbf{k}), \quad (7.13)$$

$$\mathbf{E}^*(\omega, \mathbf{k}, t) = \int_{-\infty}^0 d\omega' e^{-i(\omega + \omega')t} \mathbf{E}^*(\omega', \mathbf{k}).$$

Учитывая это и аналогичные соотношения для  $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{k}, t)$ ,  $\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}, t)$  и ограничиваясь членами первого порядка по  $\omega' \pm \omega$  в подынтегральных выражениях, из (7.4) после усреднения по времени вместо (7.6) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \cdot \frac{d\bar{W}}{dt} = & \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{d}{dt} [B_i^*(\omega, \mathbf{k}, t) B_i(\omega, \mathbf{k}, t)] + \right. \\ & + E_i^*(\omega, \mathbf{k}, t) \frac{\partial E_j(\omega, \mathbf{k}, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) + \\ & \left. + E_j(\omega, \mathbf{k}, t) \frac{\partial E_i^*(\omega, \mathbf{k}, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon_{ji}^*(\omega, \mathbf{k}) \right\} + \\ & + \frac{i\omega}{4\pi} [\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k})] E_i(\omega, \mathbf{k}, t) E_j^*(\omega, \mathbf{k}, t). \quad (7.14) \end{aligned}$$

В случае строго монохроматического поля величины  $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, t)$  и  $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{k}, t)$  не зависят от  $t$  и соотношение (7.14) переходит в (7.7), определяющее количество энергии, выделяющейся в единице объема среды в единицу времени. При этом отличным от нуля оказывается лишь последнее слагаемое в правой части (7.14). Если же поле не строго

мономатическое, а среда непоглощающая, то  $\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k})$ , и последним слагаемым в (7.14) можно пренебречь.

В результате находим

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{d\bar{W}}{dt} = \frac{1}{V} \cdot \frac{dU}{dt} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d}{dt} \left[ B_i^*(\omega, \mathbf{k}, t) B_i(\omega, \mathbf{k}, t) + E_i^*(\omega, \mathbf{k}, t) E_j(\omega, \mathbf{k}, t) \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right]. \quad (7.15)$$

Величину

$$U = \frac{1}{4\pi} V \left[ B_i^*(\omega, \mathbf{k}, t) B_i(\omega, \mathbf{k}, t) + E_i^*(\omega, \mathbf{k}, t) E_j(\omega, \mathbf{k}, t) \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right] \quad (7.16)$$

можно рассматривать как среднюю энергию электромагнитного поля в непоглощающей среде.

В случае изотропной непоглощающей среды выражение (7.16) легко приводится к виду

$$U = \frac{V}{4\pi} \left\{ |\mathbf{kE}|^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon^l(\omega, k) + |\mathbf{kE}|^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \times \times \omega \left[ \varepsilon^{tr}(\omega, k) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right] \right\}. \quad (7.17)$$

Отсюда для термодинамически равновесной среды следуют неравенства

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon^l(\omega, k) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \left( \varepsilon^{tr} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right) > 0. \quad (7.18)$$

При  $U > 0$  энергия поля в среде положительна. В неравновесной среде величина  $U$  может стать отрицательной и условия (7.18) могут нарушаться. Нарушение какого-либо из неравенств (7.18) относительно соответствующей волны (продольной, либо поперечной), которую при этом называют волной с отрицательной энергией, является признаком электромагнитной неустойчивости среды.

## § 8. Электромагнитные волны в среде

Как известно из общего курса электродинамики, в отсутствие внешних источников поля в вакууме могут существовать электромагнитные волны, электрическое и магнитное поля которых зависят от времени и координат в виде  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , где  $\omega$  — частота, а  $\mathbf{k}$  — волновой вектор. В вакууме  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  — действительные величины и связаны соотношением

$$\omega = kc. \quad (8.1)$$

Уравнения, связывающие между собой частоту и волновой вектор волны  $\omega(\mathbf{k})$ , называются дисперсионными уравнениями. Соотношение (8.1), в частности, является таким уравнением для электромагнитных волн в вакууме.

Найдем теперь дисперсионное уравнение  $\omega(\mathbf{k})$  для электромагнитных волн в среде. Если среда непоглощающая (как известно из предыдущего параграфа, для таких сред тензор  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  является эрмитовым), то  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ , как и в вакууме, — действительные величины; если же среда поглощающая, то  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  — комплексные величины. Рассмотрим, какие существуют нетривиальные решения системы уравнений поля (5.5) в отсутствие внешних источников. В предположении зависимости полей от времени и координат в виде плоской монохроматической волны  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$  эти уравнения записываются так:

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{kB}]_i &= -\frac{\omega}{c} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j, \quad (\mathbf{kB}) = 0, \\ [\mathbf{kE}] &= \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \quad k_i \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Из этой системы легко получить систему трех однородных алгебраических уравнений для компонент поля  $\mathbf{E}$ :

$$\left\{ k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right\} E_j = 0. \quad (8.3)$$

Условие разрешимости этой системы однородных уравнений и определяет возможность существования нетривиальных волновых решений уравнений поля в среде в отсутствие внешних источников. Очевидно, что это условие имеет вид

$$\Delta = \left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0, \quad (8.4)$$

где  $\Delta$  — детерминант системы алгебраических уравнений (8.3).

Соотношение (8.4) связывает между собой частоту  $\omega$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$  для электромагнитных волн, которые могут существовать в среде, т. е. является дисперсионным уравнением.

В случае изотропной среды, тензор диэлектрической проницаемости которой имеет вид (6.12), система (8.3) распадается на два уравнения (при  $\omega \neq 0$ ):

$$\mathbf{E}^l \epsilon^l(\omega, k) = 0, \quad (8.5)$$

$$\left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon^{tr}(\omega, k) \right] \mathbf{E}^{tr} = 0,$$

где  $\mathbf{E}^l = \frac{\mathbf{k}(\mathbf{kE})}{k^2}$  — компонента электрического поля  $\mathbf{E}$ , параллельная волновому вектору  $\mathbf{k}$ , т. е.  $\mathbf{E}^l$  — продольное поле, а  $\mathbf{E}^{tr} = \mathbf{E} - \mathbf{E}^l$  — компонента электрического поля, перпендикулярная к вектору  $\mathbf{k}$ , т. е.  $\mathbf{E}^{tr}$  — поперечное поле.



Естественно, что и дисперсионное уравнение (8.4) для изотропной среды распадается на два соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon^l(\omega, k) &= 0, \\ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{lr}(\omega, k) &= 0, \end{aligned} \quad (8.6)$$

первое из которых представляет собой условие существования продольных, а второе — поперечных волн в среде.

В общем случае анизотропной среды дисперсионное уравнение (8.4) не распадается на уравнения продольных и поперечных волн. Следовательно, и электромагнитное поле в среде не является ни чисто продольным, ни чисто поперечным. Однако в области низких частот поле  $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$  с большой степенью точности оказывается продольным, т. е.  $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) \parallel \mathbf{k}$ . Условие продольности поля в анизотропной плазме в каждом конкретном случае будет обсуждаться подробно в последующих главах. Здесь же отметим, что продольное поле по определению является потенциальным, и для плоской монохроматической волны

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) = -ik\Phi(\omega, \mathbf{k}) \quad (8.7)$$

(т. е.  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = -\nabla\Phi(t, \mathbf{r})$ ). При этом из последнего уравнения системы (8.2) получаем

$$k_i \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) k_j \Phi(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (8.8)$$

Отсюда находим дисперсионное уравнение продольных, или потенциальных, волн в анизотропной среде:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})}{k^2} = 0. \quad (8.9)$$

Величину  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ , определенную соотношением (8.9), называют продольной диэлектрической проницаемостью анизотропной среды. Легко показать, что для изотропной среды, когда тензор  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  имеет вид (6.12), величина  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$  совпадает с  $\varepsilon^l(\omega, k)$ .

Следует отметить, что для продольного (потенциального) поля (8.7)

$$\begin{aligned} \rho(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k})}{\omega} = \frac{k_i \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k})}{\omega} = \\ &= -i \frac{k_i \sigma_{ij} k_j}{\omega} \Phi(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{k^2}{4\pi} [\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) - 1] \Phi(\omega, \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Подстановка этого соотношения в уравнение Пуассона [в последнее уравнение системы (5.1) для потенциального поля] при  $\rho_0 = 0$

$$k^2 \Phi(\omega, \mathbf{k}) = 4\pi \rho(\omega, \mathbf{k}) = -k^2 [\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) - 1] \Phi(\omega, \mathbf{k}) \quad (8.11)$$

приводит к дисперсионному уравнению (8.9) с продольной диэлектрической проницаемостью:

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{4\pi\rho(\omega, \mathbf{k})}{k^2\Phi(\omega, \mathbf{k})} = 1 + 4\pi\alpha(\omega, \mathbf{k}). \quad (8.12)$$

Величину  $\alpha(\omega, \mathbf{k})$  называют *поляризуемостью среды*.

Как отмечалось, дисперсионное уравнение (8.4) устанавливает связь между  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  для электромагнитных волн, которые могут существовать в среде, или, как говорят, для собственных волн среды. С помощью дисперсионного уравнения можно при заданном действительном значении  $\mathbf{k}$  определить комплексную частоту  $\omega(\mathbf{k})$ , или, иными словами, найти спектр частот собственных колебаний среды. И наоборот, при заданном действительном значении  $\omega$  из дисперсионного уравнения можно найти комплексную проекцию волнового вектора  $\mathbf{k}(\omega)$  в любом заданном направлении. Эти два подхода соответствуют двум различным постановкам задачи при решении интегродифференциальных уравнений электромагнитного поля в среде [интегральный характер этих уравнений обусловлен материальным уравнением (6.2)]. Речь может идти о начальной задаче, когда известно начальное состояние электромагнитного поля в среде и необходимо исследовать его временное развитие, и граничной задаче, когда определяется пространственное изменение поля в среде при его известном значении на некоторой поверхности. Рассмотрим эти задачи подробнее.

## § 9. Начальная задача

Пусть в пространственно однородной неограниченной среде в начальный момент времени  $t = 0$  внешними источниками создано электромагнитное поле, а в последующие моменты времени ( $t > 0$ ) внешние источники перестали работать. Рассмотрим изменение во времени созданного таким образом электромагнитного поля в среде. Для решения этой задачи недостаточно знания начальных значений полей  $\mathbf{E}(0, \mathbf{r})$  и  $\mathbf{B}(0, \mathbf{r})$ , необходимо также задать начальное значение электрической индукции  $\mathbf{D}(0, \mathbf{r})$ . Это означает, что требуется знание всей предыстории поля  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ , так как согласно соотношению

$$D_i(0, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^0 dt' \int dr' \hat{\epsilon}_{ij}(0 - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') E_j(t', \mathbf{r}') \quad (9.1)$$

величина  $D_i(0, \mathbf{r})$  определяется полем  $E_j(t, \mathbf{r})$  во все моменты времени, предшествующие  $t = 0$ , т. е.  $t' < 0$ . Физическая причина необходимости знания предыстории поля  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  связана с временной (частотной) дисперсией среды, а именно, с инерцией носителей заряда и процессами релаксации.

Таким образом, в начальной задаче электродинамики должны быть заданы  $\mathbf{B}(0, \mathbf{r})$  и  $\mathbf{D}(0, \mathbf{r})$ , или (что то же самое)  $\mathbf{B}(0, \mathbf{r})$  и  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  для всех моментов времени  $t \leq 0$ . Для решения поставленной так начальной

задачи воспользуемся односторонним преобразованием Фурье по времени, поскольку уравнения поля в этом случае справедливы только при  $t \geq 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= \int_{-\infty + i\sigma}^{\infty + i\sigma} d\omega e^{-i\omega t} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}), \quad (\text{Im } \omega = \sigma \geq 0), \\ \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}). \end{aligned} \right\} (9.2)$$

Аналогично преобразуем также электрическую и магнитную индукции  $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$  и  $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ . При этом из уравнений поля (5.5) получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega}{c} \mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) + [\mathbf{k}\mathbf{B}(\omega, \mathbf{k})] &= \frac{i}{c} \mathbf{D}(t=0, \mathbf{k}); \quad \mathbf{k}\mathbf{B}(\omega, \mathbf{k}) = 0, \\ \frac{\omega}{c} \mathbf{B}(\omega, \mathbf{k}) - [\mathbf{k}\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})] &= \frac{i}{c} \mathbf{B}(t=0, \mathbf{k}); \quad \mathbf{k}\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) = 0. \end{aligned} \right\} (9.3)$$

Здесь  $\mathbf{D}(t=0, \mathbf{k})$  и  $\mathbf{B}(t=0, \mathbf{k})$  — Фурье-образы по пространственным координатам от начальных значений  $\mathbf{D}(0, \mathbf{r})$  и  $\mathbf{B}(0, \mathbf{r})$ :

$$\mathbf{B}(t=0, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{B}(t=0, \mathbf{r}).$$

Система уравнений (9.3) при учете материального уравнения (6.8) легко сводится к следующей системе трех неоднородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij} E_j &\equiv \left\{ k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right\} E_j = \frac{i\omega}{c^2} D_i(t=0, \mathbf{k}) + \\ &+ \frac{i}{c} [\mathbf{k}\mathbf{B}(t=0, \mathbf{k})]. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$E_i(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\Lambda_i(\omega, \mathbf{k})}{\Lambda(\omega, \mathbf{k})}, \quad (9.5)$$

где  $\Lambda(\omega, \mathbf{k})$  — определитель системы (9.4):

$$\Lambda(\omega, \mathbf{k}) = \left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right|, \quad (9.6)$$

а  $\Lambda_i(\omega, \mathbf{k})$  — соответствующее алгебраическое дополнение, которое зависит от правой части системы (9.4), т. е. от начальных значений  $\mathbf{D}(0, \mathbf{r})$  и  $\mathbf{B}(0, \mathbf{r})$ .

Подставив решение (9.5) в преобразование Фурье (9.2), получим поле при произвольных начальных условиях.

Для начального возмущения в виде одной Фурье-гармоники с заданным  $\mathbf{k}$  имеем

$$E_i(t, \mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty - i\sigma}^{\infty + i\sigma} d\omega e^{-i\omega t} \frac{\Lambda_i(\omega, \mathbf{k})}{\Lambda(\omega, \mathbf{k})}. \quad (9.7)$$

Приведенный интеграл обычно вычисляют с помощью теории вычетов путем обхода полюсов в плоскости комплексной переменной  $\omega$ . Контур интегрирования, лежащий выше действительной оси ( $\sigma > 0$ ), замыкается окружностью бесконечного радиуса, причем интеграл по замкнутому контуру определяется суммой вычетов подынтегральной функции (9.7) в полюсах, лежащих внутри контура интегрирования. Полюсы подынтегрального выражения определяются нулями определителя (9.6)\*:

$$\Lambda(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (9.8)$$

Пусть корни уравнения (9.8), совпадающего с дисперсионным уравнением (8.4), равны  $\omega_n(\mathbf{k})$ . Тогда получаем следующую зависимость поля от времени:

$$E(t, \mathbf{k}) \sim \sum_n e^{-i\omega_n(\mathbf{k})t}, \quad (9.9)$$

т. е. поле представляется в виде суперпозиции плоских волн с частотами, определяемыми уравнением (9.8).

Корни дисперсионного уравнения  $\omega_n(\mathbf{k})$  являются комплексными величинами, знак мнимой части которых показывает, усиливается или затухает возмущение соответствующих частот ( $\text{Re} \omega_n$ ) во времени. Если для всех корней мнимая часть  $\text{Im} \omega_n(\mathbf{k}) < 0$ , то члены ряда (9.9) уменьшаются во времени. При этом величина  $\delta_n = |\text{Im} \omega_n(\mathbf{k})|$  называется декрементом затухания соответствующего монохроматического возмущения. Ясно, что при этих условиях с течением времени основной вклад в величину поля дает слагаемое, соответствующее возмущению с минимальным декрементом затухания. Если среди корней дисперсионного уравнения есть корень с  $\text{Im} \omega_n(\mathbf{k}) = 0$ , то соответствующий член суммы (9.9) описывает незатухающие собственные колебания среды. Наконец, если среди корней есть хотя бы один корень с  $\text{Im} \omega_s(\mathbf{k}) > 0$ , то колебания данного типа будут нарастать во времени. Это возможно лишь тогда, когда среда находится в неустойчивом состоянии; величину  $\delta_s = \text{Im} \omega_s(\mathbf{k})$  при этом называют инкрементом нарастания колебаний. Следует отметить, что появление корней дисперсионного уравнения с положительной мнимой частью является достаточным условием неустойчивости среды.

---

\* Интегрирование выражения (9.7) при наличии точек ветвления или других особых точек в подынтегральной функции требует особого рассмотрения. Их вклад в (9.7) не приводит к чисто экспоненциальной зависимости поля от времени.

Таким образом, корни дисперсионного уравнения (8.4) определяют временное развитие начальных электромагнитных возмущений в среде, обусловленное свойствами самой среды. В этом, в частности, и состоит важное физическое значение дисперсионного уравнения и тензора диэлектрической проницаемости в линейной электродинамике сплошных сред.

## § 10. Граничная задача

Дисперсионное уравнение (8.4) определяет изменение электромагнитного поля не только во времени, но и в пространстве. В частности, по корням дисперсионного уравнения можно судить о характере проникновения и распространения поля в глубь среды при падении электромагнитной волны на ее границу. С другой стороны, тензор диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ , который фигурирует в дисперсионном уравнении (8.4), строго говоря, можно ввести только для неограниченной и пространственно однородной среды. Однако имеющаяся здесь непоследовательность может оказаться вполне допустимой, когда размеры среды значительно больше длин волн исследуемых колебаний электромагнитного поля. В этом случае дисперсионное уравнение (8.4) будет правильно описывать пространственное изменение электромагнитных волн на расстояниях от границы, значительно превышающих длину волны. На таких расстояниях пространственное изменение поля определяется свойствами самой среды, а не конкретными граничными условиями.

Если в начальной задаче мы искали комплексные решения дисперсионного уравнения  $\omega_n(\mathbf{k})$  при вещественных значениях  $\mathbf{k}$ , то при решении граничной задачи обычно определяют комплексную проекцию  $\mathbf{k}(\omega)$  на заданное направление в предположении, что  $\omega$  и две другие ортогональные проекции  $\mathbf{k}(\omega)$  вещественны. Пространственное изменение поля при этом определяется выражением

$$E(t, \mathbf{r}) \sim \sum_n e^{-i\omega t + i\mathbf{k}_n(\omega)\mathbf{r}}, \quad (10.1)$$

где  $\mathbf{k}_n(\omega)$  удовлетворяет дисперсионному уравнению (8.4).

В общем случае  $\mathbf{k}_n(\omega)$  — комплексные величины. Если  $\text{Im } k_{n\theta}(\omega) > 0$  (здесь  $\theta$  — угол между заданным направлением и вектором  $\mathbf{k}_n(\omega)$ ), то волна будет затухать в данном направлении, в противном случае волна будет нарастать. Однако сделать вывод об устойчивости среды на основании знака  $\text{Im } k_{n\theta}(\omega)$  нельзя. Для этого необходимо строго решать граничную задачу и провести тщательный анализ дисперсионных кривых  $k_{n\theta}(\omega)$ . Вопрос об устойчивости среды значительно проще исследовать исходя из начальной задачи, т. е. решая дисперсионное уравнение (8.4) относительно  $\omega$ . Если известно, что среда устойчива, т. е.  $\text{Im } \omega_n < 0$ , то  $\text{Im } k_{n\theta}(\omega)$  характеризует пространственное затухание данной «моды» колебаний в данном направлении, и, наоборот, для неустойчивой среды  $\text{Im } k_{n\theta}(\omega)$  является характеристикой пространственного усиления волны с заданной частотой.

В общем случае комплексного  $\mathbf{k}(\omega)$  волна вида (10.1), т. е.  $E \sim \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , может быть названа «плоской» лишь условно, так как плоскости постоянной фазы (плоскости, перпендикулярные вектору  $\text{Re } \mathbf{k}(\omega)$ ) в этом случае не совпадают с плоскостями постоянной амплитуды (плоскости, перпендикулярные вектору  $\text{Im } \mathbf{k}(\omega)$ ). Поэтому такие волны называют неоднородными плоскими волнами в отличие от однородных плоских волн, для которых указанные плоскости совпадают.

Если волна слабо затухает, т. е.  $|\text{Im } \mathbf{k}(\omega)| \ll |\text{Re } \mathbf{k}(\omega)|$  (например, в слабопоглощающей прозрачной среде), то с большой степенью точности можно сказать, что фазовая и групповая скорости волны совпадают со скоростями, получающимися при отсутствии поглощения (или затухания). Для непоглощающей прозрачной среды

$$\mathbf{v}_\Phi = \frac{\omega \mathbf{k}}{k^2} \quad (10.2)$$

характеризует скорость распространения уровня постоянной фазы ( $-\omega t + \mathbf{k}\mathbf{r} = \text{const}$ ) и называется фазовой скоростью волны. Величина же

$$\mathbf{v}_{\text{гр}} = d\omega/d\mathbf{k} = \nabla_{\mathbf{k}} \omega \quad (10.3)$$

характеризует скорость перемещения амплитуды (а следовательно, энергии) волны и называется ее групповой скоростью.

В заключение кратко остановимся на затухании (нарастании) волн в слабопоглощающих (усиливающих) средах и связи начальной задачи с граничной для таких сред.

В слабопоглощающих средах антиэрмитовская часть тензора диэлектрической проницаемости, ответственная за поглощение волн [см. (7.8)], малá по сравнению с эрмитовской частью. Это приводит к тому, что в дисперсионном уравнении (8.4) мнимые слагаемые малы по сравнению с вещественными, т. е.  $\text{Im } \Lambda(\omega, \mathbf{k}) \ll \text{Re } \Lambda(\omega, \mathbf{k})$ . Если необходимо знать поведение поля волны во времени (начальная задача), то приближенное решение уравнения (8.4) можно записать в виде\*

$$\omega \rightarrow \omega(\mathbf{k}) + i\delta(\mathbf{k}),$$

где  $\omega(\mathbf{k})$  — вещественные корни уравнения

$$\text{Re } \Lambda(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (10.4)$$

характеризующие спектр частот колебаний, а

$$\delta(\mathbf{k}) = - \frac{\text{Im } \Lambda(\omega, \mathbf{k})}{\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re } \Lambda(\omega, \mathbf{k})} \quad (10.5)$$

— декремент затухания (инкремент нарастания) колебаний.

\* Чтобы не вводить лишних обозначений, мы комплексную и вещественную частоты обозначаем одной и той же буквой  $\omega$ . В тех случаях, когда появляются отдельно  $\text{Re } \omega$  и  $\text{Im } \omega$ , они обозначаются соответственно через  $\omega$  и  $\delta$ . Ниже всюду это записывается также в условном виде  $\omega \approx \omega + i\delta$ .

При  $\delta(\mathbf{k}) > 0$  среда отдает энергию волне, происходит раскачка колебаний. При  $\delta(\mathbf{k}) < 0$  происходит диссипация энергии волны, энергия среды при этом увеличивается.

Для анализа пространственного затухания волны в заданном направлении решаем дисперсионное уравнение (8.4) относительно  $k_\theta(\omega)$ :

$$k_\theta(\omega) = \operatorname{Re} k_\theta(\omega) + i \operatorname{Im} k_\theta(\omega), \quad (10.6)$$

где  $\operatorname{Re} k_\theta(\omega)$  — вещественные корни уравнения (10.4), а величина

$$\operatorname{Im} k_\theta(\omega) = - \frac{\operatorname{Im} \Lambda(\omega, \mathbf{k})}{\frac{\partial}{\partial k_\theta} \operatorname{Re} \Lambda(\omega, \mathbf{k})} \quad (10.7)$$

характеризует затухание (нарастание) волны в пространстве.

Из формул (10.5) и (10.7) легко установить следующую связь между временным и пространственным затуханиями волны:

$$\operatorname{Im} k_\theta = - \frac{\delta(\theta)}{v_{\text{гр}}(\theta)}, \quad \delta(\theta) = -v_{\text{гр}} \operatorname{Im} k_\theta, \quad (10.8)$$

( $v_{\text{гр}}(\theta) = \partial\omega/\partial k_\theta$  — групповая скорость волны в заданном направлении).

Особенно наглядны формулы (10.5)—(10.7) для продольной волны в изотропной среде, когда  $\Lambda(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon^l(\omega, k)$  [см. (8.6)]. Для равновесной изотропной среды  $\operatorname{Im} \varepsilon^l(\omega, k) > 0$  и волны всегда затухают как в пространстве, так и во времени, т. е.  $\delta < 0$  и  $\operatorname{Im} k_\theta > 0$ . Изменение знака  $\operatorname{Im} \varepsilon^l(\omega, k)$  может привести к изменению знаков  $\delta$  и  $\operatorname{Im} k_\theta$ , т. е. к раскачке колебаний, или к неустойчивости среды. Таким образом, снова приходим к выводу, что условие  $\operatorname{Im} \varepsilon^l(\omega, k) < 0$  есть признак неустойчивости среды.

## Задачи к главе II

**Задача 1.** Установить связь между распространенной формой записи уравнений поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_0}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D}_0 = 4\pi\rho_0$$

и материальных уравнений для изотропной и однородной сред

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\mu}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') \mathbf{H}(t', \mathbf{r}'), \quad (2)$$

$$\mathbf{D}_0(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\varepsilon}_0(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') \mathbf{E}(t', \mathbf{r}'),$$

а также используемой нами формой (5.5) и материального уравнения (6.2) (для изотропной и однородной среды).

Решение. Запишем уравнения (1) для полей вида  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ :

$$\frac{i[\mathbf{kB}(\omega, \mathbf{k})]}{\mu(\omega, k)} = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon_0(\omega, k) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0(\omega, \mathbf{k}), \quad \mathbf{kB}(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (3)$$

$$[\mathbf{kB}(\omega, \mathbf{k})] = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}(\omega, \mathbf{k}), \quad i\mathbf{kE}(\omega, \mathbf{k}) \varepsilon_0(\omega, k) = 4\pi\rho_0(\omega, \mathbf{k}), \quad (4)$$

где

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{k}) = \mu(\omega, k) \mathbf{H}(\omega, \mathbf{k}), \quad \mathbf{D}_0(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_0(\omega, k) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}),$$

$$\mu(\omega, k) = \int_0^\infty dt_1 \int d\mathbf{r}_1 \hat{\mu}(t_1, \mathbf{r}_1) e^{i\omega t_1 - i\mathbf{k}\mathbf{r}_1},$$

$$\varepsilon_0(\omega, k) = \int_0^\infty dt_1 \int d\mathbf{r}_1 \hat{\varepsilon}_0(t_1, \mathbf{r}_1) e^{i\omega t_1 - i\mathbf{k}\mathbf{r}_1}.$$

Величину  $\varepsilon_0(\omega, k)$  называют диэлектрической проницаемостью, а  $\mu(\omega, k)$  — магнитной проницаемостью среды.

Для полей такого вида уравнения (5.5) в случае изотропной и однородной среды записываются так:

$$i[\mathbf{kB}(\omega, \mathbf{k})]_i = -\frac{i\omega}{c} \left[ \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{lr} + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l \right] E_j(\omega, \mathbf{k}) + \frac{4\pi}{c} j_{0i}(\omega, \mathbf{k}), \quad (5)$$

$$k_i B_i(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad [\mathbf{kE}(\omega, \mathbf{k})]_i = \frac{\omega}{c} B_i(\omega, \mathbf{k}), \quad ik_j E_j(\omega, \mathbf{k}) \varepsilon^l(\omega, k) = 4\pi\rho_0(\omega, \mathbf{k}).$$

Здесь использовано материальное уравнение (6.8), в котором  $\varepsilon_{ij}(\omega, k)$  определяется формулой (6.12). Из уравнений (3) и (5) следует, что

$$\varepsilon^l(\omega, k) = \varepsilon_0(\omega, k),$$

$$1 - \frac{1}{\mu(\omega, k)} = \frac{\omega^2}{c^2 k^2} [\varepsilon^{lr}(\omega, k) - \varepsilon^l(\omega, k)].$$

Согласно теореме Бора—Ван-Левен, статическая магнитная проницаемость термодинамически равновесной среды в классическом пределе (т. е. при  $\hbar \rightarrow 0$ ) равна единице, т. е.  $\mu(0, k) = 1$ . Это означает, что для термодинамически равновесных сред в классическом пределе (для классических моделей сред) тензор диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij}(\omega, k)$  при  $\omega \rightarrow 0$  не может иметь полюса выше первого порядка.

**Задача 2.** Найти поле статического точечного заряда  $q$ , помещенного в точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  в произвольной анизотропной однородной среде.

Решение. Плотности заряда и тока при этом равны соответственно

$$\rho_0(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad \mathbf{j}_0 = 0. \quad (1)$$

Такой заряд создает потенциальное электрическое поле ( $\text{rot } \mathbf{E} = 0, \mathbf{E} = -\nabla\Phi$ ), причём

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho_0 = 4\pi q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (2)$$

Разлагая все величины в ряд Фурье:

$$A(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} A(\mathbf{k}) \quad (3)$$



и учитывая, что статическому пределу соответствует  $\omega \rightarrow 0$ , получаем

$$ik_i D_i(0, \mathbf{k}) = ik_i \varepsilon_{ij}(0, \mathbf{k}) E_j(0, \mathbf{k}) = k_i k_j \varepsilon_{ij}(0, \mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}) = \\ = 4\pi\rho_0(\mathbf{k}) = \frac{4\pi q}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0}. \quad (4)$$

Отсюда

$$\Phi(\mathbf{k}) = \frac{4\pi q}{(2\pi)^3} \cdot \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0}}{k_i k_j \varepsilon_{ij}(0, \mathbf{k})} \quad (5)$$

и окончательно имеем

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi^2} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}}{k_i k_j \varepsilon_{ij}(0, \mathbf{k})}. \quad (6)$$

В случае изотропной среды, когда тензор  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  имеет вид (6.12),  $k_i k_j \varepsilon_{ij}(0, \mathbf{k}) = k^2 \varepsilon^l(0, \mathbf{k})$ , т. е. статическое поле заряда в изотропной среде определяется продольной диэлектрической проницаемостью.

В вакууме  $\varepsilon_{ij}(0, \mathbf{k}) = \delta_{ij}$  и из (6) получаем кулоновский потенциал

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi^2} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}}{k^2} = \frac{q}{R}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ .

Если в среде  $k_i k_j \varepsilon_{ij}(0, \mathbf{k}) = k^2 + \frac{1}{r_{\text{экп}}^2}$ , то потенциал экранированный

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{R} e^{-R/r_{\text{экп}}}, \quad (8)$$

$r_{\text{экп}}$  — радиус экранирования.

Для электронно-ионной плазмы  $r_{\text{экп}} = r_D$  (см. задачу 2, гл. I).

Если же в среде  $k_i k_j \varepsilon_{ij}(0, \mathbf{k}) = k^2 - k_0^2$ , то

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{R} \cos k_0 R, \quad (9)$$

т. е. поле заряда в такой среде носит периодический характер (ниже на примере плазмы показывается, что это является признаком неустойчивости среды).

**Задача 3.** Найти магнитное поле, создаваемое линейным стационарным током в изотропной и однородной среде.

Решение. Совмещая ось  $OZ$  с направлением тока, имеем

$$\mathbf{j}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z j_0 \delta(x) \delta(y), \quad \rho_0 = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{e}_z$  — единичный орт по оси  $OZ$ .

Разлагая все величины в ряд Фурье:

$$A(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} A(\mathbf{k})$$

и представив для удобства  $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ , из уравнений поля

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{kB}]_i + \frac{\omega}{c} \left\{ \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^l r + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l \right\} E_j = -\frac{4\pi i}{c} j_{0i}, \\ (\mathbf{kB}) = 0, \quad [\mathbf{kE}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \quad \varepsilon^l(\mathbf{kE}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

находим

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi i}{c} \lim_{\omega \rightarrow 0} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} [\mathbf{k}\mathbf{j}_0(\mathbf{k})]}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k})}. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{j}_0(\mathbf{k})$  — Фурье-образ плотности тока  $\mathbf{j}_0(\mathbf{r})$ , т. е.

$$\mathbf{j}_0(\mathbf{k}) = \frac{j_0 \mathbf{e}_z}{(2\pi)^2} \delta(k_z).$$

В вакууме  $\varepsilon^{tr} = 1$  и из (3) получаем

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{2j_0}{cr} \mathbf{e}_\varphi, \quad (4)$$

где  $\mathbf{e}_\varphi$  — единичный орт в азимутальном направлении.

Выражение (4) справедливо для любой среды, в которой

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (5)$$

Такое положение имеет место для классических сред, находящихся в состоянии термодинамического равновесия (см. задачу 1, гл. II). Нарушение условия (5) является признаком неравновесности среды.

**Задача 4.** Вычислить потери энергии быстрой заряженной частицы, движущейся в изотропной и однородной среде.

**Решение.** Плотности заряда и тока равны

$$\rho_0 = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \quad \mathbf{j}_0 = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость движения заряда  $q$ .

Разлагая все величины в ряд Фурье:

$$A(t, \mathbf{r}) = \int d\omega \int d\mathbf{k} A(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (2)$$

запишем уравнения поля

$$\left\{ k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right\} E_j(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{0i}(\omega, \mathbf{k}), \quad (3)$$

где

$$\mathbf{j}_0(\omega, \mathbf{k}) = \frac{q\mathbf{v}}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (4)$$

В изотропной среде уравнения (3) принимают вид

$$\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^l \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E})}{k^2} - \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr} \right) \left[ \mathbf{E} - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E})}{k^2} \right] = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} \mathbf{j}_0(\omega, \mathbf{k}). \quad (5)$$

Умножив это уравнение скалярно на  $\mathbf{k}$ , получаем

$$\mathbf{k}\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{4\pi i}{\omega \varepsilon^l} \mathbf{k}\mathbf{j}_0(\omega, \mathbf{k}). \quad (6)$$

Используя это выражение, из (5) находим

$$E_i(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{4\pi i \omega}{k^2} \left\{ \frac{k_i k_j}{\omega^2 \varepsilon^l} - \frac{k^2 \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right)}{c^2 \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr} \right)} \right\} j_{0j}(\omega, \mathbf{k}), \quad (7)$$

$$E(t, \mathbf{r}) = -\frac{4\pi iq}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\mathbf{k}\mathbf{v}t)}{k^2} \left\{ \frac{\mathbf{k}}{\varepsilon^l(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})} - \frac{k^2(\mathbf{k}\mathbf{v})}{c^2} \left( \mathbf{v} - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{v})}{k^2} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[ k^2 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k}) \right]^{-1} \right\}. \quad (8)$$

Здесь при интегрировании по  $\omega$  использовано соотношение (4).

Потери энергии движущейся частицы, очевидно, определяются работой, производимой силой торможения, действующей на частицу со стороны создаваемого ею электромагнитного поля, т. е. работой силы Лоренца. Работа этой силы, определяемой (5.3), на единицу длины пути в среде равна

$$W = \frac{\mathbf{v}\mathbf{F}}{v} = \frac{q(\mathbf{v}\mathbf{E})}{v}. \quad (9)$$

Поле  $E(t, \mathbf{r})$  при этом вычисляется в точке нахождения заряда  $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$ . Подставляя (8) в (9), получаем

$$W = \frac{iq^2}{2\pi^2 v} \int d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{k^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^l(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})} - \frac{k^2 \left( v^2 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{k^2} \right)}{c^2 \left[ k^2 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k}) \right]} \right\}. \quad (10)$$

Это выражение можно записать в виде суммы

$$W = W^l + W^{tr}, \quad (11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} W^l &= -\frac{2q^2}{\pi v^2} \int_0^\infty \omega d\omega \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{\xi^2 + \frac{\omega^2}{v^2}} \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon^l\left(\omega, \sqrt{\xi^2 + \frac{\omega^2}{v^2}}\right)}, \\ W^{tr} &= -\frac{2q^2}{\pi v^2} \int_0^\infty \omega d\omega \int_0^\infty \frac{\xi^3 d\xi}{\xi^2 + \frac{\omega^2}{v^2}} \operatorname{Im} \frac{1}{\xi^2 + \omega^2 \left[ \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon^{tr}\left(\omega, \sqrt{\xi^2 + \frac{\omega^2}{v^2}}\right) \right]} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Здесь введены обозначения  $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ ,  $\xi^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}$  и учтены соотношения (6.15).

Следует отметить, что вклад в интегралы (12) дают не только области  $\omega$  и  $k = \sqrt{\xi^2 + \omega^2/v^2}$ , в которых  $\operatorname{Im} \varepsilon^l(\omega, k)$  и  $\operatorname{Im} \varepsilon^{tr}(\omega, k)$  отличны от нуля и происходит существенное поглощение поля, создаваемого зарядом, но и области, в ко-

торых мнимые части  $\varepsilon^l$  и  $\varepsilon^{tr}$  пренебрежимо малы, но  $\operatorname{Re} \varepsilon^l$  и  $\operatorname{Re} \left[ \xi^2 + \omega^2 \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon^{tr} \right) \right]$  могут обращаться в нуль, а подынтегральные выражения имеют полюсы.

В этих областях происходит возбуждение продольных и поперечных электромагнитных волн движущимся зарядом. Для термодинамически равновесных сред, в которых  $\operatorname{Im} \varepsilon^l > 0$  и  $\operatorname{Im} \varepsilon^{tr} > 0$ , эту часть потерь энергии быстрой частицы можно записать в виде

$$\Delta W^l = \frac{2q^2}{v^2} \int_0^\infty \omega d\omega \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{\xi^2 + \omega^2/v^2} \delta \left[ \varepsilon^l(\omega, \sqrt{\xi^2 + \omega^2/v^2}) \right],$$

$$\Delta W^{tr} = \frac{2q^2}{v^2} \int_0^\infty \omega d\omega \int_0^\infty \frac{\xi^3 d\xi}{\xi^2 + \omega^2/v^2} \delta \left[ \xi^2 + \omega^2 \left( \frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon^{tr}(\omega, \sqrt{\xi^2 + \omega^2/v^2})}{c^2} \right) \right]. \quad (13)$$

Здесь учтено известное соотношение

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \operatorname{Im} \frac{1}{x + i\delta} = -i\pi\delta(x).$$

Таким образом, величины  $\Delta W^l$  и  $\Delta W^{tr}$  представляют собой потери энергии быстрой частицы на возбуждение в среде продольных и поперечных электромагнитных волн. Часто эти величины называют также поляризационными и черенковскими потерями соответственно.

### Глава III

## УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ПЛАЗМЫ

### § 11. Простейшие модели плазмы

В процессе развития представления о плазме как о газе заряженных частиц менялись и методы ее количественного описания. Самые первые и наиболее простые модели количественного описания представляют плазму как систему не взаимодействующих между собой заряженных частиц, свободно движущихся во внешних полях. При этом, если плазма состоит из  $N_\alpha$  частиц сорта  $\alpha$ , которые находятся в беспорядочном тепловом движении, необходимо решить  $\sum_\alpha N_\alpha$  уравнений движения с заданием такого же числа начальных условий, т. е. координат и скоростей частиц. Естественно, что невозможность решения столь большого числа уравнений и точного задания начальных условий делает эту задачу невыполнимой. Существенное упрощение достигается только в случае пренебрежения тепловым разбросом скоростей частиц, т. е. при рассмотрении движения так называемой средней частицы, которая находится в покое в отсутствие внешних сил. Термин «средняя частица» имеет тот смысл, что величина вектора скорости беспорядочного теплового движения, усредненная по всем частицам плазмы, равна нулю. Подобная простая модель независимых частиц полностью пренебрегает не только взаимодействием между частицами, но также тепловым разбросом скоростей частиц.

Для нахождения скорости заряженной частицы плазмы в модели независимых частиц решают уравнения движения частицы сорта  $\alpha$ ,

которые записываются в виде

$$\frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt} = \mathbf{V}_\alpha, \quad \frac{d\mathbf{p}_\alpha}{dt} = e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_\alpha \mathbf{B}] \right\} + \mathbf{g} m_\alpha, \quad (11.1)$$

где  $\mathbf{p}_\alpha = \frac{m\mathbf{V}_\alpha}{\sqrt{1 - \mathbf{V}_\alpha^2/c^2}}$  — импульс частицы сорта  $\alpha$ , а  $\mathbf{g}$  — ускоре-

ние, вызываемое неэлектромагнитными силами.

Такой силой может быть, например, гравитационная сила (поле тяжести). В плазменных задачах, однако, этой силой, как правило, можно пренебречь. Наличие поля  $\mathbf{g}$ , аналогичного в известном смысле полю тяжести, может быть обусловлено в плазме кривизной силовых линий магнитного поля. В результате свободного теплового движения частиц вдоль силовых линий магнитного поля с отличной от нуля кривизной возникает центробежная сила поперек магнитного поля с эквивалентным полем  $\mathbf{g} \approx v_{T\alpha}^2/R_0$  ( $v_{T\alpha}$  — средняя тепловая скорость частиц;  $R_0$  — радиус кривизны силовых линий магнитного поля).

Поле  $\mathbf{g}$  может быть обусловлено также столкновениями заряженных частиц данного сорта с другими частицами. Ясно, что возникающую вследствие столкновений силу можно интерпретировать как силу трения

$$\mathbf{g} = -\nu_{\alpha\beta}(\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta),$$

где  $\nu_{\alpha\beta}$  — эффективная частота столкновений заряженных частиц сорта  $\alpha$  с частицами сорта  $\beta$ , когда  $\alpha \neq \beta$ .

В уравнениях (11.1) магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  и электрическое поле  $\mathbf{E}$  считать заданными, строго говоря, нельзя, поскольку они включают в себя индуцированные в плазме поля, обусловленные движением заряженных частиц. Поэтому необходимо решать самосогласованную задачу, т. е. уравнения (11.1) решать совместно с уравнениями поля (5.1), в которых плотности индуцированного заряда и тока равны:

$$\rho = \sum_\alpha N_\alpha e_\alpha, \quad \mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha N_\alpha \mathbf{V}_\alpha. \quad (11.2)$$

Здесь  $\mathbf{V}_\alpha$  удовлетворяет (11.1), а  $N_\alpha$  в силу уравнения непрерывности (5.2) в модели независимых частиц — уравнению

$$\partial N_\alpha / \partial t + \operatorname{div} N_\alpha \mathbf{V}_\alpha = 0. \quad (11.3)$$

Модель независимых частиц, как отмечалось, не учитывает теплового движения и корреляцию движения частиц, поэтому применимость ее для описания плазмы ограничена. В частности, модель независимых частиц может быть применима только к сильно разреженной плазме, в которой движения частиц практически не коррелированы.

В обратном предельном случае плотной плазмы, когда движения различных частиц настолько сильно коррелированы между собой, что плазму в целом можно рассматривать как нейтральную проводящую жидкость, используют гидродинамическую модель. В этой модели не делается различий между электронной, ионной и нейтральной компонентами; они ведут себя как единое целое, образуя

сплошную среду. Для описания движения такой среды используют самосогласованную систему уравнений магнитной гидродинамики:

$$\left. \begin{aligned} \rho_M \frac{d\mathbf{V}_M}{dt} &= \rho_M \left[ \frac{\partial \mathbf{V}_M}{\partial t} + (\mathbf{V}_M \nabla) \mathbf{V}_M \right] = -\nabla p + \\ &+ \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B}\mathbf{B}] + \eta \Delta \mathbf{V}_M + \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div } \mathbf{V}_M, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \text{rot } [\mathbf{V}_M \mathbf{B}] - \frac{c^2}{4\pi} \text{rot} \left( \frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{B} \right), \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

где  $\rho_M$  — плотность проводящей жидкости (плазмы) с проводимостью  $\sigma$ ;  $\mathbf{V}_M$  — скорость плазмы;  $\xi$  и  $\eta$  — коэффициенты вязкости.

Эта система должна быть дополнена уравнением состояния и уравнением переноса тепла:

$$\left. \begin{aligned} p &= p(\rho_M, T), \\ \rho_M T \left[ \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{V}_M \nabla) s \right] &= \tilde{\sigma}_{ij} \frac{\partial V_{Mi}}{\partial r_j} + \text{div}(\chi \nabla T) + \frac{c^2 I}{(4\pi)^2 \sigma} (\text{rot } \mathbf{B})^2, \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

где  $s(\rho_M, T)$  — энтропия единицы массы плазмы,  $\chi$  — теплопроводность, а  $\tilde{\sigma}_{ij}$  — вязкий тензор напряжений:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \eta \left( \frac{\partial V_{Mi}}{\partial r_j} + \frac{\partial V_{Mj}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \text{div } \mathbf{V}_M \right) + \xi \delta_{ij} \text{div } \mathbf{V}_M. \quad (11.6)$$

В магнитной гидродинамике проводимость  $\sigma$  и теплопроводность  $\chi$  плазмы, а также коэффициенты вязкости  $\xi$  и  $\eta$  считают заданными (их вычисление выходит за рамки магнитной гидродинамики). Что касается уравнения состояния  $p(\rho_M, T)$  и выражения для энтропии  $s(\rho_M, T)$ , то в случае полностью ионизованной электронно-ионной идеальной плазмы они даются формулами

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{(1+Z) \rho_M \kappa T}{M}, \\ s &= \frac{3}{2} \frac{1+Z}{M} \ln \frac{p}{\rho_M^{5/3}}, \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

где  $Z$  — зарядовое число (отношение заряда иона к заряду электрона);  $M$  — масса ионов плазмы.

Магнитная гидродинамика, кроме того, что содержит ряд феноменологических величин — коэффициентов переноса  $\sigma$ ,  $\chi$ ,  $\xi$  и  $\eta$ , которые требуют независимого определения, к реальной плазме (как газовой, так и твердотельной) вряд ли применима. Она, так же как модель независимых частиц, не учитывает теплового движения частиц плазмы и считает их движение настолько сильно коррелирован-

ным, что пренебрегает различием между отдельными компонентами плазмы. В связи с этим в литературе часто используются различные модифицированные гидродинамические уравнения, называемые также квазигидродинамикой. Это двухжидкостные (для электронной и ионной жидкостей) или трехжидкостные (для электронной, ионной и нейтральной жидкостей) модели, феноменологически учитывающие взаимодействие частиц и их тепловое движение.

Подобные простые модели являются приближенными и для своего обоснования требуют использования более общей модели плазмы как ионизованного газа. Наиболее общей моделью является кинетическое описание плазмы, основанное на статистических представлениях о плазме как о системе большого числа частиц. В дальнейшем будем пользоваться в основном общей моделью плазмы и лишь в отдельных случаях — упрощенными гидродинамическими уравнениями, обосновывая предварительно законность такого приближения.

## § 12. Кинетическое уравнение с самосогласованным полем

В кинетической теории газов используется статистическое (вероятностное) описание системы частиц. При этом вводится функция распределения, характеризующая вероятность нахождения частицы в определенном состоянии в заданный момент времени  $t$  в заданной точке пространства  $\mathbf{r}$ . Если состояние частицы сорта  $\alpha$  характеризуется импульсом  $\mathbf{p}_\alpha$  и ее энергия однозначно определяется этим импульсом  $\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{p})$ , то функция распределения является функцией координат  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{r}$  и  $t$ , т. е.  $f_\alpha = f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ . Величина  $f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{p} d\mathbf{r}$  представляет число частиц сорта  $\alpha$  в момент времени  $t$  в фазовом интервале  $d\mathbf{p} d\mathbf{r}$ , а плотность частиц в точке  $\mathbf{r}$ ,  $t$  дается выражением

$$\int d\mathbf{p} f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = N_\alpha(\mathbf{r}, t). \quad (12.1)$$

Часто это соотношение называют условием нормировки функции распределения.

Зная функцию распределения, можно найти среднее значение любой физической величины, например среднюю скорость и среднюю энергию частиц сорта  $\alpha$ :

$$\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{\int f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) \mathbf{v} d\mathbf{p}}{N_\alpha(\mathbf{r}, t)}, \quad (12.2)$$

$$\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{\int \mathcal{E}(\mathbf{p}) f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{p}}{N_\alpha(\mathbf{r}, t)}.$$

Для отыскания функции распределения применяют кинетическое уравнение. Для сильно разреженного газа в первом приближении взаимодействием между частицами можно пренебречь, считая их пол-

ностью независимыми. В этом приближении изменение распределения частиц в объеме фазового пространства около точки  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{r}$  возникает только вследствие втекания и вытекания частиц через поверхность, ограничивающую такой объем. Если в объеме не происходит рождения и гибели частиц, то функция  $f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$  не меняется во времени, следовательно,

$$\frac{df_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \cdot \frac{d\mathbf{p}_\alpha}{dt} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \cdot \frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt} = 0. \quad (12.3)$$

Это уравнение называют уравнением Лиувилля или уравнением непрерывности для функции распределения частиц сорта  $\alpha$ .

Замечая далее, что согласно уравнениям движения частиц

$$d\mathbf{p}_\alpha/dt = \mathbf{F}_\alpha, \quad d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}, \quad (12.4)$$

кинетическое уравнение (12.3) можно переписать в виде

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} = 0. \quad (12.5)$$

Величина  $\mathbf{F}_\alpha$  представляет собой силу, действующую на частицу сорта  $\alpha$ .

В случае заряженных частиц сила  $\mathbf{F}_\alpha$  определяется формулой Лоренца

$$\mathbf{F}_\alpha = e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\}, \quad (12.6)$$

поэтому кинетическое уравнение (12.5) для заряженных частиц сорта  $\alpha$  запишется следующим образом:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} = 0. \quad (12.7)$$

Здесь  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  — электрическое и магнитное поля в точке нахождения частицы.

При получении уравнения (12.6) предполагалось, что эти поля заданы. В действительности они определяются из уравнений поля (5.1), в которых в качестве  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  фигурируют выражения

$$\rho = \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{p}, \quad (12.8)$$

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{p}.$$

Суммирование в этих выражениях распространяется по всем сортам заряженных частиц в газе.

Ясно, что введенные таким образом поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  являются самосогласованными, поскольку из уравнения (12.7) получается такое



распределение частиц  $f_\alpha$ , которое вызывает появление электромагнитных полей, поддерживающих это распределение. Поэтому уравнение (12.7) называют кинетическим уравнением с самосогласованным полем или уравнением Власова.

### § 13. Кинетическое уравнение Больцмана

В предыдущем параграфе при выводе кинетических уравнений мы полностью пренебрегли взаимодействием частиц между собой, считая их свободными. Другими словами, ограничились рассмотрением изменения функции распределения в нулевом приближении по параметру взаимодействия  $\eta$ , представляющему собой отношение средней потенциальной энергии взаимодействия частиц к кинетической энергии их свободного движения. Учет взаимной корреляции в движении частиц приводит к появлению отличной от нуля правой части уравнения (12.5):

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} = \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}, \quad (13.1)$$

которая называется интегралом столкновений. Интеграл столкновений описывает изменение функции распределения вследствие столкновений частиц. При этом в первом порядке по параметру взаимодействия  $\eta$  учитываются лишь парные столкновения частиц; слагаемые более высокого порядка учитывают тройные, четверные и т. д. столкновения. В газах благодаря малости параметра  $\eta$  достаточно ограничиться учетом лишь парных столкновений частиц, записав интеграл столкновений в виде суммы

$$\left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st} = \sum_\beta \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta}, \quad (13.2)$$

в которой отдельные члены описывают столкновения частиц данного сорта  $\alpha$  с частицами сорта  $\beta$ . Кроме того, далее ограничимся рассмотрением лишь упругих столкновений, не вызывающих изменения структуры частиц. Вообще же в плазме возможны также неупругие столкновения, приводящие к возбуждению и ионизации частиц. Однако в линейных электродинамических процессах определяющую роль играют именно упругие столкновения.

Пусть  $\mathbf{p}_\alpha$ ,  $\mathbf{p}_\beta$  и  $\mathbf{p}'_\alpha$ ,  $\mathbf{p}'_\beta$  — соответственно импульсы сталкивающихся частиц  $\alpha$  и  $\beta$  до и после столкновений (рис. 3), а  $W(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta; \mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}'_\beta)$  — вероятность упругого рассеяния  $\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta \rightleftharpoons \mathbf{p}'_\alpha + \mathbf{p}'_\beta$ . Тогда изменение функции распределения частиц сорта  $\alpha$  в результате столкновений с частицами сорта  $\beta$  можно записать в виде

$$\left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} = - \int d\mathbf{p}'_\beta d\mathbf{p}'_\alpha d\mathbf{p}'_\beta W(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta; \mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}'_\beta) [f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha) f_\beta(\mathbf{p}_\beta) - f_\alpha(\mathbf{p}'_\alpha) f_\beta(\mathbf{p}'_\beta)]. \quad (13.3)$$

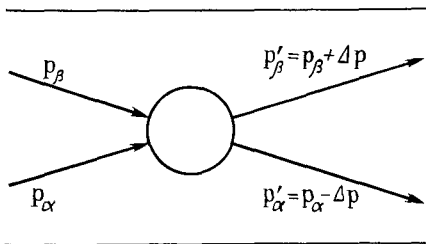


Рис. 3

Это выражение с учетом законов сохранения импульса и энергии сталкивающихся частиц известно как интеграл упругих столкновений Больцмана. Задача теории интегралов столкновений состоит в вычислении вероятности рассеяния  $W(p_\alpha, p_\beta; p'_\alpha, p'_\beta)$ . Будем вычислять эту вероятность квантовомеханическим способом, так

как он обладает большей наглядностью, чем классический. Предположим, что потенциальная энергия взаимодействия двух частиц в газе есть функция лишь мгновенного расстояния между ними:

$$U(|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|) = \int d\mathbf{k} U(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)} \quad (13.4)$$

$$U(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r} U(|\mathbf{r}|) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

Здесь  $U(\mathbf{k})$  — Фурье-образ потенциала взаимодействия  $U(\mathbf{r})$ , который зависит только от величины вектора  $\mathbf{k}$ .

Вычисление вероятности рассеяния двух частиц в условиях, когда энергия их взаимодействия мала по сравнению с кинетической энергией, согласно квантовой механике, сводится к вычислению матричного элемента взаимодействия по невозмущенным состояниям в начале и в конце процесса, т. е. по волновым функциям начального и конечного состояний. Такое приближение называется борновским приближением теории возмущений, причем оно справедливо, если  $|U|r_0 \ll \ll \hbar v$  ( $r_0$  — радиус действия потенциала  $U(r)$ , а  $v$  — скорость рассеиваемой частицы). В борновском приближении

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \left| U_{\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta; \mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}'_\beta} \right|^2, \quad (13.5)$$

где  $U_{\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta; \mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}'_\beta}$  — матричный элемент потенциала взаимодействия по волновым функциям свободных частиц с импульсами  $\mathbf{p}_\alpha$  и  $\mathbf{p}_\beta$  в начальном состоянии (до рассеяния) и  $\mathbf{p}'_\alpha$  и  $\mathbf{p}'_\beta$  — в конечном состоянии (после рассеяния).

Согласно квантовой механике, волновая функция нерелятивистской свободной частицы с импульсом  $\mathbf{p}$  и энергией  $\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m}$  в однородной среде имеет вид плоской волны

$$\Psi_p = A \exp\left(-i \frac{\mathcal{E}}{\hbar} t + i \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{\hbar}\right), \quad (13.6)$$

где  $A = (2\pi\hbar)^{-3}$  — постоянная нормировки (напомним, что волновая

функция свободной частицы нормируется на  $\delta$ -функцию). Учитывая (13.4), для матричного элемента рассеяния имеем

$$U_{\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta; \mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}_\beta} = \int d\mathbf{k} U(\mathbf{k}) \langle \mathbf{p}'_\alpha | e^{i\mathbf{k}r_\alpha} | \mathbf{p}_\alpha \rangle \langle \mathbf{p}'_\beta | e^{-i\mathbf{k}r_\beta} | \mathbf{p}_\beta \rangle. \quad (13.7)$$

Здесь  $\langle \mathbf{p}'_\alpha | e^{i\mathbf{k}r_\alpha} | \mathbf{p}_\alpha \rangle$  означает матричный элемент оператора  $e^{i\mathbf{k}r_\alpha}$  по волновым функциям начального и конечного состояний одной частицы сорта  $\alpha$ , т. е. по функциям (13.6). При вычислении этого матричного элемента следует учитывать, что частицы свободно движутся в плазме, поэтому в момент времени  $t$ , для которого проводятся вычисления, положение частицы определяется соотношением  $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_{\alpha 0} + \mathbf{v}_\alpha t$ . Учитывая это, получаем

$$\langle \mathbf{p}'_\alpha | e^{i\mathbf{k}r_\alpha} | \mathbf{p}_\alpha \rangle = \delta(\mathbf{p}'_\alpha - \mathbf{p}_\alpha + \hbar\mathbf{k}) \delta\left(\frac{p'_\alpha{}^2}{2m_\alpha} - \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + \hbar\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha\right). \quad (13.8)$$

Аналогично вычисляется и матричный элемент  $\langle \mathbf{p}'_\beta | e^{-i\mathbf{k}r_\beta} | \mathbf{p}_\beta \rangle$ . Используемое приближение, как легко понять, представляет собой известное борновское приближение в теории рассеяния. Нетрудно видеть, что соотношение (13.8) учитывает законы сохранения импульса и энергии при рассеянии: частица сорта  $\alpha$  с импульсом  $\mathbf{p}_\alpha$  излучает «квант взаимодействия» и переходит в состояние с импульсом  $\mathbf{p}'_\alpha = \mathbf{p}_\alpha - \hbar\mathbf{k}$  (см. рис. 3); этот квант поглощается частицей сорта  $\beta$  с импульсом  $\mathbf{p}_\beta$ , которая переходит в состояние с импульсом  $\mathbf{p}'_\beta = \mathbf{p}_\beta + \hbar\mathbf{k}$ . Таким образом, импульс «кванта взаимодействия» равен  $\Delta\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ , а энергия  $\hbar\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha = \hbar\mathbf{k}\mathbf{v}_\beta$ .

Подставляя (13.7) и (13.5) в (13.3), после несложных преобразований окончательно получаем выражение

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{st}^{\alpha\beta} = \frac{2\pi}{\hbar} \int d\mathbf{p}_\beta \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |U(\mathbf{k})|^2 \delta\left[\frac{(\mathbf{p}_\alpha - \hbar\mathbf{k})^2}{2m_\alpha} + \frac{(\mathbf{p}_\beta^2 + \hbar\mathbf{k})^2}{2m_\beta} - \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} - \frac{p_\beta^2}{2m_\beta}\right] [f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha) f_\beta(\mathbf{p}_\beta) - f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha - \hbar\mathbf{k}) f_\beta(\mathbf{p}_\beta + \hbar\mathbf{k})], \quad (13.9)$$

в котором законы сохранения импульса и энергии учтены.

Выражение (13.9) в рамках применимости борновского приближения является общим, так как получено без каких-либо ограничений закона взаимодействия частиц (кроме малости энергии взаимодействия по сравнению с кинетической энергией частиц). Упростим это выражение путем перехода к классическому пределу  $\hbar\mathbf{k} \ll \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta$ , т. е. в предположении малости передаваемого при рассеянии импульса «кванта взаимодействия». Это предположение, кстати, находится в соответствии с предположением малости энергии взаимодействия частиц — в результате такого взаимодействия изменение импульса должно быть малым. Разлагая подынтегральное выражение (13.9) по степеням  $\hbar\mathbf{k}$  и учитывая, что  $U(\mathbf{k})$  зависит лишь от модуля вектора  $\mathbf{k}$ , получаем

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{st}^{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}} \int d\mathbf{p}_\beta I_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta) \left[ \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_{\alpha j}} f_\beta - f_\alpha \frac{\partial f_\beta}{\partial p_{\beta j}} \right], \quad (13.10)$$

где

$$\begin{aligned} I_{ij}^{\alpha\beta} &= \pi \int d\mathbf{k} (2\pi)^3 |U(\mathbf{k})|^2 \delta(\mathbf{k}\mathbf{u}) k_i k_j = \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{u^2 \delta_{ij} - u_i u_j}{u^2} \int (2\pi)^3 k^2 dk |U(\mathbf{k})|^2 \delta(\mathbf{k}\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (13.11)$$

а  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$  — относительная скорость сталкивающихся частиц.

Используя далее выражения (13.10) и (13.11), кинетическое уравнение (13.1) для функции распределения частиц сорта  $\alpha$  с учетом ближних столкновений со всеми частицами сорта  $\beta$  (где  $\beta$ , в частности, может совпадать с  $\alpha$ ) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} &= \sum_\beta \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} = \\ &= \frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}} \left( D_{ij} \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_{\alpha j}} - A_i f_\alpha \right), \end{aligned} \quad (13.12)$$

где

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \sum_\beta \int d\mathbf{p}_\beta I_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta) f_\beta(\mathbf{p}_\beta), \\ A_i &= \sum_\beta \int d\mathbf{p}_\beta I_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta) \frac{\partial f_\beta}{\partial p_{\beta j}} \end{aligned} \quad (13.13)$$

— соответственно коэффициенты диффузии и трения в пространстве скоростей.

Приведенное кинетическое уравнение часто называют также уравнением Фоккера — Планка.

Полученные интеграл столкновений (13.10) и кинетическое уравнение (13.12) пригодны при оговоренных условиях для любого газа, поскольку в них не конкретизирован закон взаимодействия частиц  $U(\mathbf{r})$  (или  $U(\mathbf{k})$ ). В частности, ими можно пользоваться для плазмы с любой степенью ионизации, если известны законы парного взаимодействия частиц между собой.

#### § 14. Интеграл столкновений заряженных частиц

Воспользуемся теперь полученными общими соотношениями для полностью ионизованной плазмы, в которой существенны лишь столкновения заряженных частиц между собой. Чтобы найти энергию взаимодействия двух заряженных частиц в плазме, вычислим потенциал, создаваемый заряженной частицей сорта  $\alpha$ , движущейся равномерно со скоростью  $\mathbf{v}_\alpha$ , т. е.  $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_{0\alpha} + \mathbf{v}_\alpha t$ . Для нахождения потенциала поля заряда будем исходить из уравнения Пуассона:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi e_\alpha \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0\alpha} - \mathbf{v}_\alpha t). \quad (14.1)$$

Переходя к Фурье-представлению по пространственным переменным и используя материальное уравнение (6.8) для потенциала поля ( $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ ), создаваемого движущейся частицей, получаем

$$\Phi(|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}|) = \frac{4\pi e_\alpha}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r})}}{k_i k_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{k})}. \quad (14.2)$$

Здесь  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{k})$  — тензор диэлектрической проницаемости плазмы.

Очевидно, что искомая энергия взаимодействия частиц сортов  $\alpha$  и  $\beta$  будет равна

$$U(\mathbf{r}) = e_\beta \Phi_\alpha = \frac{4\pi e_\alpha e_\beta}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k_i k_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{k})}. \quad (14.3)$$

Отсюда для Фурье-образа потенциала взаимодействия имеем

$$U(\mathbf{k}) = \frac{e_\alpha e_\beta}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{k_i k_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{k})}. \quad (14.4)$$

Подставляя (14.4) в (13.11), в случае полностью ионизованной плазмы получаем

$$I_{ij}^{\alpha\beta} = \pi \left( \frac{e_\alpha e_\beta}{2\pi^2} \right)^2 \int d\mathbf{k} (2\pi)^3 \frac{k_i k_j \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{k}\mathbf{v}_\beta)}{|k_i k_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{k})|^2}. \quad (14.5)$$

Если в выражении (14.5) положить  $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}$ , (т. е. взаимодействие частиц в плазме отождествить с взаимодействием в вакууме) и устранить расходимость, «обрезая» интегрирование на нижнем ( $k > k_{\min}$ ) и верхнем ( $k < k_{\max}$ ) пределах, то получим известную формулу Ландау:

$$I_{ij}^{\alpha\beta} = 2\pi e_\alpha^2 e_\beta^2 L \frac{u^2 \delta_{ij} - u_i u_j}{u^3}, \quad (14.6)$$

где  $L = \ln |k_{\max}/k_{\min}|$  — так называемый кулоновский логарифм, введенный Ландау.

Такое «обрезание» на нижнем пределе по  $k$  соответствует предположению, что взаимодействие между частицами плазмы является чисто кулоновским лишь на малых расстояниях  $r \leq r_{\max} = 1/k_{\min}$ ; на расстояниях  $r > r_{\max}$  взаимодействие экранируется вследствие поляризации плазмы, причем в термодинамически равновесной плазме радиус экранирования совпадает с дебаевским радиусом, т. е.

$$r_{\max} = r_D \approx \sqrt{\frac{\kappa T}{8\pi e^2 N}}. \text{ «Обрезание» же на верхнем пределе по } k$$

соответствует тому обстоятельству, что при очень малых расстояниях, когда  $r < r_{\min} = 1/k_{\max}$ , энергия кулоновского взаимодействия частиц становится больше их кинетической энергии свободного движения и нарушается условие применимости теории возмущений. Поэтому  $r_{\min}$  следует определить из соотношения  $e^2/r_{\min} \approx T$ . Таким образом,

$L \approx \ln \left( 200 \frac{T}{N^{1/3}} \right)$ , и в широких пределах изменения параметров плазмы  $L \approx 10 \div 20$ .

В дальнейшем эту величину будем считать постоянной\*.

Следует отметить, что формула (14.5) автоматически учитывает дебаевское «обрезание» взаимодействия частиц на больших расстояниях, обусловленное поляризацией плазмы, и тем самым обосновывает формулу Ландау (14.6). На малых же расстояниях (больших  $k$ ) эта формула не содержит расходимости. Строго классическое обоснование «обрезания» на малых расстояниях  $r < r_{\min} \approx e^2/T$  является следствием учета тройных столкновений частиц в плазме. В квантовом рассмотрении, однако, появляется еще один параметр «обрезания», обусловленный принципом неопределенности  $rp \sim r v_T m > \hbar$  и равный дебройлевской длине волны свободной частицы, т. е.  $r > r_{\min} \approx \lambda_p = \frac{\hbar}{m v_T}$ . Очевидно, что в общем случае

$$r_{\min} = \max \left\{ \frac{e^2}{T}, \frac{\hbar}{m v_T} \right\}.$$

Только при очень высоких температурах, когда  $e^2 \ll \hbar v_T$ , минимальный радиус взаимодействия определяется дебройлевской длиной волны.

Суммируя сказанное, кинетическое уравнение для заряженных частиц в полностью ионизованной плазме с учетом кулоновских столкновений можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} = \\ & = \sum_{\beta} \frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}} \int d\mathbf{p}_\beta 2\pi e_\alpha^2 e_\beta^2 \frac{u^2 \delta_{ij} - u_i u_j}{u^3} L \left[ f_\beta(\mathbf{p}_\beta) \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_{\alpha j}} - \right. \\ & \quad \left. - f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha) \frac{\partial f_\beta}{\partial p_{\beta j}} \right]. \end{aligned} \quad (14.7)$$

Это кинетическое уравнение часто называют также уравнением Ландау, а стоящий в правой части интеграл — интегралом столкновений Ландау. Далее для описания столкновений частиц в полностью ионизованной плазме будем пользоваться именно этой формой уравнения, поскольку учет поляризации плазмы в интеграле столкновений по существу сводится к обоснованию «обрезания» взаимодействия на больших расстояниях, которое уже учитывается в уравнении Ландау.

\* Строго говоря, это выражение для  $L$  справедливо лишь при  $\omega_{Le} \gg \Omega_e, \omega$ ;

$\Omega_e = \frac{eB}{mc}$ . Если данное условие не соблюдается, то в формулу для  $L$  вместо

$r_{De} = \frac{v_{Te}}{\omega_{Le}}$  следует подставить величину  $r_{\max} = \frac{v_{Te}}{\max(\omega, \Omega_e)}$ .

В заключение приведем интеграл столкновений заряженных частиц между собой в случае вырожденной плазмы. Такой интеграл должен отличаться от приведенных учетом принципа запрета Паули, согласно которому в одном и том же состоянии (с заданным импульсом  $\mathbf{p}$ ) могут находиться не более двух частиц со спином  $1/2$ , какими являются электроны и дырки. Учитывая принцип Паули и тот факт, что каждому состоянию в фазовом пространстве соответствует объем  $(2\pi\hbar)^3$ , запишем интеграл столкновений (13.9) в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{st}^{\alpha\beta} = & \frac{2\pi}{\hbar} \int d\mathbf{p}_\beta (2\pi)^3 d\mathbf{k} |U(\mathbf{k})|^2 \delta \left[ \frac{(\mathbf{p}_\alpha - \hbar\mathbf{k})^2}{2m_\alpha} + \frac{(\mathbf{p}_\beta + \hbar\mathbf{k})^2}{2m_\beta} - \right. \\ & \left. - \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} - \frac{p_\beta^2}{2m_\beta} \right] \left\{ f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha) f_\beta(\mathbf{p}_\beta) \left[ 1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha - \hbar\mathbf{k}) \right] \times \right. \\ & \times \left[ 1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} f_\beta(\mathbf{p}_\beta + \hbar\mathbf{k}) \right] - f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha - \hbar\mathbf{k}) f_\beta(\mathbf{p}_\beta + \hbar\mathbf{k}) \times \\ & \left. \times \left[ 1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha) \right] \left[ 1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} f_\beta(\mathbf{p}_\beta) \right] \right\}. \quad (14.8) \end{aligned}$$

Разлагая далее это выражение по малой величине передаваемого при столкновениях импульса, т. е. при  $\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta \gg \hbar\mathbf{k}$ , окончательно находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{st}^{\alpha\beta} = & \int d\mathbf{p}_\beta I_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta) \left\{ 2 \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_{\alpha i}} \cdot \frac{\partial f_\beta}{\partial p_{\beta j}} \times \left[ 1 - (f_\alpha + f_\beta) \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial p_{\alpha i} \partial p_{\alpha j}} f_\beta \left[ 1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} f_\beta \right] - \frac{\partial^2 f_\beta}{\partial p_{\beta i} \partial p_{\beta j}} f_\alpha \left[ 1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} f_\alpha \right] \right\}, \quad (14.9) \end{aligned}$$

где  $I_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta)$  определяется формулой (13.11) и для заряженных частиц — выражениями (14.5), (14.6) с очевидной заменой  $T \rightarrow \mathcal{E}_F$  [такая же замена должна производиться и в формуле (14.7)]. В выражениях (14.8) и (14.9) принцип Паули учитывается множителями

$$1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha),$$

представляющими собой вероятность наличия для частиц сорта  $\alpha$  свободного места в состоянии с импульсом  $\mathbf{p}_\alpha$ . Очевидно, что рассеяние с переходом  $\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta \rightleftharpoons \mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}'_\beta$  возможно только при наличии свободных вакансий в состоянии с импульсами  $\mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}'_\beta$ . В невырожденном случае эти множители равны единице, и выражения (14.8) и (14.9) переходят в (13.9) и (13.10).

## § 15. Модельный интеграл упругих столкновений частиц

При упрощении интеграла столкновений Больцмана для вычисления вероятности рассеяния частиц  $W(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta; \mathbf{p}'_\alpha, \mathbf{p}'_\beta)$  было использовано борновское приближение. Таким приближением можно пользоваться, если существует Фурье-образ потенциала взаимодействия  $U(\mathbf{r})$ , т. е. интеграл (13.4). Этот интеграл расходится, если  $U(\mathbf{r})$  растет при малых  $r$  быстрее, чем  $1/r^2$ , что имеет место при взаимодействии заряженных частиц с нейтральными атомами и молекулами плазмы либо с кристаллической решеткой (в случае твердотельной плазмы). Поэтому для описания столкновений заряженных частиц с нейтральными приходится пользоваться общим интегралом столкновений Больцмана (13.3) и вычислять вероятность рассеяния без привлечения борновского приближения. Подобные вычисления, как правило, связаны с большими математическими трудностями, не говоря уже о том, что нет и не может быть единого потенциала взаимодействия заряженных частиц с нейтральными. По этой же причине мало эффективен и интеграл столкновений (13.10) (справедливый только при условии применимости борновского приближения) применительно к взаимодействию заряженных частиц с нейтральными. Из сказанного ясно, почему нет единой простой теории интеграла столкновений заряженных частиц как для слабоионизованной газовой плазмы, так и для плазмы твердого тела. Вместе с тем при практических вычислениях как в газовой, так и твердотельной плазме часто используют приближенные модельные представления о столкновительном члене в кинетическом уравнении для заряженных частиц.

Остановимся кратко на одном из модельных интегралов столкновений, получивших в последние годы широкое распространение. Этот интеграл столкновений часто называют интегралом Батнагара — Гросса — Крука (интеграл БГК). Он не может быть получен из общего интеграла Больцмана путем каких-либо приближений и поэтому называется модельным. Его можно только сконструировать из общих соображений, соответствующих здравому физическому смыслу.

При конструировании любого модельного интеграла упругих столкновений следует исходить из общих законов сохранения числа частиц, импульса и энергии при упругом рассеянии. Эти законы при столкновении частиц сорта  $\alpha$  с частицами сорта  $\beta$  записываются в виде

$$\int d\mathbf{p} \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} = 0,$$

$$m_\alpha \int d\mathbf{p} \mathbf{v} \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} + m_\beta \int d\mathbf{p} \mathbf{v} \left( \frac{\partial f_\beta}{\partial t} \right)_{st}^{\beta\alpha} = 0, \quad (15.1)$$

$$m_\alpha \int d\mathbf{p} v^2 \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} + m_\beta \int d\mathbf{p} v^2 \left( \frac{\partial f_\beta}{\partial t} \right)_{st}^{\beta\alpha} = 0.$$



Приведенные соотношения получаются непосредственно из кинетических уравнений (13.1) путем умножения на  $1$ ,  $m_\alpha \mathbf{v}$  и  $m_\alpha \mathbf{v}^2$ , интегрирования по импульсу и суммирования по сталкивающимся частицам. Следует иметь в виду, что интеграл столкновений частиц при подстановке в него термодинамически равновесных распределений для частиц всех сортов (распределений Максвелла либо Ферми) должен обратиться в нуль. Это утверждение является следствием известной H-теоремы Больцмана, согласно которой при любых возмущениях функции распределения под действием столкновений частиц стремятся к термодинамически равновесному распределению (к максвелловскому — в случае невырожденного газа и фермиевскому — в случае вырожденного газа). Процесс приближения функции распределения частиц к равновесной при столкновениях называют р е л а к с а ц и е й. При этом различают времена релаксаций для разных процессов. Так, если возмущения таковы, что в газе у частиц сорта  $\alpha$  появляется средний импульс, то под действием столкновений он должен релаксировать к нулю. Характерное время этого процесса называют в р е м е н е м р е л а к с а ц и и импульса для частиц сорта  $\alpha$ . Как правило, оно совпадает с временем свободного пробега, поскольку релаксация импульса происходит практически при одном столкновении частицы. Обратное время релаксации импульса называют частотой столкновений.

Перечисленным свойствам (15.1) в невырожденной слабоионизованной плазме, как легко показать, удовлетворяет интеграл столкновений Батнагара—Гросса—Крука

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{st}^{\alpha\beta} = -\nu_{\alpha\beta}(f_\alpha - N_\alpha \Phi_{\alpha\beta}), \quad (15.2)$$

где  $\nu_{\alpha\beta}$  — некоторая постоянная величина, имеющая смысл эффективной частоты столкновений частиц сорта  $\alpha$  с частицами сорта  $\beta$ , т. е. характеризующая время релаксации импульса частиц сорта  $\alpha$  вследствие столкновений с частицами сорта  $\beta$ .

Функция  $\Phi_{\alpha\beta}$  определяется соотношением

$$\Phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{(2\pi m_\alpha T_{\alpha\beta})^{3/2}} \exp\left[-\frac{m_\alpha(\mathbf{v} - \mathbf{V}_\beta)^2}{2T_{\alpha\beta}}\right]. \quad (15.3)$$

$$\text{Здесь } \mathbf{V}_\alpha = \frac{1}{N_\alpha} \int d\mathbf{p} \mathbf{v} f_\alpha, \quad N_\alpha = \int d\mathbf{p} f_\alpha,$$

$$T_\alpha = \frac{m_\alpha}{3N_\alpha} \int d\mathbf{p} (\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha)^2 f_\alpha, \quad (15.4)$$

$$T_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha T_\beta + m_\beta T_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}.$$

Подставляя выражение (15.2) в соотношения (15.1), можно показать, что законы сохранения импульса и энергии выполняются при

условии  $m_\alpha N_\alpha v_{\alpha\beta} = m_\beta N_\beta v_{\beta\alpha}$ . Следует заметить, однако, что в теории модельного интеграла БГК по существу нет соотношений, определяющих частоты  $\nu_{\alpha\beta}$ ; они должны быть определены из точного интеграла Больцмана, в который входит своя для каждого сорта частиц потенциальная энергия взаимодействия  $U(\mathbf{r})$ . Если учесть при этом, что величина  $\nu_{\alpha\beta}$  имеет смысл обратного времени релаксации импульса, то из простых молекулярно-кинетических соображений можно записать для рассеяния заряженных частиц на нейтральных частицах  $\nu_{\alpha n} = v_{T\alpha} \sigma_0 N_n$ , где  $\sigma_0$  — эффективное поперечное сечение рассеяния заряженных частиц на нейтральных частицах; по порядку величины  $\sigma_0 = \pi a^2$  ( $a$  — радиус нейтральных атомов:  $a \approx 10^{-8}$  см);  $N_n$  — плотность нейтральных частиц в плазме. Здесь же следует оговорить, что интеграл БГК удовлетворительно описывает лишь взаимодействие частиц разного сорта. Поэтому им можно пользоваться для описания столкновений заряженных частиц с нейтральными частицами в слабоионизованной плазме, когда преобладающим является рассеяние заряженных частиц на нейтральных. Для полностью ионизованной плазмы пользоваться интегралом БГК, несмотря на простоту, нецелесообразно.

Подставляя выражение (15.2) в (13.1), запишем кинетическое уравнение с интегралом столкновений БГК для невырожденной плазмы:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} = - \sum_\beta \nu_{\alpha\beta} (f_\alpha - N_\alpha \Phi_{\alpha\beta}), \quad (15.5)$$

где суммирование распространяется только по сортам нейтральных частиц плазмы.

Не представляет труда обобщить интеграл столкновений БГК на случай вырожденной твердотельной плазмы. Следует учесть, что равновесным распределением в вырожденной плазме является распределение Ферми, поэтому в результате столкновений частиц функция распределения должна релаксировать к распределению Ферми. Кроме того, в твердотельной плазме модельным интегралом БГК удобно описывать столкновения легких носителей заряда (электронов и дырок) с тяжелой решеткой, и в этом смысле плазму можно считать слабоионизованной. По аналогии с (15.1) интеграл столкновений БГК для вырожденной плазмы записывается в виде

$$\left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} = - \nu_{\alpha\beta} (f_\alpha - f_{0\alpha}), \quad (15.6)$$

где  $f_{0\alpha}$  — равновесная функция распределения Ферми:

$$f_{0\alpha} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \left\{ \exp \left[ \left( \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} - \varepsilon_{F\alpha} \right) / T \right] + 1 \right\}^{-1}. \quad (15.7)$$

При  $\varepsilon_{F\alpha} = \frac{p_{F\alpha}^2}{2m_\alpha} = (3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 N_\alpha^{2/3} / 2m_\alpha \ll T_\alpha$

функция распределения Ферми (15.7) переходит в функцию распределения Максвелла:

$$f_{0\alpha} \rightarrow \frac{N_\alpha}{(2\pi m_\alpha T_\alpha)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha T_\alpha}\right). \quad (15.8)$$

Такой же вид принимает функция  $N_\alpha \Phi_{\alpha\beta}$  при условии  $m_\alpha \ll m_\beta$  и  $\mathbf{V}_\beta = 0$ , когда  $T_{\alpha\beta} \rightarrow T_\alpha$ . Следовательно, интеграл (15.6) в невырожденном пределе совпадает с (15.2) для столкновений легких носителей тока с тяжелыми нейтральными частицами.

## § 16. Обоснование простейших моделей плазмы

Имея в распоряжении наиболее общую из возможных моделей газовой плазмы — кинетическое уравнение с самосогласованным полем, учитывающее также ближние парные столкновения частиц, можно выяснить условия применимости более простых моделей плазмы, рассмотренных в § 11, и обосновать их. Ограничимся рассмотрением разреженной бесстолкновительной плазмы, описываемой кинетическим уравнением (12.7):

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (16.1)$$

Уравнение (16.1) справедливо лишь для описания таких процессов в плазме, которые протекают за времена, меньшие времен свободного пробега частиц, либо характерные пространственные масштабы которых меньше длин свободного пробега, т. е.

$$1/\tau \gg \sum_\beta \nu_{\alpha\beta}, \quad L \ll l_\alpha = v_{T\alpha} / \sum_\beta \nu_{\alpha\beta}, \quad (16.2)$$

где  $\tau$  — характерное время рассматриваемого процесса, а  $L$  — его характерный пространственный масштаб.

Для волновых процессов такими параметрами являются частота  $\omega \sim 1/\tau$  и величина волнового вектора  $k \sim 1/L$ . Для указанных процессов плазму можно считать бесстолкновительной. Учет столкновений частиц при этом приводит к малым поправкам, которыми далее будем пренебрегать.

Заметим, что даже при полном отсутствии столкновений частиц в определенных условиях применимо гидродинамическое описание плазмы. Получение гидродинамических уравнений сводится к отысканию замкнутой системы уравнений для моментов функций распределения каждого сорта частиц:

$$N_\alpha(t, \mathbf{r}) = \int d\mathbf{p} f_\alpha, \quad N_\alpha(t, \mathbf{r}) \mathbf{V}_\alpha(t, \mathbf{r}) = \int d\mathbf{p} \mathbf{p} f_\alpha, \quad (16.3)$$

представляющих собой соответственно плотности числа частиц и потока частиц сорта  $\alpha$ . Гидродинамические уравнения в условиях, когда

их удается получить в замкнутом виде, обладают рядом преимуществ по сравнению с кинетическим уравнением. Очевидно, что гидродинамика значительно проще кинетики. Достаточно отметить, что гидродинамические величины  $N_\alpha(t, \mathbf{r})$  и  $\mathbf{V}_\alpha(t, \mathbf{r})$  (их число ограничено) зависят лишь от четырех переменных  $\mathbf{r}$  и  $t$ , в то время как функция распределения  $f_\alpha(\mathbf{p}, t, \mathbf{r})$  является функцией 7 переменных.

Переходя к выводу гидродинамических уравнений для бесстолкновительной плазмы, умножим уравнение (16.1) на 1 и  $\mathbf{p}$  и проинтегрируем по импульсу. В результате получим следующие гидродинамические уравнения для электронов и ионов (т. е.  $\alpha = e, i$ ):

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} N_\alpha \mathbf{V}_\alpha = 0, \quad (16.4)$$

$$\frac{\partial N_\alpha p_{ai}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_j} \Pi_{aij}(t, \mathbf{r}) = e_\alpha N_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_\alpha \mathbf{B}] \right\},$$

где

$$\Pi_{aij} = \int p_i v_j f_\alpha d\mathbf{p}. \quad (16.5)$$

Первое из уравнений (16.4) представляет собой уравнение непрерывности, а второе — уравнение движения, однако оно не является «гидродинамически замкнутым», так как содержит тензор  $\Pi_{aij}$ . Определение тензора  $\Pi_{aij}$  в общем случае является трудной задачей. В бесстолкновительной плазме известны два случая, когда тензор  $\Pi_{aij}$  удается вычислить явно и тем самым придать уравнениям (16.4) «гидродинамически замкнутый» вид. Одним из них является предел «холодной» плазмы.

Если интересуются процессами, характерная скорость которых значительно больше тепловых скоростей частиц (электронов и ионов), т. е.

$$\frac{L}{\tau} \sim \frac{\omega}{k} \gg v_{\text{та}}, \quad (16.6)$$

то тепловым движением частиц в первом приближении можно пренебречь, считая плазму «холодной». Это означает, что функция распределения частиц по скоростям для описания таких процессов может быть представлена в виде

$$f_\alpha \sim \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha). \quad (16.7)$$

При этом из (16.1) следует, что  $\Pi_{aij} = N_\alpha p_{ai} V_{aj}$  и уравнение движения (16.4) легко сводится к известному уравнению Эйлера для заряженной жидкости с «нулевым» давлением:

$$\frac{d\mathbf{p}_\alpha}{dt} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\alpha \nabla \right] \mathbf{p}_\alpha = e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_\alpha \mathbf{B}] \right\}, \quad (16.8)$$

$$p_\alpha = m\mathbf{V}_\alpha / \sqrt{1 - V_\alpha^2/c^2}.$$

Уравнения (16.8) совместно с уравнениями непрерывности (16.4) для электронов и ионов ( $\alpha = e, i$ ) образуют систему замкнутых гидро-

динамических уравнений для холодной бесстолкновительной плазмы. Плотности тока и заряда при этом согласно (16.3) определяются выражениями

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}, \quad \rho = \sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha}. \quad (16.9)$$

Здесь суммирование распространяется на все сорта заряженных частиц. Подстановка этих выражений в уравнения Максвелла (5.1) приводит к согласованию уравнений гидродинамики с уравнениями поля. Образованную при этом полную систему уравнений часто называют уравнениями двухжидкостной магнитной гидродинамики «холодной» плазмы. Легко видеть, что уравнение (16.8) по форме совпадает с уравнением движения частиц (11.1), использованным в модели независимых частиц. Получение этого уравнения из кинетического позволило определить пределы применимости простой модели независимых частиц в виде неравенств (16.2) и (16.6).

Следует заметить, что неравенства (16.2) и (16.6), строго говоря, определяют пределы применимости двухжидкостной гидродинамики «холодной» плазмы только в отсутствие внешнего магнитного поля. При наличии же магнитного поля в плазме наряду с ними необходимо выполнение условий

$$|\omega \pm \Omega_{\alpha}| \gg k_z v_{T\alpha}, \quad v_{\alpha}; \quad \frac{k_{\perp} v_{T\alpha}}{\Omega_{\alpha}} \ll 1, \quad (16.10)$$

где  $\omega \sim 1/\tau$  — характерная частота процесса,  $v_{\alpha} = \sum_{\beta} v_{\alpha\beta}$ , а  $\Omega_{\alpha} = \frac{e_{\alpha} B}{m_{\alpha} c}$  — ларморовская частота вращения частиц сорта  $\alpha$  в магнитном поле;  $k_z = \sim 1/L_{\parallel}$  и  $k_{\perp} \sim 1/L_{\perp}$  — масштабы неоднородности исследуемого процесса соответственно вдоль и поперек направления магнитного поля.

Вторая область значений параметров, в которой также применимо гидродинамическое описание бесстолкновительной плазмы (одножидкостная гидродинамика), определяется неравенствами

$$v_{Ti} \ll \frac{L}{\tau} \sim \frac{\omega}{k} \ll v_{Te}. \quad (16.11)$$

Из условий (16.11) следует, что ионы плазмы для таких процессов являются «холодными», и их можно описывать уравнениями типа (16.4) и (16.8) (разумеется, нерелятивистскими, так как  $v_i \ll c$ ), которые при этом будут характеризовать движение массы плазмы. Чтобы получить уравнения одножидкостной гидродинамики, нужно исключить из них электрическое поле. Воспользуемся для этой цели кинетическим уравнением (16.1) для электронов. Если учесть, что согласно (16.11) в этом уравнении слагаемым с производной по времени можно пренебречь, легко записать его общее решение в виде из-

вестного распределения Больцмана во внешнем потенциальном поле  $\Phi$  (т. е.  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ ):

$$f_e = f_e \left( \frac{m}{2T_e} (\mathbf{v} - \mathbf{V}_e)^2 + \frac{e\Phi}{T_e} \right), \quad (16.12)$$

где  $\mathbf{V}_e$  — направленная скорость электронов, температура которых согласно этому распределению постоянна и равна  $T_e$ .

Электронный ток в плазме в этом случае определяется выражением

$$\mathbf{j}_e = eN_e\mathbf{V}_e, \quad (16.13)$$

где  $N_e$  — плотность, определяемая функцией (16.12) и подчиняющаяся барометрическому закону

$$N_e = N_0 e^{-\frac{e\Phi}{T_e}}. \quad (16.14)$$

Здесь  $N_0$  — невозмущенная плотность электронов в отсутствие электрического поля.

Подставляя (16.12) в (16.5) и учитывая условие  $|\mathbf{V}_e| \ll v_{Te}$ , из уравнения движения (16.4) для электронов находим

$$\mathbf{E} = -\frac{T_e}{eN_e} \nabla N_e - \frac{1}{c} [\mathbf{V}_e \mathbf{B}]. \quad (16.15)$$

Используя это соотношение, исключаем электрическое поле из уравнения движения ионов. Принимая во внимание условие квазинейтральности плазмы  $\sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha} = 0$  и учитывая, что плотность полного тока в плазме

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha} = -eN_e\mathbf{V}_e + e_i N_i \mathbf{V}_i, \quad (16.16)$$

окончательно получаем

$$\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + (\mathbf{V}_i \nabla) \mathbf{V}_i = -\frac{v_s^2}{N_i} \nabla N_i + \frac{1}{MN_i c} [\mathbf{j} \mathbf{B}], \quad (16.17)$$

где  $v_s = \sqrt{Z \frac{T_e}{M}}$  — скорость ионного звука в плазме, а  $Z = |e_i/e|$  — зарядовое число ионов.

Упростим теперь уравнения поля (5.1). Во-первых, пренебрежем токами смещения, что справедливо при условии  $\omega \sim \frac{1}{\tau} \ll \omega_{Li}$ , а, во-вторых, исключим из них электрическое поле. Замечая, что в уравнение

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (16.18)$$

вклад дает лишь поперечная к магнитному полю компонента электрического поля, вместо (16.15) можно воспользоваться более простым выражением

$$\mathbf{E}_\perp = -\frac{1}{c} [\mathbf{V}_i \mathbf{B}], \quad (16.19)$$

которое следует непосредственно из уравнения движения (Эйлера) для ионов при условии  $\omega \sim 1/\tau \ll \Omega_i$ . Можно показать, что  $\mathbf{E}_\perp$  совпадает с поперечной проекцией выражения (16.15). Подставляя соотношение (16.19) в уравнение (16.18), получаем

$$\text{rot} [\mathbf{V}_i \mathbf{B}] = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (16.20)$$

Собирая теперь все полученные уравнения вместе, опуская индекс  $i$  и вводя массовую плотность  $\rho_M = MN_i$ , запишем систему уравнений одножидкостной магнитной гидродинамики для бесстолкновительной плазмы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \text{rot} [\mathbf{V} \mathbf{B}], \quad \text{div} \mathbf{B} = 0, \\ \rho_M \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} \right) &= -v_s^2 \nabla \rho_M - \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B} \text{rot} \mathbf{B}], \\ \frac{\partial \rho_M}{\partial t} + \text{div} \rho_M \mathbf{V} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.21)$$

Эти уравнения совпадают с системой уравнений (11.4) в пределе идеальной проводимости  $\sigma \rightarrow \infty$  и в случае пренебрежения вязкостью. Уравнение состояния плазмы при этом имеет вид

$$p = v_s^2 \rho_M = \frac{1}{2} N_e T_e = Z N_i T_e, \quad (16.22)$$

причем в отличие от обычной гидродинамики проводящей жидкости (см. § 11) здесь температура, как следует из вывода уравнений (16.21), считается постоянной во времени и однородной в пространстве. Кроме того, согласно соотношению (16.22) давление плазмы определяется температурой электронов, что возможно лишь при условии сильной неизотермичности плазмы, когда  $T_e \gg T_i$ .

Требование неизотермичности плазмы следует также из следующих соображений. Из обычной гидродинамики известно, что характерной скоростью течения жидкости является скорость звука  $v_s \sim \sqrt{p/\rho_M}$ . Согласно уравнению состояния (16.22), в рассматриваемом случае  $v_s \sim \sqrt{T_e/M}$  (именно поэтому  $v_s$  называют скоростью звука в бесстолкновительной плазме). С другой стороны, из условия (16.11) следует, что эта скорость должна быть значительно больше тепловой скорости ионов, т. е.  $v_s \gg v_{Ti}$ , что, очевидно, возможно лишь в неизотермической плазме ( $T_e \gg T_i$ ).

В заключение приведем еще раз условия, при которых справедливо описание бесстолкновительной неизотермической плазмы с помощью

системы уравнений одножидкостной магнитной гидродинамики (16.21):

$$\left. \begin{aligned} v_{Ti} &\ll L/\tau \sim \omega/k \ll v_{Te}, \\ \omega &\sim 1/\tau \ll \Omega_i \ll \omega_{Li}. \end{aligned} \right\} \quad (16.23)$$

Строго говоря, при наличии сильного магнитного поля первое из этих условий должно выполняться только для проекции волнового вектора вдоль магнитного поля или, другими словами, для размера продольной неоднородности, т. е. для  $k_z \sim 1/L_{\parallel}$  (это будет показано в гл. V); для поперечной же проекции должно выполняться неравенство  $\frac{k_{\perp} v_{Ta}}{\Omega_a} \sim \frac{v_{Ta}}{L_{\perp} \Omega_a} \ll 1$ , т. е. размеры поперечных неоднородностей должны значительно превышать ларморовские радиусы частиц. Далее, условие  $\Omega_i \ll \omega_{Li}$  требуется для соблюдения квазинейтральности плазмы при  $\omega \ll \Omega_i$ . Это, однако, не означает, что в уравнениях (16.21) нельзя переходить к пределу  $\mathbf{B} \rightarrow 0$ , т. е. к изотропной плазме. В отсутствие внешнего магнитного поля уравнение непрерывности для ионов и уравнение Эйлера образуют полную систему уравнений, и в упрощении уравнения поля (16.20) нет необходимости. Поэтому отпадает и требование  $\omega \ll \Omega_i$ . Условие квазинейтральности плазмы в отсутствие внешнего магнитного поля выполняется при  $\omega \sim 1/\tau \ll \omega_{Li}$ .

Наконец, заметим, что хотя при получении системы (16.21) полностью пренебрегалось столкновениями частиц, это вовсе не означает, что она справедлива только, когда  $\omega \sim 1/\tau \gg \nu_e, \nu_i$ . При анализе кинетического уравнения для ионов в пределе «холодных» ионов действительно можно было пренебречь столкновениями лишь при  $\omega \gg \nu_i$ , где  $\nu_i$  — полная (суммарная) частота столкновений ионов со всеми частицами. В кинетическом же уравнении для электронов столкновениями можно пренебречь и при  $\omega < \nu_e$ , если только  $\nu_e \ll k_{\parallel} v_{Te} \sim v_{Te}/L_{\parallel}$ . Таким образом, условия применимости системы (16.21) по временам записывается в виде

$$\omega \sim 1/\tau \gg \nu_i, \quad (16.24)$$

$$\omega \sim 1/\tau, \quad \nu_e \ll k_{\parallel} v_{Te} \sim v_{Te}/L_{\parallel}.$$

Итак, даже в разреженной плазме при полном пренебрежении столкновениями частиц в определенных условиях возможно гидродинамическое описание движения плазмы. Мы ограничились этим пределом, поскольку именно он вызывал наибольшее сомнение с точки зрения применимости гидродинамического описания. В обратном пределе плотной плазмы с частыми столкновениями частиц применимость гидродинамики очевидна.

### Задачи к главе III

**Задача 1.** Показать, что интеграл упругих столкновений Больцмана (13.3) обращается в нуль, если функции распределения частиц  $f_{\alpha}$  и  $f_{\beta}$  представляют собой функции распределения Максвелла с  $T_{\alpha} = T_{\beta} = T$ .



Решение. Функция распределения Максвелла для частиц сорта  $\alpha$  с температурой  $T$  имеет вид

$$f_{\alpha}(p_{\alpha}) = \frac{N_{\alpha}}{(2\pi m_{\alpha} T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p_{\alpha}^2}{2m_{\alpha} T}\right). \quad (1)$$

Подставляя это выражение в (13.3) и учитывая закон сохранения энергии

$$\frac{p_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} + \frac{p_{\beta}^2}{2m_{\beta}} = \frac{p_{\alpha}'^2}{2m_{\alpha}} + \frac{p_{\beta}'^2}{2m_{\beta}}, \quad (2)$$

находим, что

$$\begin{aligned} & [f_{\alpha}(p_{\alpha}) f_{\beta}(p_{\beta}) - f_{\alpha}(p_{\alpha}') f_{\beta}(p_{\beta}')] = \\ & = \frac{N_{\alpha} N_{\beta}}{(2\pi m_{\alpha} T)^{3/2} (2\pi m_{\beta} T)^{3/2}} \left[ \exp\left(-\frac{p_{\alpha}^2}{2m_{\alpha} T} - \frac{p_{\beta}^2}{2m_{\beta} T}\right) - \right. \\ & \quad \left. - \exp\left(-\frac{p_{\alpha}'^2}{2m_{\alpha} T} - \frac{p_{\beta}'^2}{2m_{\beta} T}\right) \right] \equiv 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Следовательно, и  $\left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t}\right)_{st}^{\alpha\beta} \equiv 0$ .

**Задача 2.** На примере лоренцовского газа с бесконечно тяжелыми ионами найти функцию распределения электронов в полностью ионизованной плазме во внешнем электрическом поле и вычислить проводимость плазмы.

Решение. Лоренцовским газом называется электронный газ, в котором электроны не взаимодействуют (т. е. не сталкиваются) между собой, но взаимодействуют с ионами. Такое приближение пригодно при  $Z = |e_i/e| \gg 1$ . Кинетическое уравнение Ландау для лоренцовского газа с тяжелыми ионами во внешнем электрическом поле записывается следующим образом:

$$eE \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial}{\partial p_i} 2\pi e^2 e_i^2 N_i L \frac{v^2 \delta_{ij} - v_i v_j}{v^3} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial p_j}. \quad (1)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$f_e = f_M + \frac{\mathbf{v} f_1(v)}{v}, \quad (2)$$

где  $f_M$  — функция распределения Максвелла.

При достаточно слабых полях  $|f_1| \ll f_M$ , поэтому

$$eE \frac{\partial f_M}{\partial \mathbf{p}} = \frac{2\pi e^2 e_i^2 N_i L}{m^2} \cdot \frac{2f_1 \mathbf{v}}{v^4} \quad (3)$$

или

$$f_e = f_M + \frac{eE}{m\nu(v)} \cdot \frac{\partial f_M}{\partial \mathbf{v}}, \quad (4)$$

где

$$\nu(v) = \frac{4\pi e^2 e_i^2 N_i L}{m^2 v^3}. \quad (5)$$

Отсюда находим плотность электронного тока в плазме:

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f_e d\mathbf{p} = \frac{e^2 N_e}{m\nu_{\text{эфф}}} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}, \quad (6)$$

а следовательно, и проводимость плазмы в модели лоренцовского газа:

$$\sigma = \frac{e^2 N_e}{m \nu_{\text{эфф}}}, \quad (7)$$

где  $\nu_{\text{эфф}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \cdot \frac{e^2 e_i^2 N_i L}{T_e^{3/2}}$ .

Соотношение (7) справедливо при  $u = \frac{eE}{m \nu_{\text{эфф}}} < v_{Te}$ . При  $u > v_{Te}$  появляются так называемые убегающие электроны, поэтому понятием проводимости можно пользоваться до некоторого критического значения поля  $E_{\text{кр}}$ , определяемого из условия

$$\frac{eE_{\text{кр}}}{m \nu_{\text{эфф}}^2} = v_{Te} \quad (8)$$

и называемого полем Драйсера. При значениях  $E > E_{\text{кр}}$  в плазме не существует стационарного состояния.

**Задача 3.** С помощью кинетического уравнения Ландау (14.7) исследовать процесс выравнивания (релаксации) температур в полностью ионизованной плазме, если температура электронов  $T_e$ , а температура ионов  $T_i$ .

**Решение.** Распределения по скоростям как электронов, так и ионов максвелловские, поэтому

$$\left( \frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{st}^{ee} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{st}^{ii} = 0. \quad (1)$$

Процесс выравнивания температур  $T_e$  и  $T_i$  определяется столкновениями электронов с ионами. При этом

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \left( \frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{st}^{ei}. \quad (2)$$

Умножим это уравнение на  $p_e^2 / (2m)$  и проинтегрируем по  $p$ , считая распределения электронов и ионов максвелловскими. В результате получим

$$\partial T_e / \partial t = -\nu_T (T_e - T_i), \quad (3)$$

где

$$\nu_T = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi e^2 e_i^2 L}{T_e T_i} \cdot \frac{N_i}{(2\pi)^3 (m T_e M T_i)^{3/2}} \int dp_i dp_e \exp\left(-\frac{p_e^2}{2m T_e} - \frac{p_i^2}{2M T_i}\right) v_{ek} v_{em} \frac{u^2 \delta_{km} - u_k u_m}{u^3}. \quad (4)$$

Здесь  $u = v_e - v_i$ .

Учитывая, что  $v_i \ll v_{Te}$ , воспользуемся разложением по степеням  $v_i/v_e$ . Тогда

$$v_{ek} v_{em} \frac{u^2 \delta_{km} - u_k u_m}{u^3} \sim v_{ik} v_{im} \frac{v_e^2 \delta_{km} - v_{ek} v_{em}}{v_e^3},$$

$$\nu_T = 2 \frac{m}{M} \nu_{\text{эфф}}, \quad \nu_{\text{эфф}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \cdot \frac{e^2 e_i^2 N_i L}{T_e^{3/2}}. \quad (5)$$

Из закона сохранения полной энергии в системе имеем  $N_e T_e + N_i T_i = \text{const}$ , или

$$N_e \frac{dT_e}{dt} + N_i \frac{dT_i}{dt} = 0. \quad (6)$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} (T_e - T_i) = -\nu_r \left( 1 + \left| \frac{e_i}{e} \right| \right) (T_e - T_i). \quad (7)$$

Таким образом, время выравнивания температур

$$\tau_r = \frac{1}{\nu_r} \sim \frac{M}{m} \cdot \frac{1}{\nu_{эфф}}$$

**Задача 4.** Исследовать процесс релаксации направленной скорости электронов в полностью ионизованной плазме.

**Решение.** Предполагая распределение электронов по скоростям

$$f_e = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2T_e} \right] \quad (1)$$

не меняющимися в процессе релаксации скорости  $\mathbf{u}$ , легко показать, что торможение электронов происходит лишь из-за электрон-ионных столкновений. Поэтому умножая уравнение

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \left( \frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{st}^{ei} \quad (2)$$

на  $\mathbf{v}$  и интегрируя по импульсу, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{2\pi e^2 e_i^2 L N_i}{m^2 N_e} \int d\mathbf{p} f_e \frac{2\mathbf{v}}{v^3}. \quad (3)$$

При выводе этого соотношения мы пренебрегли скоростью ионов по сравнению со скоростью электронов, считая  $v_{Te} \gg v_{Ti}$ . Полученное соотношение можно записать в виде

$$\partial \mathbf{u} / \partial t = -\nu_r \mathbf{u}, \quad (4)$$

где

$$\nu_r = \begin{cases} \nu_{эфф} & \text{при } u \ll v_{Te} = \sqrt{T_e/m}, \\ \nu_{эфф} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{v_{Te}^3}{u^3} & \text{при } u \gg v_{Te} = \sqrt{T_e/m}. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, время релаксации направленной скорости электронов при  $u \ll v_{Te}$  равно  $1/\nu_{эфф}$  и с повышением  $u$  растет как  $u^3/v_{Te}^3$ .

**Задача 5.** Исследовать процесс релаксации малой анизотропии температуры в электронной функции распределения в полностью ионизованной плазме.

**Решение.** Функция распределения электронов записывается в виде

$$f_e = \frac{N_e}{2\pi m T_{\perp} \sqrt{2\pi m T_{\parallel}}} \exp \left( -\frac{mv_{\perp}^2}{2T_{\perp}} - \frac{mv_{\parallel}^2}{2T_{\parallel}} \right), \quad (1)$$

причем  $|T_{\parallel} - T_{\perp}| \ll T_{\perp} \approx T_{\parallel} \approx T$ . В релаксации анизотропии температуры принимают участие как электрон-электронные, так и электрон-ионные столкновения:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \left( \frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{st}^{ee} + \left( \frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{st}^{ei}. \quad (2)$$

Умножая это уравнение на  $(mv_{\perp}^2)/2$  и на  $(mv_{\parallel}^2)/2$  и интегрируя по импульсам, находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT_{\perp}}{dt} &= -\frac{1}{2} \nu_p (T_{\perp} - T_{\parallel}), & \frac{dT_{\parallel}}{dt} &= -\nu_p (T_{\parallel} - T_{\perp}), \\ \frac{d}{dt} (T_{\perp} - T_{\parallel}) &= -\frac{3}{2} \nu_p (T_{\perp} - T_{\parallel}), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где

$$\nu_p = \frac{4}{5} \nu_{\Phi\Phi} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{e}{e_i} \right| \right); \quad \nu_{\Phi\Phi} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \cdot \frac{e^2 e_i^2 N_i L}{T_e^{3/2}}. \quad (4)$$

Таким образом, релаксация малой анизотропии температуры, так же как и малой направленной скорости электронов, происходит за время порядка  $1/\nu_{\Phi\Phi}$ .

**Задача 6.** При помощи кинетического уравнения с модельным интегралом БГК исследовать функцию распределения электронов и нагрев плазмы во внешнем электрическом поле.

**Решение.** Ограничиваясь учетом столкновений электронов с нейтральными частицами, запишем кинетическое уравнение с интегралом столкновений БГК:

$$e\mathbf{E} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}} = -\nu_{en} (f_e - N_e \Phi_{en}), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{en} &= \frac{1}{(2\pi m T_{en})^{3/2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T_{en}}\right), \\ T_{en} &= \frac{mT_n + MT_e}{m + M}, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь  $T_n$  — температура нейтральных частиц, а  $M$  — их масса.

Решение кинетического уравнения будем искать в виде

$$f_e = f_0(v) + \frac{\mathbf{v}\mathbf{f}_1(v)}{v}, \quad (3)$$

считая  $|\mathbf{f}_1| \ll f_0$ . В результате усреднения по углам получим два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e}{3v^2 m} \cdot \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E}\mathbf{f}_1) &= -\nu_{en} (f_0 - N_e \Phi_{en}), \\ \frac{e\mathbf{E}}{m} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} &= -\nu_{en} \mathbf{f}_1. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Подставляя  $\mathbf{f}_1$  из второго уравнения в первое, будем иметь

$$\frac{e^2 E^2}{3m^2 \nu_{en}} \cdot \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left( v^2 \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) + \nu_{en} (f_0 - N_e \Phi_{en}) = 0. \quad (5)$$

Решением этого уравнения является функция распределения Максвелла с температурой  $T_e$ , определяемой соотношением

$$\frac{2e^2 E^2}{m^2 \nu_{en}} - \nu_{en} \frac{3}{m+M} (T_e - T_n) = 0, \quad (6)$$

или

$$T_e \approx T_n + \frac{2}{3} \cdot \frac{M}{m} \frac{e^2 E^2}{m \nu_{en}^2}. \quad (7)$$

Установившаяся температура есть результат баланса между омическим нагревом электронов и передачей энергии от электронов к нейтральным частицам. Наконец, проводимость плазмы определяется из соотношения

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} \frac{(\mathbf{v} \mathbf{f}_1)}{v} d\mathbf{p} = \frac{e^2 N_e}{m \nu_{en}} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}, \quad (8)$$

что дает

$$\sigma = \frac{e^2 N_e}{m \nu_{en}}.$$

**Задача 7.** В модели независимых частиц найти среднюю силу (с и л у М и л е р а), действующую на электроны плазмы во внешнем сверхвысокочастотном (СВЧ) электрическом поле с неоднородной амплитудой  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \sin \omega_0 t$ . Ограничиться нерелятивистским случаем.

**Р е ш е н и е.** Запишем уравнение движения электронов в виде

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = \frac{e \mathbf{E}(t, \mathbf{r})}{m} + \frac{e}{mc} [\mathbf{V} (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}(t, \mathbf{r}))]. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{B}_0$  — внешнее однородное магнитное поле, а

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cos \omega_0 t, \quad (2)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{c}{\omega_0} \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Считая поля  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  и  $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ , а следовательно, и скорость  $\mathbf{V}$  малыми, в линейном приближении имеем

$$\frac{d\mathbf{V}_0}{dt} = \frac{e \mathbf{E}(t, \mathbf{r})}{m} + \frac{e}{mc} [\mathbf{V}_0 \mathbf{B}_0]. \quad (3)$$

Подставляя  $\mathbf{V}_0(t)$  в малые нелинейные слагаемые уравнения (1) и усредняя по времени, находим среднюю силу

$$\mathbf{F}_{\text{ср}} = -m \overline{(\mathbf{V}_0(t) \nabla) \mathbf{V}_0(t)} + \frac{e}{c} \overline{[\mathbf{V}_0(t) \mathbf{B}(t, \mathbf{r})]}. \quad (4)$$

В отсутствие внешнего однородного магнитного поля  $\mathbf{B}_0 \rightarrow 0$

$$\mathbf{V}_0 = -\frac{e \mathbf{E}(\mathbf{r})}{m \omega_0} \cos \omega_0 t,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{ср}} &= -\frac{e^2}{2m\omega_0^2} \{(\mathbf{E}(\mathbf{r}) \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r})]\} = \\ &= -\frac{e^2}{4m\omega_0^2} \nabla E^2(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5)$$

Видно, что средняя сила выталкивает электроны (а следовательно, и плазму) из области сильного СВЧ поля\*.

При наличии внешнего однородного магнитного поля возможна обратная ситуация, когда плазма втягивается в область сильного СВЧ поля.

**Задача 8.** Найти среднюю поперечную силу, действующую на электроны плазмы в слабееоднородном магнитном поле.

**Решение.** Предположим сначала, что электроны плазмы не обладают продольной (вдоль магнитного поля) скоростью и вращаются вокруг силовых линий магнитного поля с угловой скоростью  $\Omega = \frac{eB(\mathbf{r})}{mc}$ , где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t) + \xi(t)$  [ $\mathbf{r}_0(t)$  — радиус-вектор центра ларморовского вращения, а  $\xi(t)$  — положение электрона на орбите];  $\mathbf{r}_0(t)$  — большая медленно меняющаяся, а  $\xi(t)$  — малая быстро меняющаяся величины, причем в модели независимых частиц

$$\ddot{\xi} = \Omega \left[ \xi \frac{\mathbf{B}}{B} \right], \quad \dot{\xi} = \frac{1}{\Omega} \cdot \left[ \frac{\mathbf{B}}{B} \mathbf{v}_{\perp} \right]. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{v}_{\perp}$  — линейная скорость вращения электронов.

Разлагая  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  по степеням  $\xi$  и усредняя силу Лоренца по времени, находим среднюю силу, действующую на электроны плазмы и направленную поперек магнитного поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1\text{ ср}} &= \frac{e}{c} [\dot{\xi} (\xi \nabla) \mathbf{B}] = - \frac{mv_{\perp}^2}{2B} \left[ \left[ \frac{\mathbf{B}}{B} \nabla \right] \mathbf{B} \right] = \\ &= - \frac{mv_{\perp}^2}{2} \left( \frac{\mathbf{B}}{B} \nabla \right) \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{mv_{\perp}^2}{2R} \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $R$  — радиус кривизны силовых линий магнитного поля, а  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный от центра кривизны в точку приложения силы.

При выводе выражения (2) использовались соотношения (1) и уравнения Максвелла для стационарного магнитного поля  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ :

$$\text{rot } \mathbf{B} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

а также было учтено, что

$$\xi_i \xi_j = \frac{1}{2} \xi^2 \delta_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_{\perp}^2}{\Omega^2} \delta_{ij}. \quad (4)$$

Если электроны плазмы наряду с вращением совершают продольное движение со скоростью  $v_{\parallel}$ , то путем перехода в систему координат, вращающуюся с угловой скоростью  $v_{\parallel}/R$  вокруг мгновенного центра кривизны силовой линии магнитного поля, вновь будем иметь дело с электронами, не обладающими продольной скоростью. В этой системе, однако, появляется дополнительная поперечная сила инерции — центробежная сила, равная

$$\mathbf{F}_{2\text{ ср}} = \frac{mv_{\parallel}^2}{R} \mathbf{n}. \quad (5)$$

Сумма (2) и (5) дает искомую среднюю силу

$$\mathbf{F}_{\text{ ср}} = \mathbf{n} \frac{m}{R} \left( v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right). \quad (6)$$

\* Средняя сила, действующая на ионы непосредственно со стороны СВЧ поля, в  $M/m$  раз меньше силы (5). Поэтому на ионы действует сила (5), но через электроны.

Действие этой силы на электрон эквивалентно действию поля тяжести:

$$\mathbf{g} = \mathbf{n} \frac{1}{R} \left( v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right). \quad (7)$$

Очевидно, что подобная сила действует также на ионы плазмы, причем, поскольку сила (6) не зависит от знака заряда, силы, действующие на электроны и ионы плазмы, направлены в одну сторону.

## Глава IV

### ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ И СПЕКТРЫ КОЛЕБАНИЙ ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЫ

#### § 17. Диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной однородной изотропной плазмы

Теперь, когда рассмотрена наиболее общая модель плазмы как газа и известны уравнения динамики плазмы — система кинетических уравнений для заряженных частиц, можно перейти к изучению электромагнитных свойств плазмы. Естественно начать с простейшего случая пространственно однородной изотропной плазмы. Более того, считая столкновения частиц в плазме редкими, можно в первом приближении полностью пренебречь ими и получить выражение для диэлектрической проницаемости плазмы исходя из кинетических уравнений с самосогласованным полем (уравнений Власова). Очевидно, что такое приближение справедливо для описания процессов, протекающих быстрее времени свободного пробега, либо обладающих пространственным масштабом, меньшим длины свободного пробега. Плазму при этом называют бесстолкновительной.

В пространственно однородной, изотропной и бесстолкновительной плазме в отсутствие электромагнитных полей функции распределения частиц могут быть произвольными функциями величины импульса  $|\mathbf{p}| = p$ . В этой главе, однако, примем, что распределение частиц в невырожденной плазме имеет вид распределения Максвелла с температурой  $T_{\alpha}$  и плотностью  $N_{\alpha}$  (для частиц сорта  $\alpha$ ):

$$f_{0\alpha}(p) = f_{\text{Мx}}(p) = \frac{N_{\alpha}}{(2\pi m_{\alpha} T_{\alpha})^{3/2}} e^{-\frac{p_{\alpha}^2}{2m_{\alpha} T_{\alpha}}}. \quad (17.1)$$

Если плазма вырождена и энергия Ферми  $\varepsilon_{\text{F}\alpha} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 N_{\alpha}^{2/3}}{2m_{\alpha}} > T_{\alpha}$ , то распределение имеет вид распределения Ферми:

$$f_{0\alpha}(p) = f_{F\alpha}(p) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\frac{\varepsilon - \varepsilon_{F\alpha}}{T_\alpha} + 1}, \quad (17.2)$$

где  $\varepsilon = p_\alpha^2/2m_\alpha$ .

В пределе  $T_\alpha \rightarrow 0$  это распределение принимает столбчатый вид

$$f_{0\alpha} = \begin{cases} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} & \text{при } p \leq p_{F\alpha} = (3\pi^2)^{1/3} \hbar N_\alpha^{1/3} \\ 0 & \text{при } p > p_{F\alpha}. \end{cases} \quad (17.2a)$$

Если же  $T_\alpha \gg \varepsilon_{F\alpha}$ , то оно совпадает с распределением Максвелла (17.1).

Чтобы вычислить диэлектрическую проницаемость плазмы, необходимо найти отклонения функций распределения заряженных частиц от равновесных значений  $f_{0\alpha}(p)$ , возникающие вследствие действия в плазме малых электрического и магнитного полей  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  и  $\mathbf{V}(t, \mathbf{r})$ , появление которых вызвано возмущением равновесного однородного состояния плазмы. Возмущенную функцию распределения представим как

$$f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = f_{0\alpha}(p) + \delta f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) \quad (17.3)$$

и предположим, что возмущение функций распределения  $\delta f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ , а также величины возмущенных полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  малы.

Подставляя выражение (17.3) в кинетическое уравнение Власова (12.7) и пренебрегая членами второго порядка малости, получим линейаризованное кинетическое уравнение для определения возмущения функции распределения\*:

$$\frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}(p)}{\partial p} = 0. \quad (17.4)$$

В основном состоянии плазма квазинейтральна и в ней отсутствуют плотности заряда и тока. Под действием возмущающих полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  в плазме появляются индуцированные заряды и токи, которые определяются через возмущенную функцию распределения. Действительно, согласно (12.8) индуцированные плотности зарядов и токов в плазме равны

$$\rho = \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha d\mathbf{p} = \sum_\alpha e_\alpha \int \delta f_\alpha d\mathbf{p}, \quad (17.5)$$

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha d\mathbf{p} = \sum_\alpha e_\alpha \int \mathbf{v} \delta f_\alpha d\mathbf{p}.$$

\* При выводе (17.4) было учтено, что  $[\mathbf{vB}] \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p} = 0$ . Это соотношение отражает тот факт, что магнитное поле не совершает работы и поэтому не меняет изотропную функцию распределения частиц.



В свою очередь поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  определяются через  $\mathbf{j}$  и  $\rho$  посредством уравнений поля (5.1).

В силу линейности уравнения (17.4) и уравнений поля зависимость всех возмущенных величин от времени и координат представим в виде  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ . Тогда легко записать решение уравнения (17.4):

$$\delta f_{\alpha} = -i \frac{e_{\alpha} \mathbf{E}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (17.6)$$

Подставляя это выражение в (17.5), определим плотность индуцированного тока и согласно материальному уравнению (6.6) тензор проводимости плазмы:

$$j_i = -i \sum_{\alpha} e_{\alpha}^2 \int d\mathbf{p} \frac{v_i E_j}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j} \equiv \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j, \quad (17.7)$$

или

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = -i \sum_{\alpha} e_{\alpha}^2 \int d\mathbf{p} \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j}. \quad (17.8)$$

Наконец, используя связь комплексной диэлектрической проницаемости и комплексной проводимости (6.10), определим тензор  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ :

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j}. \quad (17.9)$$

В формулах (17.7) ÷ (17.9) суммирование распространяется по всем сортам заряженных частиц плазмы. В случае бесстолкновительной плазмы ее нейтральные частицы в электромагнитных явлениях участия, очевидно, не принимают. Вместе с тем необходимо подчеркнуть, что условие применимости «бесстолкновительного приближения» можно указать лишь в результате решения задачи с учетом столкновений, что и будет сделано.

Второй вопрос, на который следует обратить внимание, — наличие полюсов  $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$  в подынтегральных выражениях (17.7) ÷ (17.9). При этом, если возможно выполнение равенства  $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ , выражения (17.7) ÷ (17.9) не имеют точного смысла, поскольку результат интегрирования зависит от способа вычисления интеграла. Для устранения этой неоднозначности нужно учесть, что возмущение функции распределения  $\delta f_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$  должно исчезать при  $t \rightarrow -\infty$ . В принятой же временной зависимости  $\delta f_{\alpha} \sim \exp(-i\omega t)$  такое исчезновение  $\delta f_{\alpha}$  означает наличие хотя бы бесконечно малой положительной мнимой части у  $\omega$  при действительных значениях  $\mathbf{k}$ . В свою очередь при наличии у  $\omega$  по-

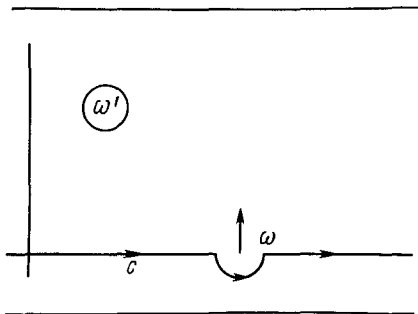


Рис. 4

ложительной мнимой части полюсы подынтегральных функций в выражениях (17.7) ÷ (17.9) уже не лежат на действительной оси  $\omega$ , вдоль которой ведется интегрирование, а оказываются смещенными в верхнюю полуплоскость  $\omega'$  (рис. 4). Это указывает правило обхода полюса  $\omega = kv$ : его нужно обходить снизу, проводя интегрирование не по действительной оси, а по контуру  $C$ , изображенному на рис. 4. В формулах (17.7) ÷ (17.9) интегрирование подразуме-

вается именно по такому контуру (правило обхода Ландау).

Воспользуемся теперь известным соотношением

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{x + iv} = \frac{\mathcal{P}}{x} - i\pi\delta(x), \quad (17.10)$$

где символ  $\mathcal{P}$  означает, что при интегрировании особенность в точке  $x = 0$  следует понимать в смысле главного значения.

Запишем выражение (17.9) в виде

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega} \int dp v_i \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j} \left[ \frac{\mathcal{P}}{\omega - kv} - i\pi\delta(\omega - kv) \right]. \quad (17.11)$$

Первое слагаемое в подынтегральном выражении (17.11) дает вклад в эрмитовскую (действительную) часть тензора диэлектрической проницаемости, а второе — в антиэрмитовскую (мнимую) часть, ответственную за поглощение волн в плазме. Видно, что за поглощение волн ответственны только те частицы, скорость которых удовлетворяет условию  $\omega = kv$ . Это условие можно записать так:  $\omega/k = v_{\phi} = v \cos\vartheta$ , где  $\vartheta$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{v}$ , а  $v_{\phi}$  — фазовая скорость волны. Но это условие есть не что иное, как условие черенковского излучения электромагнитной волны движущейся заряженной частицей. При этом же условии происходит, очевидно, и обратный процесс — черенковское поглощение волны. Таким образом, в изотропной плазме диссипация волн происходит и при полном отсутствии столкновений частиц вследствие их черенковского поглощения частицами плазмы. Рассмотрим этот эффект более подробно ввиду его важности для дальнейшего изложения.

Рассмотрим частицы, движущиеся со скоростью, большей фазовой скорости волны. Эти частицы, «догоняя» волну, будут тормозиться ее электрическим полем, а следовательно, будут отдавать энергию волне (черенковское излучение). Наоборот, частицы, скорости которых меньше фазовой скорости волны, будут «подгоняться» потенциальным барьером волны, а следовательно, отбирать энергию у волны (че-

ренковское поглощение). Ширина интервалов скоростей, в которых происходит обмен энергией между частицами и волной, одинакова как для частиц, передающих энергию волне, так и для частиц, отбирающих энергию у волны. Если при этом распределение частиц по скоростям в плазме нормальное (рис. 5), т. е. вероятность обнаружить частицу с большей скоростью меньше, чем с меньшей скоростью, то в одинаковом по величине интервале скоростей число частиц с  $v > v_\phi$  (отдающих энергию волне) меньше числа частиц с  $v < v_\phi$  (отбирающих энергию у волны).

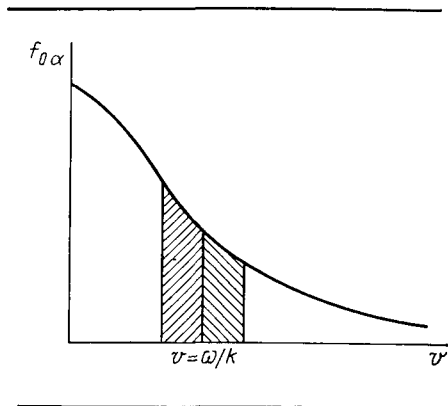


Рис. 5

В результате в такой плазме происходит увеличение суммарной энергии взаимодействующих с волной частиц — волна поглощается. Если же распределение частиц по скоростям в плазме не является нормальным и функция  $f_{0\alpha}(v)$  имеет участок с положительной производной, то в соответствующей области фазовых скоростей возможно не поглощение, а усиление электромагнитных волн.

В случае изотропной плазмы тензор  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  можно представить в виде

$$\epsilon_{ij} = \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \epsilon^{tr}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon^l(\omega, k), \quad (17.12)$$

где

$$\epsilon^l(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega k^2} \int d\mathbf{p} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathcal{E}_{\alpha}}, \quad (17.13)$$

$$\epsilon^{tr}(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{2\pi e_{\alpha}^2}{\omega k^2} \int d\mathbf{p} \frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathcal{E}_{\alpha}}$$

— соответственно продольная и поперечная диэлектрические проницаемости, а  $\mathcal{E}_{\alpha} = p^2/2m_{\alpha}$  — энергия частицы сорта  $\alpha$ .

В случае максвелловского распределения (17.1) входящие в (17.13) интегралы вычисляются до конца, причем

$$\epsilon^l(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left[ 1 - J_+ \left( \frac{\omega}{k v_{T\alpha}} \right) \right], \quad (17.14)$$

$$\epsilon^{tr}(\omega, k) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2} J_+ \left( \frac{\omega}{k v_{T\alpha}} \right).$$

Здесь

$$J_+(x) = x e^{-x^2/2} \int_{i\infty}^x d\tau e^{\tau^2/2} = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x W\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \quad (17.15)$$

Функция  $W(x)$  подробно изучена и протабулирована. В дальнейшем понадобятся следующие асимптотические значения функции  $J_+(x)$ :

$$J_+(x) = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \dots - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x e^{-x^2/2} \quad (17.16)$$

(при  $x \gg 1$ ,  $|\operatorname{Re} x| \gg |\operatorname{Im} x|$ );

$$J_+(x) \approx -i \sqrt{\pi/2} x \quad (\text{при } |x| \ll 1),$$

$$J_+(x) = -i \sqrt{2\pi} x e^{-x^2/2} \quad (\text{при } |x| \gg 1, |\operatorname{Im} x| \gg |\operatorname{Re} x|, \operatorname{Im} x < 0),$$

на основе которых будет проведен анализ спектров колебаний и характера распространения электромагнитных волн в плазме.

Не представляет большого труда вычислить по формулам (17.13) продольную и поперечную диэлектрические проницаемости вырожденного газа с функцией распределения Ферми (17.2). Учитывая, что в случае распределения Ферми

$$\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \varepsilon} = -\frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{F\alpha}), \quad (17.17)$$

из (17.13) находим

$$\begin{aligned} \varepsilon^l(\omega, k) &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{F\alpha}^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega}{k v_{F\alpha}} \ln \frac{\omega + k v_{F\alpha}}{\omega - k v_{F\alpha}} \right], \\ \varepsilon^{tr}(\omega, k) &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{2\omega^2} \left[ 1 + \left( \frac{\omega^2}{k^2 v_{F\alpha}^2} - 1 \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega}{k v_{F\alpha}} \ln \frac{\omega + k v_{F\alpha}}{\omega - k v_{F\alpha}} \right) \right], \end{aligned} \quad (17.18)$$

где  $v_{F\alpha} = p_{F\alpha}/m_{\alpha} = (3\pi^2)^{1/3} \hbar N_{\alpha}^{1/3}/m_{\alpha}$  — скорость частиц сорта  $\alpha$  на поверхности Ферми, т. е. с импульсом  $p_{F\alpha}$ .

В заключение заметим, что в формулах (17.14) и (17.18) суммирование распространяется по всем сортам заряженных частиц, поскольку предполагается, что плазма либо полностью не вырождена [формула (17.14)], либо полностью вырождена [формула (17.18)]. Если в плазме частицы одного сорта вырождены, а частицы другого не вырождены, то диэлектрическая проницаемость представляет собой сумму выражений (17.14) и (17.18).

## § 18. Спектры продольных колебаний бесстолкновительной невырожденной плазмы

Перейдем к исследованию электромагнитных волн в однородной изотропной плазме на основе полученных в предыдущем параграфе выражений для диэлектрической проницаемости бесстолкновительной плазмы. Начнем с анализа продольных волн, условие существования которых дается дисперсионным уравнением (8.6). В случае невырожденной плазмы это дисперсионное уравнение принимает вид

$$\epsilon^l(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left[ 1 - J_+ \left( \frac{\omega}{k v_{T\alpha}} \right) \right] = 0. \quad (18.1)$$

Уравнение (18.1) является трансцендентным и в общем случае имеет много комплексных решений  $\omega(k)$ . Рассмотрим наиболее интересные из них, соответствующие слабозатухающим колебаниям.

а. Область быстрых волн, фазовая скорость которых много больше тепловых скоростей заряженных частиц:

$$\omega/k \gg v_{Te}, v_{Ti}. \quad (18.2)$$

Используя асимптотическое представление (17.16) для  $J_+(x)$ , дисперсионное уравнение для слабозатухающих волн  $\text{Re } \omega \gg \text{Im } \omega$  запишем в виде

$$\epsilon^l(\omega, k) \approx 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left( 1 + 3 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{Le}^2}{k^3 v_{Te}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}} = 0. \quad (18.3)$$

Здесь пренебрежено вкладом ионных членов, поскольку он существует только при выполнении условия  $T_i \geq T_e \frac{M^2}{m^2}$ , т. е. когда температура ионов более чем на шесть порядков превышает температуру электронов. Как следует из приведенных в гл. I значений температур электронов и ионов плазмы в различных условиях, плазмы с таким отношением  $T_i/T_e$  в природе, по-видимому, не существует. Это означает, что в рассматриваемой области частот плазму можно считать чисто электронной; при этом роль ионов сводится к нейтрализации заряда электронов (квазинейтральность основного состояния плазмы).

Поскольку  $\frac{\omega}{k v_{Te}} \gg 1$ , мнимый член в (18.3) экспоненциально мал и для решения этого уравнения можно воспользоваться изложенным в § 10 методом определения спектра слабозатухающих колебаний. Положим, что частота волны имеет мнимую часть  $\delta$  ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ ). Тогда действительная часть  $\omega$  определится из уравнения

$$\text{Re } \epsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{3k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right) = 0, \quad (18.4)$$

откуда

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 \left( 1 + 3 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega_{Le}^2} \right) = \omega_{Le}^2 (1 + 3k^2 r_{De}^2). \quad (18.5)$$

Здесь учтено, что  $\omega \approx \omega_{Le}$ , поэтому в малых слагаемых  $\omega$  заменяется на  $\omega_{Le}$ .

Поскольку неравенства (18.2) считаются выполненными, второй член в скобках в выражении (18.5) является малой поправкой, т. е.  $k^2 r_{De}^2 \ll 1$ . Таким образом, слабозатухающие быстрые продольные колебания в плазме имеют длину волны  $\lambda \sim 1/k \ll r_{De}$ . Продольные волны со спектром (18.5) называют электронными плазменными волнами или просто плазменными волнами. Они образуют высокочастотную ( $\omega > \omega_{Le}$ ) ветвь продольных колебаний изотропной плазмы, которую часто называют также электронной ветвью колебаний, поскольку, как указывалось, вкладом ионов в плазменные колебания можно пренебречь и рассматривать плазму в этой области частот как чисто электронную.

Декремент затухания  $\delta$  плазменных волн вычисляют по общей формуле (10.41) в условиях малости затухания ( $\delta \ll \omega$ ) через  $\text{Im } \epsilon^l(\omega, k)$ :

$$\delta = - \frac{\text{Im } \epsilon^l(\omega, k)}{\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re } \epsilon^l(\omega, k)} \approx - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{\omega_{Le}}{k^3 r_{De}^3} e^{-\frac{1}{2(kr_{De})^2} - \frac{3}{2}}. \quad (18.6)$$

Отсюда следует, что при  $kr_{De} \ll 1$  затухание плазменных волн экспоненциально мало. Этот результат легко объяснить физически. Действительно, фазовая скорость плазменной волны много больше средней тепловой скорости электронов. Поэтому в поглощении плазменной волны в условиях, когда  $\omega \approx \omega_{Le}$ , а следовательно,  $kr_{De} \ll 1$ , принимают участие только очень быстрые электроны (см. рис. 5),

число которых при максвелловском распределении экспоненциально мало («хвост» распределения Максвелла). Такое затухание плазменных волн называют затуханием Ландау.

Из выражения (18.6) видно, что с ростом  $k$  затухание плазменных волн растет и при  $kr_{De} \approx 1$   $\delta \approx \omega$ . Однако при больших значениях  $k$  нельзя пользоваться полученным выражением для  $\delta$ , поскольку оно справедливо при  $kr_{De} \ll 1$ . Таким образом, из (18.6) можно видеть только тенденцию увеличения затухания продольной плазменной волны с

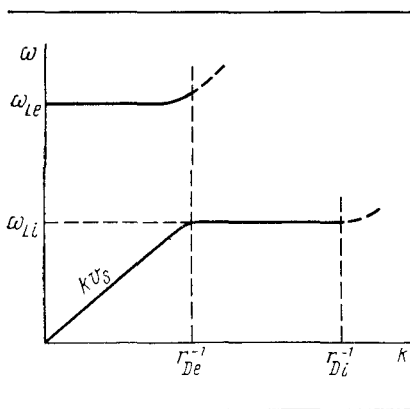


Рис. 6

ростом  $k$ , т. е. с уменьшением длины волны (о сильнозатухающих колебаниях при  $k^2 r_{De}^2 > 1$  см. задачу 3 в конце этой главы). Спектр продольных плазменных волн, образующих высокочастотную ветвь колебаний в плазме, изображен на рис. 6 (верхняя кривая), причем сильнозатухающая часть спектра в области  $kr_{De} > 1$  изображена пунктиром.

б. Область продольных колебаний промежуточных фазовых скоростей, когда

$$v_{Ti} \ll \omega/k \ll v_{Te}. \quad (18.7)$$

При условии  $\text{Re } \omega \gg \text{Im } \omega$ , т. е. слабого затухания, дисперсионное уравнение (18.1) запишется в виде

$$\begin{aligned} \epsilon^l(\omega, k) = 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega}{k v_{Te}} \right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left( 1 + \right. \\ \left. + 3 \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega^3}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (18.8)$$

Мнимые члены в этом уравнении малы по сравнению с действительными. Поэтому его решение можно легко получить общим приближенным методом, который уже использовался при выводе выражений (18.5) и (18.6). В результате для спектра частот  $\omega(k)$  и декремента затухания  $\delta(k)$  продольных волн в рассматриваемой области фазовых скоростей получаем

$$\begin{aligned} \omega^2 = \omega_{Li}^2 \left[ 1 + 3k^2 r_{Di}^2 \left( 1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \right) \right] \left( 1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \right)^{-1}, \\ \delta = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{M}{m} \cdot \frac{1}{Z} \cdot \frac{\omega^4}{k^3 v_{Te}^3} \left[ 1 + Z \sqrt{\frac{M}{m}} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \times \right. \\ \left. \times \exp \left( -\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (18.9)$$

При этом учтено условие квазинейтральности  $N_e = ZN_i$ , где  $Z = |e_i/e|$  — зарядовое число иона. Из условия  $\omega \gg kv_{Ti}$  сразу же следует, что волны со спектром (18.9) возможны лишь в неизоэотермической плазме ( $T_e \gg T_i$ ) и в области длин волн  $k^2 r_{Di}^2 \ll 1$ . Спектр рассматриваемых колебаний представлен на рис. 6 (нижняя кривая). Найденный спектр частот слабозатухающих колебаний существенно зависит от ионной компоненты плазмы, поэтому его часто называют ионной или низкочастотной ветвью продольных волн в плазме. Особо простой вид принимает спектр (18.9) в пределе

$kr_{De} \ll 1$ , когда он переходит в так называемый спектр ионно-звуковых колебаний:

$$\omega^2 = k^2 Z \frac{T_e}{M} \left( 1 + 3 \frac{T_i}{Z T_e} \right) = k^2 v_s^2, \quad (18.10)$$

$$\delta = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega \sqrt{\frac{Z m}{M}} \left[ 1 + Z \sqrt{\frac{M}{m}} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} e^{-\frac{3}{2} - \frac{Z T_e}{2 T_i}} \right].$$

Такие колебания неизоотермической плазмы называют ионно-звуковыми в силу аналогии спектра (18.10) со спектром обычных звуковых колебаний жидкости с фазовой скоростью

$$v_s = \sqrt{Z \frac{T_e}{M} \left( 1 + \frac{3 T_i}{Z T_e} \right)}.$$

Определим теперь, насколько велика должна быть неизоотермичность, чтобы соблюдалось условие  $|\delta| \ll \omega$ . Легко видеть, что для выполнения этого неравенства необходимо, чтобы

$$\left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} e^{-\frac{3}{2} - \frac{Z T_e}{2 T_i}} \ll 1, \text{ откуда при } Z = 1 \text{ получаем } T_e/T_i > 6.$$

В обратном же пределе коротких длин волн, когда  $k^2 r_{De}^2 \gg 1$ , но  $k^2 r_{Di}^2 \ll 1$ , спектр (18.9) принимает вид

$$\omega^2 \approx \omega_{Li}^2, \quad (18.11)$$

$$\delta = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} Z \frac{m}{M} \cdot \frac{\omega_{Li}}{k^3 r_{De}^3} \left[ 1 + Z \sqrt{\frac{M}{m}} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} e^{-\frac{\omega_{Li}^2}{2 k^2 v_{Ti}^2} - \frac{3}{2}} \right].$$

Анализ декремента (18.11) показывает, что эти колебания являются слабозатухающими (на графике рис. 6 им соответствует горизонтальный участок нижней кривой) в случае, когда плазма сильно неизоотермична. Физически появление в неизоотермической плазме колебаний на ионной ленгмюровской частоте вполне естественно, поскольку в этих условиях быстро и свободно движущиеся электроны создают постоянный отрицательный пространственный заряд, на фоне которого возможны низкочастотные колебания ионов с частотой  $\omega_{Li}$  (аналогично ленгмюровским колебаниям электронов на фоне положительного пространственного заряда ионов).

в. Область самых медленных низкочастотных продольных волн, для которых

$$\omega/k < v_{Ti}, v_{Te}. \quad (18.12)$$

В этой области частот согласно (17.14) продольная диэлектрическая проницаемость плазмы имеет такой же, как в статическом пределе, вид



$$\varepsilon^l(\omega, k) \approx \varepsilon^l(0, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}, \quad (18.13)$$

где  $r_D = \left( \sum_{\alpha} \frac{1}{r_{D\alpha}^2} \right)^{-1/2}$  — дебаевский радиус невырожденной плазмы.

Это означает, что в этой области частот происходит экранирование продольного поля в плазме с радиусом экранирования, равным дебаевскому радиусу (см. также задачу 2, гл. II).

Аналогичное экранирование имеет место и при  $kv_{Ti} \ll \omega \ll \ll kv_{Te}$  в области частот  $\omega \gg \omega_{Li}$ . В этом случае продольная диэлектрическая проницаемость (17.14) также не зависит от частоты, имеет вид (18.13) и приводит к радиусу экранирования  $r_{\text{экp}} = r_{De}$ . Это соответствует экранированию высокочастотного продольного поля в области частот  $\omega_{Li}^2 \ll \omega^2 \ll \omega_{Le}^2$ .

### § 19. Продольные колебания бесстолкновительной вырожденной плазмы

Как отмечалось, электронная плазма металлов и электронно-дырочная плазма полупроводников при низких температурах оказываются вырожденными. Исследуем характер колебаний такой плазмы. Дисперсионное уравнение для продольных колебаний изотропной вырожденной плазмы согласно (8.6) и (17.18) записывается в виде

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{F\alpha}^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega}{kv_{F\alpha}} \ln \frac{\omega + kv_{F\alpha}}{\omega - kv_{F\alpha}} \right] = 0. \quad (19.1)$$

а. Область быстрых волн, фазовая скорость которых много больше скоростей Ферми электронов и ионов (дырок), т. е.

$$\omega/k \gg v_{Fe}, v_{Fi}. \quad (19.2)$$

При этом уравнение (19.1) принимает вид

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{k^2 v_{Fe}^2}{\omega^2} \right) = 0. \quad (19.3)$$

Отсюда спектр частот колебаний

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 \left( 1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{k^2 v_{Fe}^2}{\omega_{Le}^2} \right) = \omega_{Le}^2 \left( 1 + \frac{1}{5} k^2 r_{De}^2 \right), \quad (19.4)$$

где  $r_{De}^2 = 3v_{Fe}^2/\omega_{Le}^2$ .

Этот спектр подобен спектру высокочастотных ленгмюровских колебаний невырожденной плазмы (18.5) и, так же как и последний, справедлив в пределе  $k^2 r_{De}^2 \ll 1$ .

Следует, однако, отметить существенное отличие электронных колебаний вырожденной плазмы от ленгмюровских колебаний невырожденной плазмы. Высокочастотные электронные колебания вырожденной плазмы в отсутствие столкновений частиц совершенно не затухают, в то время как ленгмюровские колебания невырожденной плазмы хотя и экспоненциально слабо, но все-таки затухают, и декремент их затухания определяется формулой (18.6). Это объясняется особенностью распределения Ферми по скоростям. Дело в том, что в вырожденной плазме согласно распределению Ферми скорости хаотического движения электронов не могут превышать скорость Ферми, поэтому в поглощении волн с фазовой скоростью, большей скорости Ферми, электроны не участвуют.

Как следствие, электронные колебания в вырожденной плазме оказываются незатухающими вплоть до фазовых скоростей  $\omega/k \rightarrow v_{Fe}$ . Действительно, в пределе  $k^2 r_{De}^2 \gg 1$  из уравнения (19.1) находим

$$\omega = kv_{Fe} \left[ 1 + 2 \exp \left( -\frac{2}{9} k^2 r_{De}^2 - 2 \right) \right]. \quad (19.5)$$

Эти колебания известны под названием нулевого звука.

б. Рассмотрим теперь продольные колебания в области промежуточных фазовых скоростей, когда  $v_{Fi} \ll \omega/k \ll v_{Fe}$  и уравнение (19.1) для вырожденной плазмы записывается в виде

$$\epsilon^l(\omega, k) = 1 + \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} \left( 1 + i \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{kv_{Fe}} \right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} = 0, \quad (19.6)$$

откуда находим спектр частот и декремент затухания колебаний:

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Li}^2}{1 + \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2}}, \quad \delta = -\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{\omega^4}{k^3 v_{Fe}^3} \cdot \frac{M}{m} \cdot \frac{1}{Z}. \quad (19.7)$$

Здесь электроны плазмы принимают активное участие в поглощении колебаний, поскольку скорость их хаотического движения намного превышает фазовую скорость колебаний. Ионы же плазмы совершенно не поглощают такие колебания, поэтому декремент затухания полностью определяется электронным поглощением волн.

Рассмотренные низкочастотные колебания по аналогии с ионно-звуковыми колебаниями невырожденной плазмы со спектром (18.9) можно было бы назвать ионно-звуковыми колебаниями вырожденной плазмы, тем более, что они возможны не только в полностью вырожденной плазме, в которой вырождены как электроны, так и ионы (дырки), но и в частично вырожденной плазме, когда ионы не вырождены. Спектр частот (19.7) при этом не меняется, меняется лишь декремент затухания колебаний вследствие учета поглощения волн на максвелловски распределенных ионах плазмы:

$$\delta = -\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{\omega^4}{k^3 v_{Fe}^3} \cdot \frac{M}{m} \cdot \frac{1}{Z} - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{\omega^4}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}}. \quad (19.8)$$

Следует отметить, что в вырожденной электронно-ионной плазме ионно-звуковые колебания простираются вплоть до фазовых скоростей  $\omega/k \rightarrow v_{Fi}$ . Однако в отличие от (19.7) такие колебания возможны только в пределе  $k^2 v_{Fi}^2 \gg \omega_{Li}^2$  и их спектр дается формулой

$$\omega = kv_{Fi} \left\{ 1 + 2 \left( 1 - i\pi \frac{M}{m} \cdot \frac{v_{Fi}^3}{v_{Fe}^3} \right) \exp \left( -\frac{2}{3} \cdot \frac{k^2 v_{Fi}^2}{\omega_{Li}^2} - 2 \right) \right\}. \quad (19.9)$$

в. Наконец, в области самых низких частот  $\omega \ll kv_{Fe}$ ,  $kv_{Fi}$  в вырожденной плазме имеет место экранирование продольного поля, поскольку

$$\epsilon^l(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{F\alpha}^2} = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}. \quad (19.10)$$

Здесь  $r_D = \left( \sum_{\alpha} \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{v_{F\alpha}^2} \right)^{-1/2}$  — дебаевский радиус вырожденной плазмы, который определяет глубину экранирования низкочастотного поля в плазме.

Так же как и в невырожденной плазме, подобное экранирование в вырожденной плазме имеет место при  $v_{Fi} \ll \omega/k \ll v_{Fe}$ , в области частот  $\omega_{Le}^2 \gg \omega^2 \gg \omega_{Li}^2$ . Радиус экранирования, однако, при этом равен  $r_{De}$ .

## § 20. Поперечные волны в бесстолкновительной изотропной плазме

Перейдем к изучению спектров поперечных электромагнитных волн в однородной изотропной плазме, описываемых дисперсионным уравнением (8.6):

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon^l(\omega, k) = 0. \quad (20.1)$$

В случае невырожденной плазмы в это уравнение следует подставить выражение для поперечной диэлектрической проницаемости (17.14), в случае вырожденной плазмы — (17.18).

Как и в предыдущих параграфах, уравнение (20.1) проанализируем в противоположных пределах больших и малых фазовых скоростей волн (высоких и низких частот).

а. Области быстрых волн, когда  $\omega/k \gg v_{Te}$  — для невырожденной плазмы и  $\omega/k \gg v_{Fa}$  — для вырожденной плазмы. Уравнение (20.1) при подстановке выражений (17.14), (17.18) в этом пределе

записывается приближенно в виде

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, k) \approx k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2} \right) \approx 0. \quad (20.2)$$

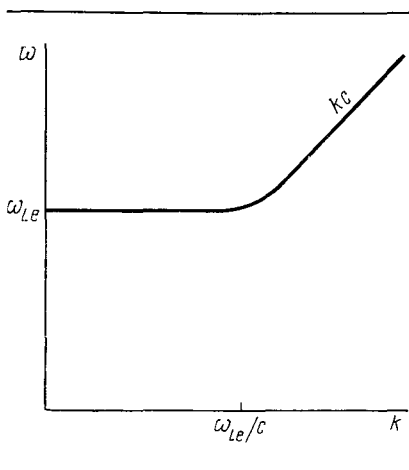
Отсюда получаем спектр высокочастотных поперечных волн в изотропной плазме, не зависящий от степени вырождения плазмы:

$$\omega^2 \approx k^2 c^2 + \omega_{Le}^2. \quad (20.3)$$

Ионными слагаемыми в этой области частот можно пренебречь и считать плазму чисто электронной. Кроме того, спектр частот поперечных волн по существу не зависит от теплового движения частиц плазмы, поскольку их фазовая скорость больше скорости света и намного превышает скорость теплового хаотического движения заряженных частиц плазмы (напомним, что рассматривается нерелятивистская равновесная плазма). Следствием последнего является полное отсутствие поглощения таких волн частицами плазмы при пренебрежении столкновениями. Строго говоря, выражение (17.14) имеет отличную от нуля мнимую часть даже при фазовых скоростях, больших скорости света. Однако это является результатом неточности максвелловского распределения при скоростях частиц  $v \gg c$  и ее не следует учитывать. В вырожденной же плазме этой проблемы вообще не возникает.

Таким образом, быстрые высокочастотные поперечные волны в бесстолкновительной изотропной плазме являются незатухающими со спектром (20.3), графически представленным на рис. 7.

б. Область поперечных волн с малыми фазовыми скоростями, когда  $\omega \ll kv_{Te}$  — для невырожденной и  $\omega \ll kv_{Fe}$  — для вырожденной плазмы. В этой области частот независимо от соотношения между фазовой скоростью волны и скоростью хаотического движения ионов вкладом ионных слагаемых в диэлектрическую проницаемость плазмы практически всегда можно пренебречь. При этом для невырожденной плазмы



$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) \approx 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{Le}^2}{\omega kv_{Te}} \quad (20.4)$$

Подстановка этого выражения в (20.1) дает спектр

$$\omega = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{k^3 c^2 v_{Te}}{\omega_{Le}^2}. \quad (20.5)$$

Отсюда видно, что частота поперечных колебаний является чисто мнимой. Это означает, что поперечные колебания в низкочастотной

Рис. 7

области аperiодически затухают вследствие их сильного бесстолкнoвительного поглощения электронами плазмы. В этой области частот их даже нельзя называть волнами. Поэтому чаще говорят о быстром поглощении низкочастотного поперечного поля в плазме, имея при этом ввиду граничную задачу. Разрешив дисперсионное уравнение (20.5) относительно  $k(\omega)$ , находим простраhственный масштаб затухания волн, или, как говорят, г л у б и н у п р о н и к н о в е н и я  $\lambda_{\text{ск}}$  низкочастотного поперечного поля в плазму:

$$\lambda_{\text{ск}} = \frac{1}{\text{Im } k} = 2 \sqrt[6]{\frac{2}{\pi} \left( \frac{c^2 v_{Te}}{\omega \omega_{Le}^2} \right)^{1/3}}. \quad (20.6)$$

Полученная глубина проникновения описывает глубину скинирования (скин-эффект) поперечного поля в плазме, связанного с диссипацией энергии из-за черенковского поглощения. Из выражения для  $\lambda_{\text{ск}}$  следует, что в этом случае глубина проникновения  $\lambda_{\text{ск}} \sim \sim \omega^{-1/3}$  в отличие от обычной частотной зависимости  $\lambda_{\text{ск}} \sim \omega^{-1/2}$  — глубины скин-слоя, обусловленного столкновениями частиц (см. следующий параграф). В этой связи с к и н - э ф ф е к т, обусловленный бесстолкнoвительным затуханием (поглощением) поперечных волн в плазме, называют а н о м а л ь н ы м.

Ясно, что аналогично скинируется низкочастотное поперечное поле в случае вырожденной плазмы, в которой

$$\epsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) \approx 1 + i \frac{3\pi \omega_{Le}^2}{4\omega k v_{Fe}}. \quad (20.7)$$

Подстановка этого выражения в (20.1) приводит к спектру аperiодически затухающих волн:

$$\omega = -i \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{k^3 c^2 v_{Fe}}{\omega_{Le}^2}. \quad (20.8)$$

Отсюда получаем глубину проникновения низкочастотного поля в вырожденную плазму

$$\lambda_{\text{ск}} = \frac{1}{\text{Im } k} = 2 \left( \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{c^2 v_{Fe}}{\omega_{Le}^2 \omega} \right)^{1/3}. \quad (20.9)$$

Как и следовало ожидать, формулы (20.7) ÷ (20.9) по существу отличаются от (20.4) ÷ (20.6) заменой  $v_{Te}$  на  $v_{Fe}$ .

Из выражений (20.6) и (20.9) для глубины скин-слоя следует, что в бесстолкнoвительной плазме при  $\omega \rightarrow 0$  величина  $\lambda_{\text{ск}} \rightarrow \infty$ , т. е. низкочастотное поперечное поле проникает в плазму сколь угодно глубоко. В этой связи напомним, что, как было показано, продольное поле в статическом пределе ( $\omega \rightarrow 0$ ) экранируется, причем глубина проникновения электростатического поля в плазму определяется дебаевским радиусом.

## § 21. Диэлектрическая проницаемость и спектры колебаний слабоионизованной плазмы с учетом столкновений частиц

До сих пор рассматривались колебания и волны в плазме при условии полного пренебрежения столкновениями частиц. Их учет позволит, во-первых, определить границы применимости приближения бесстолкновительной плазмы, т. е. пределы применимости полученных ранее формул. Во-вторых, это означает учет обычных столкновительных механизмов диссипации энергии в плазме, таких, как трение (т. е. передача импульсов от одних частиц к другим), теплопроводность, диффузия и вязкость. Наконец, только при учете столкновений частиц можно оправдать выбор равновесной стационарной функции распределения заряженных частиц в плазме в виде термодинамически равновесного распределения Максвелла, либо распределения Ферми.

Анализ диэлектрической проницаемости плазмы с учетом столкновений частиц начнем со слабоионизованной невырожденной плазмы, когда интеграл упругих столкновений в кинетическом уравнении для заряженных частиц можно аппроксимировать модельным интегралом БГК (15.1), а столкновениями заряженных частиц между собой — пренебречь. Простота анализа диэлектрической проницаемости такой плазмы облегчит в дальнейшем анализ более сложного случая полностью ионизованной плазмы.

Кинетическое уравнение для заряженных частиц сорта  $\alpha$  в слабоионизованной плазме с модельным интегралом столкновений БГК записывается в виде (см. § 15)

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_\alpha} = -\nu_{\alpha n} (f_\alpha - N_\alpha \Phi_{\alpha n}), \quad (21.1)$$

где  $\nu_{\alpha n}$  — частота столкновений заряженных частиц с нейтральными, которая в этой модели считается постоянной величиной, а

$$N_\alpha = \int dp f_\alpha, \quad (21.2)$$

$$\Phi_{\alpha n} = \frac{1}{(2\pi m_\alpha T_\alpha)^{3/2}} e^{-\frac{m_\alpha v^2}{2T_{\alpha n}}}, \quad T_{\alpha n} = \frac{m_\alpha T_n + M_n T_\alpha}{m_\alpha + M_n}.$$

Напомним, что индекс « $\alpha$ » ( $\alpha = e, i$ ) относится к заряженным частицам, а « $n$ » — к нейтральным. В дальнейшем для простоты рассмотрим изотермическую модель простой плазмы, т. е. будем считать, что массы нейтральных частиц и ионов, а также их температуры совпадают:  $m_i = M_n = M$ ,  $T_i = T_n$ . Тем самым будем предполагать, что ионы плазмы образованы в результате ионизации нейтральных атомов того же вещества. При этом с точностью до членов порядка  $\sim m/M$  имеем  $T_{en} = T_e$ . Таким образом, в формулах (21.2) можно полагать

$T_{an} = T_\alpha$ , а функцию  $\Phi_{an}$  совпадающей с максвелловской функцией распределения, нормированной на единицу:

$$\Phi_{an} = \frac{1}{(2\pi m_\alpha T_\alpha)^{3/2}} e^{-\frac{m_\alpha v^2}{2T_\alpha}}. \quad (21.3)$$

В стационарном равновесном состоянии в отсутствие внешних полей уравнение (21.1) допускает лишь единственное решение в виде функции распределения Максвелла, нормированной на равновесную плотность частиц сорта  $\alpha$ , т. е.  $N_{0\alpha}$ :

$$f_{0\alpha} = N_{0\alpha} \Phi_{\alpha n}.$$

Рассматривая далее малое возмущение функции распределения  $\delta f_\alpha$ , вызванное появлением малых полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , из уравнения (21.1) после его линеаризации получим

$$\frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} = -\nu_{an} (\delta f_\alpha - \int d\mathbf{p} \delta f_\alpha \Phi_{an}). \quad (21.4)$$

Решение этого линейного кинетического уравнения для плоских монохроматических волн ( $\mathbf{E}, \delta f_\alpha \sim \exp[-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}]$ ) можно записать в виде

$$\delta f_\alpha = i \frac{e_\alpha}{T_\alpha} \frac{(\mathbf{v}\mathbf{E}) f_{0\alpha}}{\omega + i\nu_{an} - \mathbf{k}\mathbf{v}} + i \frac{\nu_{an} \eta_\alpha f_{0\alpha}}{\omega + i\nu_{an} - \mathbf{k}\mathbf{v}}, \quad (21.5)$$

где

$$\eta_\alpha = \frac{1}{N_{0\alpha}} \int d\mathbf{p} \delta f_\alpha \quad (21.6)$$

— возмущение плотности частиц, нормированное на равновесное значение плотности.

Величину  $\eta_\alpha$  легко определить, интегрируя выражение (21.5) по импульсу, либо используя уравнение непрерывности для частиц сорта  $\alpha$ :

$$\eta_\alpha = \frac{\mathbf{k}\mathbf{j}_\alpha}{e_\alpha N_{0\alpha} \omega}, \quad \mathbf{j}_\alpha = e_\alpha \int d\mathbf{p} \mathbf{v} \delta f_\alpha. \quad (21.7)$$

Подставляя (21.5) в формулу (21.7), легко определить плотность тока  $\mathbf{j}_\alpha$ . Произведя расчеты, аналогичные проведенным в § 17, окончательно получим для продольной и поперечной диэлектрических проницаемостей:

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \cdot \frac{1 - J_+ \left( \frac{\omega + i\nu_{an}}{k v_{T\alpha}} \right)}{1 - \frac{i\nu_{an}}{\omega + i\nu_{an}} J_+ \left( \frac{\omega + i\nu_{an}}{k v_{T\alpha}} \right)}, \quad (21.8)$$

$$\varepsilon^t(\omega, k) = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega (\omega + i\nu_{an})} J_+ \left( \frac{\omega + i\nu_{an}}{k v_{T\alpha}} \right),$$

где суммирование распространяется только по заряженным частицам плазмы.

Переходя к исследованию спектров колебаний изотропной плазмы с учетом столкновений частиц, прежде всего заметим, что в статическом пределе ( $\omega \rightarrow 0$ ) в столкновительной плазме, так же как и в бесстолкновительной, продольная диэлектрическая проницаемость имеет вид [ср. (18.13)]

$$\epsilon^l(0, k) = 1 + \sum_a \frac{\omega_{La}^2}{k^2 v_{Ta}^2} = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}, \quad (21.9)$$

что приводит к дебаевскому экранированию статического продольного поля в плазме. Таким образом, столкновения частиц не влияют явно на поведение электростатического поля в плазме.

Иное положение имеет место в высокочастотной области, когда  $\omega \gg kv_{Ta}, \nu_{an}$ . При полном пренебрежении столкновениями частиц по отношению к продольным колебаниям плазму можно считать чисто электронной, как было показано в § 18, ионными слагаемыми в этой области можно пренебречь. Это положение сохраняется и при учете столкновений частиц, но уравнение (18.3) несколько меняется:

$$\begin{aligned} \epsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left( 1 + 3 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega \omega_{Le}^2}{k^3 v_{Te}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}} + \\ + i \frac{\omega_{Le}^2 \nu_{en}}{\omega^3} = 0. \end{aligned} \quad (21.10)$$

В этом уравнении имеются два мнимых члена. Первый из них обусловлен бесстолкновительным черенковским поглощением волн в плазме, а второй имеет чисто столкновительную природу и описывает диссипацию энергии поля в плазме благодаря передаче импульса электрона нейтральной частице при столкновениях (электронное трение). Таким образом, в высокочастотном пределе бесстолкновительный и столкновительный механизмы диссипации дают аддитивный вклад в дисперсионное уравнение для продольных колебаний плазмы; недиссипативная же часть уравнения не меняется. В результате спектр частот продольных колебаний (18.5) остается без изменения, а в выражении для декремента затухания (18.6) появляется столкновительная поправка

$$\Delta\delta = -\nu_{en}/2, \quad (21.11)$$

которая может быть больше бесстолкновительного затухания Ландау, особенно в области длинных волн, когда

$$\nu_{en} > \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{Le}}{k^3 r_{De}^3} e^{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2k^2 r_{De}^2}}. \quad (21.12)$$



В противоположном случае, т. е. для коротких волн, столкновительное затухание пренебрежимо мало по сравнению с бесстолкновительным затуханием Ландау.

Кроме высокочастотных продольных колебаний, как было показано в § 18, в изотропной бесстолкновительной плазме возможны также низкочастотные (медленные), так называемые ионно-звуковые колебания. Они существуют лишь в сильно неизотермической плазме, в которой  $T_e \gg T_i$ ; фазовая скорость этих колебаний лежит в пределах  $v_{Ti} \ll \omega/k \ll v_{Te}$ . Очевидно, что такие колебания должны существовать и в столкновительной плазме, если столкновения частиц достаточно редки. Действительно, при  $\omega \gg v_{in}$  и  $|\omega + iv_e| \ll \ll kv_{Te}$  в указанной области фазовых скоростей из выражения (21.8) получаем

$$\begin{aligned} \epsilon^l(\omega, k) = & 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega}{k v_{Te}} \right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left( 1 + \right. \\ & \left. + 3 \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{Li}^2 \omega}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}} + i \frac{\omega_{Li}^2 v_{in}}{\omega^3} = 0. \end{aligned} \quad (21.13)$$

Это уравнение отличается от (18.8) последним слагаемым, учитывающим столкновения ионов с нейтральными частицами (ионное трение), что приводит к столкновительной поправке к декременту затухания ионно-звуковых волн (18.9):

$$\Delta\delta = -v_{in}/2. \quad (21.14)$$

Следует обратить внимание на то, что в рассматриваемой области частот столкновения электронов не дают вклада в диссипацию продольных колебаний в плазме. Это является следствием неравенства  $v_e \ll kv_{Te}$ , согласно которому длина волны намного меньше длины свободного пробега электронов, и, как результат, отбор энергии поля электронами происходит значительно интенсивнее из-за черенковского механизма поглощения.

Наконец, рассмотрим влияние столкновений частиц на характер распространения поперечных электромагнитных волн в слабоионизованной плазме. В предыдущем параграфе было показано, что высокочастотные поперечные волны со спектром (20.5), обладающие фазовой скоростью, большей скорости света, в бесстолкновительном пределе вообще не поглощаются в плазме. При учете редких столкновений частиц, когда  $\omega > v_{en}$  и поперечная диэлектрическая проницаемость принимает вид

$$\epsilon^{tr}(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left( 1 - i \frac{v_{en}}{\omega} \right), \quad (21.15)$$

Появляется затухание таких волн, обусловленное электронным тре-

нием, причем декремент их затухания

$$\delta = -\frac{\nu_{en}}{2} \cdot \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_{Le}^2 + k^2 c^2}. \quad (21.16)$$

В области же низких частот (малых фазовых скоростей) уже в бесстолкновительной плазме поперечные волны оказываются сильно-затухающими. Поэтому очевидно, что учет столкновений в этой области не может привести к появлению слабозатухающих собственных волн.

Не представляет большого труда исследовать спектры колебаний слабоионизованной вырожденной плазмы, столкновения частиц в которой описываются модельным интегралом (15.6). Линеаризованное по малым возмущениям кинетическое уравнение при этом записывается так [ср. с (21.4)]:

$$\frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha (\mathbf{E}\mathbf{v}) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathcal{E}} = -\nu_{\alpha n} \left( \delta f_\alpha + \frac{2}{3} \mathcal{E}_{F\alpha} \cdot \frac{\int d\mathbf{p} \delta f_\alpha}{N_{0\alpha}} \right). \quad (21.17)$$

Отсюда для решений вида  $\delta f_\alpha \sim \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$  имеем

$$\delta f_\alpha = -i \frac{e_\alpha (\mathbf{E}\mathbf{v}) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathcal{E}}}{\omega + i\nu_{\alpha n} - \mathbf{k}\mathbf{v}} - i \frac{2}{3} \frac{\nu_{\alpha n} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathcal{E}} \mathcal{E}_{F\alpha} \eta_\alpha}{\omega + i\nu_{\alpha n} - \mathbf{k}\mathbf{v}}. \quad (21.18)$$

Учтем теперь, что согласно (21.7)

$$\eta_\alpha = \frac{\int d\mathbf{p} \delta f_\alpha}{N_{0\alpha}} = \frac{\mathbf{k} \mathbf{j}_\alpha}{e_\alpha N_{0\alpha} \omega}, \quad \mathbf{j}_\alpha = e_\alpha \int d\mathbf{p} \mathbf{v} \delta f_\alpha.$$

Дальнейшие вычисления аналогичны проведенным выше и окончательно приводят к следующим выражениям для продольной и поперечной диэлектрических проницаемостей слабоионизованной вырожденной плазмы:

$$\begin{aligned} \epsilon^l(\omega, k) = 1 + \sum_\alpha \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{F\alpha}^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{k v_{F\alpha}} \ln \frac{\omega + i\nu_{\alpha n} + k v_{F\alpha}}{\omega + i\nu_{\alpha n} - k v_{F\alpha}} \right) \times \\ \times \left( 1 - \frac{i\nu_{\alpha n}}{2k v_{F\alpha}} \ln \frac{\omega + i\nu_{\alpha n} + k v_{F\alpha}}{\omega + i\nu_{\alpha n} - k v_{F\alpha}} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (21.19)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{tr}(\omega, k) = 1 - \sum_\alpha \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{2\omega(\omega + i\nu_{\alpha n})} \left[ 1 + \left( \frac{(\omega + i\nu_{\alpha n})^2}{k^2 v_{F\alpha}^2} - 1 \right) \times \right. \\ \left. \times \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{k v_{F\alpha}} \ln \frac{\omega + i\nu_{\alpha n} + k v_{F\alpha}}{\omega + i\nu_{\alpha n} - k v_{F\alpha}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Проанализируем спектры слабоионизованной вырожденной плазмы лишь в высокочастотном пределе, когда  $\omega + i\nu_{\alpha n} \gg k v_{F\alpha}$

и пространственной дисперсией тензора диэлектрической проницаемости можно полностью пренебречь:

$$\varepsilon^l(\omega) = \varepsilon^{tr}(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega + i\nu_{en})}. \quad (21.20)$$

Эти выражения приводят к таким же поправкам к декрементам затухания продольных и поперечных волн, какие были получены в случае слабоионизованной невырожденной плазмы [см. (21.11) и (21.16)]. В вырожденной плазме, однако, эти колебания (как продольные, так и поперечные) в бесстолкновительном пределе не затухают, а спектр частот определяется формулами (19.4) и (20.3) соответственно для продольных и поперечных колебаний. Легко показать, что поправка (21.14) возникает и для декремента затухания ионно-звуковых волн, спектр колебаний которых в бесстолкновительном пределе определяется формулой (19.7).

## § 22. Диэлектрическая проницаемость и спектры колебаний полностью ионизованной плазмы с учетом столкновений частиц

Рассмотрим полностью ионизованную плазму, в которой преобладают столкновения заряженных частиц между собой. Анализ спектров колебаний начнем с невырожденной плазмы, функции распределения заряженных частиц в которой являются функциями распределения Максвелла с разными температурами электронной и ионной компонент. Для описания столкновений частиц в такой плазме будем пользоваться интегралом столкновений Ландау, записав кинетическое уравнение для частиц сорта  $\alpha$  в виде (14.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} &= \sum_\beta \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} = \\ &= \sum_\beta \frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}} \int d\mathbf{p}_\beta I_{ij}^{\alpha\beta} \left[ f_\beta(\mathbf{p}_\beta) \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_{\alpha j}} - f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha) \frac{\partial f_\beta}{\partial p_{\beta j}} \right], \end{aligned} \quad (22.1)$$

где

$$I_{ij}^{\alpha\beta} = 2\pi e_\alpha^2 e_\beta^2 \frac{u^2 \delta_{ij} - u_i u_j}{u^3} L, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta.$$

Функции распределения Максвелла с разными температурами  $T_e$  и  $T_i$  не являются решениями уравнений (22.1) в стационарном и однородном случае в отсутствие внешних полей. Однако время выравнивания температур электронов и ионов порядка  $\frac{M}{m} \nu_{\alpha\beta}^{-1}$ , поэтому если интересоваться процессами, протекающими быстрее этого времени, то состояние плазмы с максвелловскими распределениями заряженных частиц по скоростям можно считать квазистационарным и приближенно удовлетворяющим равновесию.

При небольшом отклонении от равновесия под действием малых полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  функция распределения частиц получит малое приращение  $\delta f_\alpha$ , уравнение для которого получают из (22.1) путем линейризации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} = \sum_\beta \frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}} \int d\mathbf{p}_\beta I_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta) \times \\ \times \left[ \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_{\alpha j}} \delta f_\beta(\mathbf{p}_\beta) + \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial p_{\alpha j}} f_{0\beta}(\mathbf{p}_\beta) - f_{0\alpha}(\mathbf{p}_\alpha) \frac{\partial \delta f_\beta}{\partial p_{\beta j}} - \right. \\ \left. - \delta f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha) \frac{\partial f_{0\beta}}{\partial p_{\beta j}} \right]. \end{aligned} \quad (22.2)$$

Решить это уравнение, точнее, систему уравнений для электронов и ионов, которые даже после линейризации остаются интегральными с довольно сложным ядром, в общем случае не удастся. Поэтому не удастся получить и выражение для тензора диэлектрической проницаемости полностью ионизованной плазмы в произвольной области частот  $\omega$  и волновых векторов  $\mathbf{k}$ , как это было сделано в предыдущем параграфе для слабоионизованной плазмы. Но те области  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ , в которых можно решить уравнение (22.2) и получить аналитическое выражение для  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ , достаточно широки и охватывают практически все наиболее интересные случаи.

В области высоких частот  $\omega \gg \nu_\alpha$ , либо коротких длин волн  $k v_{T\alpha} \gg \nu_\alpha$  интегралом столкновений в уравнении (22.1) в нулевом приближении можно пренебречь и записать его решение в виде (17.6):

$$\delta f_\alpha^{(0)} = - \frac{i e_\alpha \mathbf{E}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} \quad (22.3)$$

(зависимость всех возмущенных величин, как обычно, принимаем в виде плоской монохроматической волны  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ ).

В первом приближении находим поправку от столкновений частиц данного сорта со всеми частицами (в том числе и с частицами этого же сорта):

$$\begin{aligned} \delta f_\alpha^{(1)} = \frac{i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \sum_\beta \frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}} \int d\mathbf{p}_\beta I_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta) \left[ \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_{\alpha j}} \delta f_\beta^{(0)}(\mathbf{p}_\beta) + \right. \\ \left. + f_{0\beta}(\mathbf{p}_\beta) \frac{\partial \delta f_\alpha^{(0)}}{\partial p_{\alpha j}} - f_{0\alpha}(\mathbf{p}_\alpha) \frac{\partial \delta f_\beta^{(0)}}{\partial p_{\beta j}} - \delta f_\alpha^{(0)}(\mathbf{p}_\alpha) \frac{\partial f_{0\beta}}{\partial p_{\beta j}} \right]. \end{aligned} \quad (22.4)$$

Формула (22.3) приводит к известному выражению для тензора диэлектрической проницаемости бесстолкновительной плазмы, полученному в §17, поправка же (22.4) дает поправку к плотности индуцированного заряда и тока в плазме, а следовательно, к бесстолкновительному тензору диэлектрической проницаемости. В условиях, когда

$\omega, \nu_\alpha \ll kv_{T\alpha}$  для  $\alpha = i, e$ , этой поправкой, однако, можно пренебречь, поскольку длина волны намного меньше длины свободного пробега частиц и столкновительные процессы, как диссипативные, так и недиссипативные, мало существенны.

В обратном пределе высоких частот, когда  $\omega \gg \nu_\alpha, kv_{T\alpha}$ , столкновения играют важную роль и их учет становится необходимым, особенно при вычислении диссипативной части тензора диэлектрической проницаемости, так как в отсутствие столкновений при фазовых скоростях волн, больших тепловых скоростей частиц, бесстолкновительная диссипация экспоненциально мала. Довольно громоздкие, но по идее простые вычисления дают следующие поправки к бесстолкновительной диэлектрической проницаемости:

при  $\omega \gg \nu_e, kv_{Te}$

$$\delta\epsilon^l(\omega, k) = \delta\epsilon^{tr}(\omega, k) = i \frac{\omega_{Le}^2 \nu_{\text{эфф}}}{\omega^3}, \quad (22.5)$$

при  $\omega \gg \nu_i, kv_{Ti}$ , но  $\omega, \nu_e \ll kv_{Te}$

$$\delta\epsilon^l(\omega, k) = \frac{8}{5} i \frac{\nu_{ii} \omega_{Li}^2 k^2 v_{Ti}^2}{\omega^5}, \quad \delta\epsilon^{tr}(\omega, k) = 0. \quad (22.6)$$

В этих выражениях

$$\nu_{\text{эфф}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \cdot \frac{e^2 e_i^2 N_i}{T_e^{3/2}} L, \quad \nu_{ii} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{M}} \cdot \frac{e_i^4 N_i}{T_i^{3/2}} L. \quad (22.7)$$

Полученные поправки позволяют учесть столкновительное затухание волн, спектры которых в бесстолкновительном пределе были исследованы в § 18 и 20. Так, для высокочастотных продольных колебаний со спектром частот (18.5) в полностью ионизованной плазме учет электрон-ионных столкновений приводит к поправке к декременту затухания (18.6):

$$\Delta\delta = -\nu_{\text{эфф}}/2, \quad (22.8)$$

которая подобна поправке (21.11), учитывающей столкновения электронов с нейтральными частицами. Поэтому, принимая во внимание аддитивность диссипативных эффектов в затухании волн, можно несколько подробнее расшифровать понятие полностью ионизованной плазмы. Очевидно, что при условии

$$\nu_{\text{эфф}} \gg \nu_{en} \quad (22.9)$$

преобладающими являются столкновения электронов с ионами, и плазму можно считать полностью ионизованной по отношению к высокочастотным плазменным колебаниям; в противном случае плазму следует считать слабо ионизованной. Заметим, что в реальной плазме неравенство (22.9) выполняется уже при степени ионизации  $N_e/N_n \geq \geq (10^{-3} \div 10^{-2})$ .

Несколько иное положение имеет место для ионно-звуковых волн, представляющих собой низкочастотную ветвь продольных колебаний неизотермической плазмы с  $T_e \gg T_i$ . Учет столкновений ионов с

ионами, что в данном случае означает учет высокочастотной ионной вязкости, приводит к следующей поправке к бесстолкновительному декременту затухания (18.9):

$$\Delta\delta = -\frac{4}{5} \cdot \frac{\nu_{ii} k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} . \quad (22.10)$$

Сравнение этой поправки с поправкой (21.14), полученной для слабоионизованной плазмы при учете столкновений ионов с нейтральными частицами, позволяет сделать вывод о том, что по отношению к ионно-звуковым колебаниям плазму можно считать полностью ионизованной, если

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{\nu_{ii} k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} \approx \frac{4}{5} \nu_{ii} \frac{T_i}{T_e} \gg \nu_{in} , \quad (22.11)$$

и слабоионизованной в обратном пределе. В реальной плазме это условие выполняется при степени ионизации  $N_e'/N_n \geq (10^{-1} \div 1)$ .

Наконец, столкновительная поправка к поперечной диэлектрической проницаемости полностью ионизованной плазмы (22.5) определяет декремент затухания высокочастотных поперечных волн со спектром (20.5), являющихся незатухающими в бесстолкновительном пределе:

$$\delta = -\frac{\nu_{эфф}}{2} \cdot \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_{Le}^2 + k^2 c^2} . \quad (22.12)$$

Из сравнения этого выражения с декрементом затухания поперечных волн в слабоионизованной плазме (21.16) следует, что по отношению к высокочастотным поперечным волнам, так же как и к плазменным колебаниям, плазму можно считать полностью ионизованной при выполнении неравенства (22.9) и слабоионизованной — в обратном случае.

В заключение рассмотрим влияние столкновений частиц на спектры колебаний полностью ионизованной вырожденной плазмы, причем ограничимся наиболее интересным случаем, когда электроны вырождены, а ионы нет. Кроме того, исследуем влияние столкновений лишь на высокочастотные волны в условиях  $\omega \gg \nu_e, kv_{Fe}$ , которые при пренебрежении столкновениями частиц вообще не поглощаются, так как обладают фазовой скоростью, большей скорости света. В этих условиях основной вклад дают столкновения электронов с ионами, причем расчет поправки к бесстолкновительной диэлектрической проницаемости подобен проведенному выше с той лишь разницей, что в интеграле столкновений учитывается вырождение, и он имеет вид (14.9). Опуская здесь подробности вычислений, приведем окончательный ответ [ср. с (22.5)]:

$$\delta\epsilon^l(\omega, k) = \delta\epsilon^{tr}(\omega, k) = i \frac{\omega_{Le}^2 \nu_{Fe}}{\omega^3} , \quad (22.13)$$

где

$$\nu_{Fe} = 4\pi \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \cdot \frac{e^2 e_i^2 N_i L}{\delta_{Fe}^{3/2}}. \quad (22.14)$$

Поправки (22.13) приводят к появлению столкновительных поправок к декрементам затухания высокочастотных продольных и поперечных волн соответственно [ср. с (22.8) и (22.12)]:

$$\Delta\delta^l = -\frac{\nu_{Fe}}{2}, \quad \Delta\delta^{lr} = -\frac{\nu_{Fe}}{2} \cdot \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_{Le}^2 + k^2 c^2}. \quad (22.15)$$

### Задачи к главе IV

**Задача 1.** Вывести выражение для диэлектрической проницаемости изотропной плазмы в модели независимых частиц.

**Решение.** Линеаризованная система уравнений динамики изотропной плазмы в модели независимых частиц записывается таким образом:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{V}_\alpha, N_\alpha \rightarrow N_{0\alpha} + \delta N_\alpha, \mathbf{E}), \\ \frac{\partial \delta N_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} N_{0\alpha} \mathbf{V}_\alpha = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial t} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} - \nu_\alpha \mathbf{V}_\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\alpha = i, e$ , а  $\nu_\alpha$  — частота столкновений частиц сорта  $\alpha$ .

Отсюда для возмущений вида  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$  находим

$$\left. \begin{aligned} \delta N_\alpha = \frac{N_{0\alpha} (\mathbf{k}\mathbf{V}_\alpha)}{\omega} = \frac{ie_\alpha N_{0\alpha}}{m_\alpha \omega} \cdot \frac{(\mathbf{k}\mathbf{E})}{\omega + i\nu_\alpha}, \\ \mathbf{V}_\alpha = \frac{ie_\alpha}{m_\alpha (\omega + i\nu_\alpha)} \mathbf{E}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Плотности индуцированного в плазме заряда и тока при этом соответственно равны

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_\alpha e_\alpha \delta N_\alpha = \sum_\alpha \frac{ie_\alpha^2 N_{0\alpha} (\mathbf{k}\mathbf{E})}{m_\alpha \omega (\omega + i\nu_\alpha)}, \\ \mathbf{j} &= \sum_\alpha e_\alpha N_{0\alpha} \mathbf{V}_\alpha = \sum_\alpha \frac{ie_\alpha^2 N_{0\alpha}}{m_\alpha (\omega + i\nu_\alpha)} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для продольной и поперечной диэлектрических проницаемостей окончательно имеем

$$\varepsilon^l = \varepsilon^{lr} = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega (\omega + i\nu_\alpha)}. \quad (4)$$

Эти выражения представляют собой предел выражений (21.8) при  $T_\alpha \rightarrow 0$ , т. е. в пределе «холодной» плазмы.

**Задача 2.** На основе уравнений одножидкостной гидродинамики (16.21) исследовать малые колебания изотропной неизотермической плазмы.

**Решение.** Линеаризованная система уравнений (16.21) для изотропной плазмы записывается следующим образом ( $\rho_m = \rho_{0m} + \rho_1$ ,  $\mathbf{V}$ ):

$$\left. \begin{aligned} \rho_{0m} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= -v_s^2 \nabla \rho_1, \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_{0m} \mathbf{V} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Отсюда находим для возмущений вида  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$  систему однородных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} \omega \rho_{0m} \mathbf{V} - v_s^2 \mathbf{k} \rho_1 &= 0, \\ \omega \rho_1 - \rho_{0m} \mathbf{k} \mathbf{V} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

условие разрешимости которой и представляет собой дисперсионное уравнение малых колебаний. Это условие имеет вид

$$\omega^2 = k^2 v_s^2 \quad (3)$$

и совпадает с дисперсионным уравнением для определения спектра частот длинноволновых ионно-звуковых колебаний неизотермической плазмы (18.10).

**Задача 3.** Исследовать затухание высокочастотных ленгмюровских колебаний изотропной бесстолкновительной электронной плазмы в пределе коротких длин волн:  $k^2 r_{De}^2 \gg 1$ .

**Решение.** Используя асимптотику функции  $J_+(x)$  в условиях  $|x| \gg 1$  и  $|\operatorname{Im} x| \gg |\operatorname{Re} x|$ ,  $\operatorname{Im} x < 0$ , из (18.1) получаем дисперсионное уравнение

$$1 + i\sqrt{2\pi} \frac{\omega}{kv_{Te}} \cdot \frac{1}{k^2 r_{De}^2} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}} = 0, \quad (1)$$

решение которого будем искать в виде

$$\omega = -ikv_{Te} \xi. \quad (2)$$

Тогда  $\operatorname{Re} \xi \gg \operatorname{Im} \xi$  и

$$k^2 r_{De}^2 + \sqrt{2\pi} \xi (e^{\xi^2/2}) = 0. \quad (3)$$

Разбив это уравнение на действительную и мнимую части:  $\xi = \xi' + i\xi''$ , получаем

$$\sqrt{2\pi} \xi' e^{\xi'^2/2} \cos \xi' \xi'' + \sqrt{2\pi} \xi'' e^{\xi'^2/2} \cdot \sin \xi' \xi'' + k^2 r_{De}^2 = 0, \quad (4)$$

$$\xi'' \cos \xi' \xi'' + \xi' \sin \xi' \xi'' = 0.$$

Из второго уравнения (4) следует, что  $\xi' > 0$  и  $\xi'' > 0$ , причем  $\operatorname{tg} \xi' \xi'' \rightarrow \xi''/\xi' \rightarrow -0$ . Тангенс отрицателен во второй и четвертой четвертях и стремится к нулю, когда его аргумент близок либо к  $\pi$ , либо к  $2\pi$ . Исходным предположением соответствует первое значение аргумента, т. е.  $\xi' \xi'' = \pi - \alpha$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . При этом  $\operatorname{tg} \xi' \xi'' = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) \approx -\alpha$ , т. е.  $\xi''/\xi' = \alpha$ , а следовательно,  $\xi'^2 =$

$$= \frac{\pi - \alpha}{\alpha} \rightarrow +\infty \text{ и } \cos \xi' \xi'' = -1.$$

Учитывая сказанное, из первого уравнения (4) окончательно получаем



$$\sqrt{2\pi} \xi' e^{\xi'^2/2} = k^2 r_{De}^2, \quad (5)$$

$$\xi' \approx \sqrt{2 \ln k^2 r_{De}^2} \gg 1.$$

Таким образом, колебания являются сильнозатухающими с декрементом затухания

$$\delta = \text{Im } \omega = -k v_{Te} \sqrt{2 \ln k^2 r_{De}^2}. \quad (6)$$

Величину  $\text{Re } \omega$  легко найти, используя соотношение  $\xi'' = \pi/\xi'$ . Тогда полный спектр сильнозатухающих коротковолновых продольных колебаний

$$\frac{\omega}{k v_{Te}} = \frac{\pi}{\sqrt{\ln k^2 r_{De}^2}} - i \sqrt{\ln k^2 r_{De}^2}. \quad (7)$$

Отсюда видно, что  $\text{Im } \omega/k \gg v_{Te}$ , но  $\text{Re } \omega/k \ll v_{Te}$ , поэтому основная масса электронов принимает участие в черенковском поглощении волны. Этим и объясняется сильное затухание таких коротковолновых продольных колебаний.

**Задача 4.** Исходя из кинетического уравнения Ландау, получить выражения для продольной и поперечной диэлектрических проницаемостей изотропной полностью ионизованной невырожденной плазмы в условиях частых столкновений, когда  $v_\alpha \gg \omega$ ,  $k v_{\alpha\alpha}$ ,  $\alpha = e, i$ .

**Решение.** В этих условиях основной вклад в индуцированный ток дают электроны, поэтому достаточно решить уравнение для электронной функции распределения, считая ионы невозмущенными. Линеаризованное уравнение для электронной функции распределения при этом записывается в виде

$$e\mathbf{E} \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{p}} = N_{0i} \frac{\partial}{\partial p_i} I_{ij}^{ei}(\mathbf{p}) \frac{\partial \delta f_e}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial p_i} \int d\mathbf{p}' I_{ij}^{ee}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \left[ \frac{\partial f_{0e}}{\partial p_j} \delta f_e(\mathbf{p}') + \frac{\partial \delta f_e}{\partial p_j} f_{0e}(\mathbf{p}') - f_{0e}(\mathbf{p}) \frac{\partial \delta f_e}{\partial p_j} - \delta f_e(\mathbf{p}) \frac{\partial f_{0e}}{\partial p_j} \right]. \quad (1)$$

Решать это уравнение удобно методом Чепмена—Энскога, разлагая  $\delta f_e(\mathbf{p})$  по полиномам Сонина. Ограничиваясь двумя членами разложения, имеем

$$\delta f_e(\mathbf{p}) = \frac{v\mathbf{E}}{E} \left[ a_0 + a_1 \left( \frac{5}{2} - \frac{v^2}{2v_{Te}^2} \right) \right] f_{0e}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), домножая (1) на полиномы 1 и  $\left( \frac{5}{2} - \frac{v^2}{2v_{Te}^2} \right)$  и интегрируя по импульсу, получим систему двух уравнений для определения коэффициентов разложения  $a_0$  и  $a_1$ . Для плазмы с однозарядными ионами  $e_i = |e|$  этой системой будет

$$\left. \begin{aligned} \frac{eE}{T_e} &= -v_{\Phi} \Phi \left( a_0 + \frac{3}{2} a_1 \right), \\ \frac{3}{2} a_0 + \frac{13 + 4\sqrt{2}}{4} a_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Отсюда

$$a_0 = -\frac{13 + 4\sqrt{2}}{6} a_1, \quad a_1 = -\frac{6}{4 + 4\sqrt{2}} \cdot \frac{eE}{v_{\text{эфф}} T_e}. \quad (4)$$

Теперь из (2) можно найти плотность индуцированного в плазме электронного тока:

$$j \approx j_e \approx 1,96 \frac{e^2 N_{0e}}{m v_{\text{эфф}}} E. \quad (5)$$

Для диэлектрической проницаемости плазмы окончательно имеем

$$\varepsilon^l = \varepsilon^{tr} = 1 + i 1,96 \frac{\omega_{Le}^2}{\omega v_{\text{эфф}}}. \quad (6)$$

Строго говоря, выражение (6) пригодно лишь в условиях  $\omega v_{\text{эфф}} \gg k^2 v_{Te}^2$ . В противном случае в левой части уравнения (1) необходимо учитывать малые члены с пространственной и временной производными. Анализ показывает, однако, что такие члены существенны лишь при вычислении продольной диэлектрической проницаемости. В поперечную диэлектрическую проницаемость они вклада не дают.

**Задача 5.** Исследовать характер проникновения поперечного поля в плазму в зависимости от частоты  $\omega$ .

**Решение.** Характер проникновения поперечного поля определяется корнями  $k(\omega)$  дисперсионного уравнения

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, k). \quad (1)$$

Глубина проникновения поля

$$\lambda_{\text{СК}} = \frac{1}{\text{Im } k(\omega)}. \quad (2)$$

Проанализируем уравнение (1) в различных областях частот.

а. В области  $\omega \gg v_e$ ,  $k v_0$  ( $v_e$  — частота столкновений электронов,  $v_0$  — средняя скорость их хаотического движения:  $v_0 = v_{Te}$  — для невырожденной плазмы и  $v_0 = v_{Fe}$  — для вырожденной плазмы) имеем

$$\varepsilon^{tr} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left( 1 - i \frac{v_e}{\omega} \right). \quad (3)$$

Здесь  $v_e = v_{en}$  — для слабоионизованной невырожденной и вырожденной плазмы,  $v_e = v_{\text{эфф}}$  — для полностью ионизованной невырожденной плазмы и  $v_e = v_{Fe}$  — для вырожденной плазмы.

Из (1) при подстановке (3) получаем

$$\lambda_{\text{СК}} = \begin{cases} \frac{2c \omega^2}{\omega_{Le}^2 v_e} & \text{при } \omega \gg \omega_{Le}, \\ \frac{c}{\omega_{Le}} & \text{при } \omega_{Le} \frac{v_0}{c} \ll \omega \ll \omega_{Le}. \end{cases} \quad (4)$$

б. В области  $k v_0 \gg \omega$ ,  $v_e$  имеем

$$\varepsilon^{tr} = 1 + i \alpha \frac{\omega_{Le}^2}{\omega k v_0}. \quad (5)$$

Здесь  $\alpha = \sqrt{\pi/2}$  — для невырожденной и  $\alpha = (3\pi)/4$  — для вырожденной плазмы.

В этой области частот из (1) получаем

$$\lambda_{\text{СК}} = 2 \left( \frac{c^2 v_0}{\alpha \omega_{Le}^2 \omega} \right)^{1/3} \quad \text{при} \quad \omega^* \ll \omega \ll \omega_{Le} \frac{v_0}{c}, \quad (6)$$

где  $\omega^* = v_e^3 c^2 / \omega_{Le}^2 v_0^2$ .

Таким образом, область существования решения (6), соответствующего аномальному скин-эффекту, дается неравенством  $v_e \ll \frac{v_0}{c} \omega_{Le}$ . Аномальный скин-эффект возможен только в области частот  $\omega > \omega^*$  независимо от соотношения величин  $\omega$  и  $v_e$ .

в. В области  $v_e \gg kv_0$ ,  $\omega$  имеем

$$\epsilon' r = 1 + i \alpha_1 \frac{\omega_{Le}^2}{\omega v_e}. \quad (7)$$

Здесь  $\alpha_1 = 1$  — для слабоионизованной и  $\alpha_1 = 1,96$  — для полностью ионизованной плазмы. В результате

$$\lambda_{\text{СК}} = \left( \frac{2v_e c^2}{\alpha_1 \omega_{Le}^2 \omega} \right)^{1/2} \quad \text{при} \quad \omega \ll \omega^*, v_e. \quad (8)$$

Таким образом, решение (8), соответствующее нормальному скин-эффекту, существует в области частот  $\omega \ll \omega^*$  независимо от соотношения величин  $\omega^*$  и  $v_e$ . Результаты проведенного анализа представлены на рис. 8, где  $\alpha \rightarrow \alpha \omega_{Le}$ .

**Задача 6.** Показать, что в сильно столкновительной слабоионизованной невырожденной плазме в условиях  $T_e \gg T_i$  возможны ионно-звуковые колебания в области частот  $v_{en} \gg \omega$ ,  $kv_{Te}$ , если  $\omega \gg v_{in}$  и  $\omega v_{en} \ll k^2 v_{Te}^2$ . В полностью ионизованной плазме такие колебания невозможны.

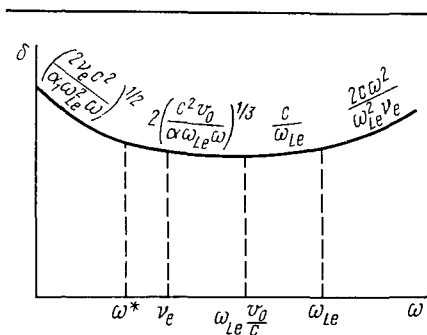
**Решение.** Для ионно-звуковых колебаний в указанной области частот согласно (21.8) справедливо уравнение

$$\epsilon^i = 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left( 1 + i \frac{\omega v_{en}}{k^2 v_{Te}^2} \right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left( 1 - i \frac{v_{in}}{\omega} \right) = 0. \quad (1)$$

Отсюда получаем спектр ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ ) слабозатухающих колебаний:

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Li}^2}{1 + \omega_{Le}^2 / k^2 v_{Te}^2}, \quad (2)$$

$$\delta = - \frac{\omega^4 v_{en}}{2k^4 v_{Te}^2 v_s^2} - \frac{v_{in}}{2}.$$



Отметим, что условия  $v_{en} \gg kv_{Te} \sim kv_s \sqrt{M/m} \approx \omega \sqrt{M/m} \gg v_{in} \sqrt{M/m}$  в слабоионизованной плазме могут выполняться благодаря тому, что  $v_{en} \approx$

Рис. 8

$\approx v_{Te} \sigma_0 N_n \approx \sqrt{\frac{T_e M}{T_i m}} v_{i0} \sigma_0 N_n \approx \sqrt{\frac{T_e}{T_i}} \sqrt{\frac{M}{m}} v_{in}$ , и при  $T_e \gg T_i$  получает-ся нужное неравенство.

Для полностью ионизованной плазмы тоже можно записать подобное (1) уравнение и получить спектр типа (2), но из-за обратной зависимости частот столкновений заряженных частиц от их температуры указанное неравенство выполняться не может. Поэтому и ионно-звуковые колебания в полностью ионизованной сильно столкновительной плазме невозможны.

**Задача 7.** Вывести выражение для диэлектрической проницаемости ультра-релятивистской невырожденной ( $T_e \gg mc^2$ ) электронной плазмы и исследовать спектры высокочастотных волн.

**Решение.** Поскольку энергия ультрарелятивистских частиц  $\varepsilon = cp$ , функция распределения электронов в такой плазме имеет вид

$$f_{0e}(p) = \frac{N_e}{8\pi} \left( \frac{c}{T_e} \right)^3 e^{-\frac{cp}{T_e}}. \quad (1)$$

Скорость электронов при этом равна скорости света:  $v = d\varepsilon/dp = c$  и в этом смысле функция распределения (1) подобна распределению Ферми. Подставляя функцию распределения (1) в (17.13), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^l &= 1 + \frac{4\pi e^2 N_e}{k^2 T_e} \left\{ 1 - \frac{\omega}{2ck} \ln \frac{\omega + ck}{\omega - ck} \right\}, \\ \varepsilon^{tr} &= 1 - \frac{\pi e^2 N_e c}{\omega k T_e} \left\{ \frac{2\omega}{ck} - \left( \frac{\omega^2}{c^2 k^2} - 1 \right) \ln \frac{\omega + ck}{\omega - ck} \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

По своей структуре эти выражения схожи с (17.18). Из них непосредственно следует, что при  $\omega/k > c$  мнимые части  $\varepsilon^l$  и  $\varepsilon^{tr}$  равны нулю и поглощение волн в плазме отсутствует. Спектры частот колебаний при этом определяются соотношениями:

$$\omega^2 = \begin{cases} \frac{4\pi e^2 N_e c^2}{3T_e} + \frac{3}{5} k^2 c^2 & \text{при } \omega \gg ck, \\ \frac{-2\pi e^2 N_e c^2}{T_e} + c^2 k^2 & \text{при } \omega \rightarrow ck \end{cases} \quad (3)$$

— для поперечных волн,

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{4\pi e^2 N_e c^2}{3T_e} + \frac{3}{5} c^2 k^2 & \text{при } \omega \gg ck, \\ \omega &= ck \left[ 1 + 2 \exp \left( -2 - \frac{k^2 T_e}{2\pi e^2 N_e} \right) \right] & \text{при } \omega \rightarrow ck \end{aligned} \quad (4)$$

— для продольных волн.

В области малых фазовых скоростей (низких частот), когда  $\omega < kc$ , мнимые части  $\varepsilon^l$  и  $\varepsilon^{tr}$  велики и поле в плазме сильно поглощается, либо экранируется. Действительно, при  $\omega \ll ck$  имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon^l &= 1 + \frac{4\pi e^2 N_e}{k^2 T_e} \left( 1 + i \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{ck} \right), \\ \varepsilon^{tr} &= 1 + i\pi \frac{\pi e^2 N_e c}{\omega k T_e}. \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда видно, что радиус экранирования продольного поля в плазме равен дебаевскому радиусу  $\lambda_{\text{СК}}^l = \left( \frac{T_e}{4\pi e^2 N_e} \right)^{1/2}$ , а глубина проникновения поперечного поля определяется аномальным скин-эффектом  $\lambda_{\text{СК}}^{tr} \approx \left( \frac{2}{\pi} \cdot \frac{T_e c}{\pi e^2 N_e \omega} \right)^{1/3}$ .

**Задача 8.** Исследовать процесс релаксации анизотропии температуры электронов ( $T_{\perp} - T_{\parallel}$ ) в полностью ионизованной неизоотермической плазме в условиях  $T_e \gg T_i$  при учете поляризационного взаимодействия электронов (взаимодействие посредством ионного звука).

**Решение.** В изотропизации температуры электронов, как было показано в задаче 5 гл. III, принимают участие как электрон-электронные, так и электрон-ионные столкновения. При решении задачи 5 в гл. III было пренебрежено поляризацией плазмы в интеграле столкновений и тем самым взаимодействием электронов вследствие испускания и поглощения плазменных волн (волновое взаимодействие). Такое приближение справедливо для не очень сильно неизоотермической плазмы, в которой невозможны ионно-звуковые колебания. В неизоотермической плазме в условиях  $T_e \gg T_i$  электроны интенсивно взаимодействуют с ионным звуком и могут быстро обмениваться импульсом посредством испускания и поглощения таких волн. Поэтому здесь учтем только такое волновое взаимодействие и выясним, когда оно становится определяющим. Запишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} &= \left( \frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{st}^{ee} = \frac{\partial}{\partial p_i} \int dp' I_{ij}^{ee}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \times \\ &\times \left( \frac{\partial f_e(\mathbf{p})}{\partial p_j} f_e(\mathbf{p}') - f_e(\mathbf{p}) \frac{\partial f_e(\mathbf{p}')}{\partial p_j'} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

и учтем в интеграле электрон-электронных столкновений только волновое (поляризационное) взаимодействие, т. е. представим  $I_{ij}^{ee}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  в виде

$$\begin{aligned} I_{ij}^{ee}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') &= \pi \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left( \frac{4\pi e^2}{k^2} \right)^2 \frac{k_i k_j \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}')}{|\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})|^2} \approx \\ &\approx \frac{\pi^2}{(2\pi)^3} \int_{k_{rDi} < 1} d\mathbf{k} \left( \frac{4\pi e^2}{k^2} \right)^2 \frac{k_i k_j \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}') \delta[\text{Re } \varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})]}{|\text{Im } \varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})|} \end{aligned} \quad (2)$$

Это выражение учитывает лишь вклад, обусловленный волновым (поляризационным) взаимодействием электронов с ионно-звуковыми колебаниями, поэтому интегрирование по  $k$  проводится только в области  $k_{rDi} < 1$ , где такие колебания существуют. Оно дает аддитивный вклад в релаксацию анизотропии температуры наряду с ближними столкновениями (область  $k_{rDi} > 1$ ), учтенными в задаче 5 гл. III. Учтем теперь тот факт, что для ионно-звуковых волн  $\omega \ll kv_{Te}$  и запишем (2) в иной форме:

$$I_{ij}^{ee}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = 2\pi e^4 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{k_{rDi} < 1} d\mathbf{k} \frac{k_i k_j}{k^4} \frac{\delta[\text{Re } \varepsilon(\omega, \mathbf{k})]}{|\text{Im } \varepsilon(\omega, \mathbf{k})|} \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}) \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}'). \quad (3)$$

Считая анизотропию температуры электронов малой, получим

$$\text{Re } \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \quad (4)$$

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega \omega_L^2}{k^3 v_{Te}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega \omega_L^2}{k^3 v_{Te}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}}.$$

Подставляя (4) в (3), после громоздких вычислений будем иметь

$$I_{ij}^{ee}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = 4 \sqrt{2\pi} v_{Te} e^4 I \frac{[\mathbf{v} \mathbf{v}']_i [\mathbf{v} \mathbf{v}']_j}{|[\mathbf{v} \mathbf{v}']|^3},$$

$$I = \frac{1}{2} \left| \frac{e_i}{e} \right| \frac{T_e}{T_i} \cdot \frac{1}{\ln \frac{e_i^2 M T_e^3}{e^2 m T_i^3}}.$$

Отсюда видно, что по порядку величины  $I_{ij}^{ee} \sim \frac{e^4 I}{v_{Te}}$ , в то время как отброшенный интеграл ближних столкновений давал  $I_{ij}^{ee} \sim \frac{e^4}{v_{Te}} L$ . Таким образом, используемое пренебрежение ближними столкновениями по сравнению с поляризационным взаимодействием обоснованно при условии  $I \gg L$ , или (что то же самое)

$$\frac{T_e}{T_i} \cdot \frac{1}{\ln \frac{e_i^2 M}{e^2 m} \cdot \frac{T_e^3}{T_i^3}} \gg L = \ln \frac{r_{Di}}{r_{\min}}.$$

Это условие реально выполняется при  $T_e/T_i > (10^2 \div 10^3)$ .

Подставляя далее (5) в (1), домножая (1) на  $(mv_{\perp}^2)/2$  и  $(mv_{\parallel}^2)/2$  и интегрируя по импульсам, так же как и в задаче 5 гл. III, получаем

$$\frac{d}{dt} (T_{\perp} - T_{\parallel}) = -\nu_{ee} (T_{\perp} - T_{\parallel}),$$

где

$$\nu_{ee} = \frac{6}{5} \nu_{\text{эфф}} \left| \frac{e}{e_i} \right| \frac{I}{L}, \quad \nu_{\text{эфф}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \cdot \frac{e^2 e_i^2 N_i L}{T_e^{3/2}}.$$

Учитывая аддитивный вклад в релаксацию ближних столкновений, найденный в задаче 5 гл. III, окончательно получим

$$\frac{d}{dt} (T_{\perp} - T_{\parallel}) = -\nu_n (T_{\perp} - T_{\parallel}),$$

$$\nu_n = \frac{6}{5} \nu_{\text{эфф}} \left\{ 1 + \left| \frac{e}{e_i} \right| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\sqrt{2} I}{L} \right) \right\}.$$

## ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ И СПЕКТРЫ КОЛЕБАНИЙ ОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

### § 23. Тензор диэлектрической проницаемости однородной бесстолкновительной магнитоактивной плазмы

Изучим теперь электромагнитные свойства термодинамически равновесной плазмы во внешнем постоянном и однородном магнитном поле  $\mathbf{B}_0$ .

Равновесные распределения заряженных частиц по импульсам принимаются в виде распределения Максвелла (17.1), либо Ферми (17.2). Так же как и в предыдущей главе, анализ свойств такой плазмы начнем исходя из уравнения Власова, т. е. пренебрегая столкновениями частиц. Линеаризуя кинетическое уравнение по малому отклонению функции распределения частиц сорта  $\alpha$  от равновесного значения  $\delta f_\alpha$ , для возмущений вида  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$  получаем

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\delta f_\alpha + e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} + \frac{e_\alpha}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}_0] \cdot \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} = 0. \quad (23.1)$$

Решение уравнения (23.1) проведем в системе координат, ось  $Oz$  которой ориентирована вдоль магнитного поля:  $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ . При этом в пространстве импульсов удобно перейти к цилиндрической системе координат:  $p_\perp, \varphi, p_z$  ( $p_x = p_\perp \cos\varphi, p_y = p_\perp \sin\varphi$ ), причем  $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ , где  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ . Тогда можно записать

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\delta f_\alpha + e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} - \frac{\Omega_\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \varphi} = 0, \quad (23.2)$$

$$\text{где } \Omega_\alpha = \frac{e_\alpha B_0}{m_\alpha c}.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно  $\delta f_\alpha$ , общим решением которого является

$$\delta f_\alpha = \frac{e_\alpha \gamma}{\Omega_\alpha} \int_C^{\varphi} d\varphi' \left( \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \right)_{\varphi'} \exp \left[ \frac{i\gamma}{\Omega_\alpha} \int_{\varphi'}^{\varphi} d\varphi'' (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})_{\varphi''} \right]. \quad (23.3)$$

Индексы  $\varphi'$  и  $\varphi''$  при выражениях в круглых скобках показывают, что эти выражения следует рассматривать как функции  $\varphi'$  и  $\varphi''$ .

Постоянную интегрирования  $C$  следует определить из естественного требования периодичности  $\delta f_\alpha(\varphi)$ :

$$\delta f_\alpha(\varphi + 2\pi) = \delta f_\alpha(\varphi).$$

Легко показать, что указанное условие может выполняться только при  $|C| = \infty$ . Это значение  $C$  имеет простой физический смысл. Дело в том, что переменная  $\varphi$  однозначно связана со временем, поскольку изменение  $\varphi$  обусловлено циклотронным вращением частиц вокруг силовых линий магнитного поля, т. е. оси  $Oz$ :  $\varphi = \Omega_\alpha t / \gamma$ , где  $t$  — время. Потребуем далее, чтобы неравновесная добавка к функции распределения  $\delta f_\alpha$  обращалась при  $t = -\infty$  в нуль (адиабатическое включение поля в бесконечном прошлом). При этом получим, что на нижнем пределе интегрирования  $\varphi = \pm\infty$ , причем знак соответствует знаку  $\Omega_\alpha$  для каждого сорта частиц  $\alpha$ . Таким образом, решение (23.3) можно записать в виде

$$\delta f_\alpha = \frac{e_\alpha \gamma}{\Omega_\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi' \left( E \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \right)_{\varphi'} \exp \left[ \frac{i}{\Omega_\alpha} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})_{\varphi''} \right]. \quad (23.4)$$

Выражая плотность тока  $\mathbf{j}$  через  $\delta f_\alpha$  посредством соотношения (17.5), можно определить компоненты тензора проводимости  $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ , а следовательно, и тензора диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi i e_\alpha^2}{\Omega_\alpha \omega} \int d\mathbf{p}_\alpha \gamma v_i \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi' \left( \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j} \right)_{\varphi'} \exp \left[ \frac{i\gamma}{\Omega_\alpha} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})_{\varphi''} \right]. \end{aligned} \quad (23.5)$$

Вследствие изотропии равновесной функции распределения можно записать  $\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \mathbf{v}$ , где  $\mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v}$ , а  $\mathcal{E} = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$ .

С учетом этого тензор диэлектрической проницаемости

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \delta_{ij} + i \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_\alpha^2}{\Omega_\alpha \omega} \int \gamma d\mathbf{p}_\alpha \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathcal{E}} v_i \int_0^{\infty} v_j(\varphi') d\varphi' \times \\ &\times \exp \left[ \frac{i\gamma}{\Omega_\alpha} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})_{\varphi''} \right]. \end{aligned} \quad (23.6)$$

Без нарушения общности положим, что вектор  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости  $xz$ , т. е.  $\mathbf{k} = (k_x = k_\perp, 0, k_z)$ . Произведя интегрирование по  $d\varphi''$ , экспоненциальный множитель в выражении (23.5) можно записать сле-



дующим образом:

$$\exp \left[ \frac{i\gamma}{\Omega_a} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - k\mathbf{v})_{\varphi''} \right] = \exp \left[ -i \frac{(\omega - k_z v_z)}{\Omega_a} \gamma (\varphi - \varphi') \right] \times \\ \times \exp \left[ i \frac{k_{\perp} v_{\perp} \gamma}{\Omega_a} (\sin \varphi' - \sin \varphi) \right].$$

Используя далее разложение

$$\exp [i b_a \sin \varphi] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(b_a) \exp [in\varphi],$$

где  $b_a = \frac{k_{\perp} v_{\perp} \gamma}{\Omega_a}$ , а  $J_n$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка, выражение (23.5) после довольно громоздких, но несложных вычислений можно привести к виду

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_a \frac{4\pi e_a^2}{\omega} \int d\mathbf{p}_a \frac{\partial f_{0a}}{\partial \mathcal{E}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_{ij}^{(n)} \left[ \frac{\mathcal{P}}{\omega - k_z v_z - n \frac{\Omega_a}{\gamma}} - \right. \\ \left. - i\pi\delta \left( \omega - k_z v_z - n \frac{\Omega_a}{\gamma} \right) \right]. \quad (23.7)$$

Здесь  $\mathcal{P}$  означает главное значение интеграла, а

$$\Pi_{ij}^{(n)} = \begin{pmatrix} v_{\perp}^2 \frac{n^2}{b_a^2} J_n^2(b_a) & i v_{\perp}^2 n \frac{J_n J_n'}{b_a} & v_{\perp} v_z n \frac{J_n^2}{b_a} \\ -i v_{\perp}^2 n \frac{J_n J_n'}{b_a} & v_{\perp}^2 J_n'^2 & -i v_{\perp} v_z J_n J_n' \\ v_{\perp} v_z n \frac{J_n^2}{b_a} & i v_{\perp} v_z J_n J_n' & v_z^2 J_n^2 \end{pmatrix} \quad (23.8)$$

( $J_n(b_a)$  и  $J_n'(b_a)$ ) — функция Бесселя и ее производная по аргументу  $b_a = \frac{k_{\perp} v_{\perp} \gamma}{\Omega_a}$ ).

При такой форме записи тензора диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы явно видны циклотронные резонансы, связанные с обращением знаменателя  $\omega - k_z v_z - n \frac{\Omega_a}{\gamma}$  в нуль. Слагаемые, содержащие главное значение интеграла  $\mathcal{P}$ , составляют при этом эрмитовскую часть тензора  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ , а слагаемые с  $\delta$ -функцией — антиэрмитовскую часть, ответственную за поглощение волн в плазме. Таким образом, в отличие от немагнитоактивной плазмы, где в бесстолкновительном поглощении волн участвовали частицы, для которых вы-

полнялось условие  $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ , в магнитоактивной плазме в поглощении волн в отсутствие столкновений участвуют лишь те частицы, для которых

$$\omega - k_z v_z - n \frac{\Omega_a}{\gamma} = 0. \quad (23.9)$$

Природу поглощения проще всего понять из следующих соображений. В магнитном поле движение каждой частицы складывается из свободного движения вдоль силовой линии и циклотронного вращения с частотой  $\Omega_a/\gamma$  вокруг силовой линии магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ . При таком движении заряженная частица излучает как вследствие ускорения из-за вращения (магнитотормозное, или циклотронное, излучение), так и вследствие обычного эффекта Черенкова из-за прямолинейного движения вдоль силовой линии поля  $\mathbf{B}_0$ . Частоты излучаемых при этом волн определяют из условия

$$\omega = n \frac{\Omega_a}{\gamma} + k_z v_z, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Условие (23.9) при  $n = 0$  соответствует черенковскому излучению, а при  $n \neq 0$  — магнитотормозному, или циклотронному, излучению.

Отметим, что при  $k_z = 0$  в пределе нерелятивистской плазмы ( $\gamma = 1$ ) антиэрмитовская часть тензора  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  равна нулю, и поглощение волн, распространяющихся строго поперек магнитного поля, отсутствует. Действительно, из выражения (23.7) следует, что при интегрировании по  $dp$  в этом случае никаких особенностей в подынтегральных выражениях не возникает и вклад членов, содержащих  $\delta$ -функцию, в диэлектрическую проницаемость равен нулю. Это утверждение, однако, справедливо лишь при  $\omega \leq \Omega_a$ . В пределе больших частот  $\omega \gg \Omega_a$  магнитным полем можно пренебречь, а это означает, что поглощение должно иметь место и при  $k_z = 0$ , так как этот предел соответствует изотропной плазме без внешнего магнитного поля. Физически это очевидно, так как при  $\Omega_a \rightarrow 0$  ларморовский радиус частиц становится бесконечно большим, т. е. намного превышает длину волны. Формальный переход к пределу  $\Omega_a \rightarrow 0$  в выражении (23.7) нетривиален и затрагивает вопрос об асимптотических представлениях функций Бесселя при больших значениях аргумента и индекса. При  $\Omega_a \rightarrow 0$  аргументы функций Бесселя в (23.8) велики. При этом слагаемые с  $|n| < n_{\max} = \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_a}$  дают в этих формулах вклад одного и того же порядка, вклад же слагаемых с  $|n| > n_{\max}$  экспоненциально мал. Поэтому суммирование в формуле (23.7) при  $\Omega_a \rightarrow 0$  нужно проводить до  $|n| = n_{\max}$ , что приводит даже при  $k_z = 0$  к появлению знаменателя вида  $\omega - n_{\max} \Omega_a = \omega - k_{\perp} v_{\perp} = \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}$ , а следовательно, к бесстолкновительному поглощению волн.

Что же касается поглощения волн с  $k_z = 0$  в релятивистской плазме, то наличие  $\gamma \neq 1$  в  $\delta$ -функции выражения (23.7) приводит к особенности при интегрировании этого выражения по  $dp$ , а следовательно, к затуханию волн, связанному с учетом релятивистских эффектов.

Такое поглощение и представляет собой истинно циклотронное поглощение волн в плазме.

Для нерелятивистского максвелловского распределения  $f_{0\alpha}$  (17.1) тензор диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  вычисляется до конца в том смысле, что выражается через табулированные функции. В результате таких вычислений получаем:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= 1 - \sum_{\alpha} \sum_n \frac{n^2 \omega_{L\alpha}^2}{\omega (\omega - n\Omega_{\alpha})} \cdot \frac{A_n(z_{\alpha})}{z_{\alpha}} J_+(\beta_{n\alpha}), \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{xx} + 2 \sum_{\alpha} \sum_n \frac{\omega_{L\alpha}^2 z_{\alpha}}{\omega (\omega - n\Omega_{\alpha})} A'_n(z_{\alpha}) J_+(\beta_{n\alpha}), \\ \varepsilon_{xy} &= -\varepsilon_{yx} = -i \sum_{\alpha} \sum_n \frac{n\omega_{L\alpha}^2}{\omega (\omega - n\Omega_{\alpha})} A'_n(z_{\alpha}) J_+(\beta_{n\alpha}), \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} = \sum_{\alpha} \sum_n \frac{n\omega_{L\alpha}^2 k_{\perp}}{\omega \Omega_{\alpha} k_z} \cdot \frac{A_n(z_{\alpha})}{z_{\alpha}} [1 - J_+(\beta_{n\alpha})], \\ \varepsilon_{yz} &= -\varepsilon_{zy} = -i \sum_{\alpha} \sum_n \frac{\omega_{L\alpha}^2 k_{\perp}}{\omega \Omega_{\alpha} k_z} A'_n(z_{\alpha}) [1 - J_+(\beta_{n\alpha})], \\ \varepsilon_{zz} &= 1 + \sum_{\alpha} \sum_n \frac{\omega_{L\alpha}^2 (\omega - n\Omega_{\alpha})}{\omega k_z^2 v_{T\alpha}^2} A_n(z_{\alpha}) [1 - J_+(\beta_{n\alpha})],\end{aligned}\tag{23.10}$$

где

$$\begin{aligned}A_n(z_{\alpha}) &= e^{-z_{\alpha}} I_n(z_{\alpha}), \\ z_{\alpha} &= \frac{k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2}, \quad \beta_{n\alpha} = \frac{\omega - n\Omega_{\alpha}}{|k_z| v_{T\alpha}}.\end{aligned}\tag{23.11}$$

Здесь  $I_n(z)$  — функция Бесселя от мнимого аргумента, а функция  $J_+(\beta)$  была определена выше [см. (17.15)]. Асимптотические значения функции  $J_+(\beta)$  определяются выражениями (17.16).

Часто достаточно знание так называемой продольной диэлектрической проницаемости (8.9), описывающей электростатическое поле в анизотропной плазме. Такая диэлектрическая проницаемость согласно (8.9) и (23.7) определяется соотношением

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{k^2} \int d\mathbf{p}_{\alpha} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathcal{E}} \times \\ &\times \left[ 1 - \sum_n \frac{\omega J_n^2(b_{\alpha})}{\omega - k_z v_z - n\Omega_{\alpha} / \gamma} \right].\end{aligned}\tag{23.12}$$

В случае максвелловского распределения  $f_{0\alpha}(p)$  это соотношение принимает вид

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left[ 1 - \sum_n \frac{\omega}{\omega - n\Omega_{\alpha}} A_n(z_{\alpha}) J_+( \beta_{n\alpha} ) \right]. \quad (23.13)$$

В заключение приведем выражение для тензора диэлектрической проницаемости вырожденной плазмы с фермиевским распределением частиц по скоростям. Из (23.7) получаем

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = & \delta_{ij} - \sum_{\alpha} \frac{3}{2} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega v_{F\alpha}^2} \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \times \\ & \times \sum_n \frac{\Pi_{ij}^{(n)}(\vartheta)}{\omega - k_z v_{F\alpha} \cos \vartheta - n\Omega_{\alpha}}, \end{aligned} \quad (23.14)$$

где  $\Pi_{ij}^{(n)}(\vartheta)$  — матрица:

$$\Pi_{ij}^{(n)}(\vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{n^2 v_{F\alpha}^2 \sin^2 \vartheta J_n^2}{\zeta_{\alpha}^2}, & \frac{i v_{F\alpha}^2 \sin^2 \vartheta J_n J_n'}{\zeta_{\alpha}}, & \frac{n v_{F\alpha}^2 \sin 2\vartheta J_n^2}{2\zeta_{\alpha}}, \\ \frac{-i v_{F\alpha}^2 \sin^2 \vartheta J_n J_n'}{\zeta_{\alpha}}, & v_{F\alpha}^2 \sin^2 \vartheta J_n'^2, & \frac{-i v_{F\alpha}^2 \sin 2\vartheta J_n J_n'}{2}, \\ \frac{n v_{F\alpha}^2 \sin 2\vartheta J_n^2}{2\zeta_{\alpha}}, & \frac{i v_{F\alpha}^2 \sin 2\vartheta J_n J_n'}{2}, & v_{F\alpha}^2 \sin 2\vartheta J_n^2 \end{pmatrix}. \quad (23.15)$$

( $J_n(\zeta_{\alpha})$  и  $J_n'(\zeta_{\alpha})$  — функция Бесселя и ее производная по аргументу  $\zeta_{\alpha} = \frac{k_{\perp} v_{F\alpha}}{\Omega_{\alpha}} \sin \vartheta$ ).

Соотношение (23.14) приводит к следующему выражению для продольной диэлектрической проницаемости вырожденной плазмы:

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega, \mathbf{k}) = & 1 + \sum_{\alpha} \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{F\alpha}^2} \left[ 1 - \frac{\omega}{2} \sum_n \int_0^{\pi} \times \right. \\ & \left. \times \frac{J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{F\alpha}}{\Omega_{\alpha}} \sin \vartheta \right) \sin \vartheta d\vartheta}{\omega - k_z v_{F\alpha} \cos \vartheta - n\Omega_{\alpha}} \right]. \end{aligned} \quad (23.16)$$

**§ 24. Диэлектрическая проницаемость  
и спектры колебаний холодной  
бесстолкновительной магнитоактивной плазмы**

Перейдем к общему анализу спектров колебаний и характера распространения волн в бесстолкновительной магнитоактивной плазме. Оговорим сразу же, что природа спектров колебаний магнитоактивной плазмы значительно многообразнее спектров колебаний изотропной плазмы и число различных ветвей практически неограниченно велико. Поэтому ниже рассмотрим лишь наиболее интересные и хорошо изученные спектры колебаний магнитоактивной плазмы. Начнем с холодной плазмы, полностью пренебрегая эффектами теплового движения частиц. Иными словами, будем считать выполненными неравенства

$$\frac{k_{\perp} v_{0\alpha}}{\Omega_{\alpha}} \ll 1, \quad \frac{k_z v_{0\alpha}}{\omega} \ll 1, \quad \beta_{n\alpha} = \frac{\omega \pm n\Omega_{\alpha}}{k_z v_{0\alpha}} \gg 1, \quad (24.1)$$

где  $v_{0\alpha} = v_{T\alpha}$  — для невырожденной плазмы с максвелловским распределением частиц по скоростям,  $v_{0\alpha} = v_{F\alpha}$  — для сильно вырожденной плазмы с функцией распределения Ферми.

При полном пренебрежении тепловым движением частиц как для невырожденной, так и для вырожденной плазмы тензор диэлектрической проницаемости согласно (23.10) и (23.14) имеет один и тот же вид:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (24.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2}, \\ \varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{zz} &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2}, \\ \varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} &= ig = -i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2 \Omega_{\alpha}}{\omega(\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2)}, \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24.3)$$

В рассматриваемом приближении диссипативные процессы в плазме не учитываются, поэтому тензор (24.2) оказывается эрмитовским. Уравнения поля

$$\left[ k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega) \right] E_j = 0 \quad (24.4)$$

при подстановке явного вида тензора диэлектрической проницаемости (24.2) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} \right) E_x - i \frac{\omega^2}{c^2} g E_y - k_{\perp} k_z E_z &= 0, \\ i \frac{\omega^2}{c^2} g E_x + \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} \right) E_y &= 0, \\ -k_{\perp} k_z E_x + \left( k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\parallel} \right) E_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24.5)$$

Условие разрешимости этой системы представляет собой дисперсионное уравнение электромагнитных волн в холодной магнитоактивной плазме:

$$\Delta(\omega, \mathbf{k}) = k^2 (\varepsilon_{\perp} k_{\perp}^2 + \varepsilon_{\parallel} k_z^2) - \frac{\omega^2}{c^2} \left[ (\varepsilon_{\perp}^2 - g^2 - \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}) k_{\perp}^2 + 2k^2 \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} \right] - \frac{\omega^4}{c^4} \varepsilon_{\parallel} (\varepsilon_{\perp}^2 - g^2) = 0. \quad (24.6)$$

Из уравнений (24.5) видно, что в магнитоактивной плазме в общем случае продольные и поперечные волны не являются независимыми, как в изотропной плазме. Не распадается на независимые уравнения для продольных и поперечных волн и дисперсионное уравнение (24.6). Такой распад, строго говоря, имеет место только в случае чисто продольного (вдоль магнитного поля) распространения волн ( $k_{\perp} = 0$ ). При этом первые два уравнения системы (24.5) описывают поперечные волны, дисперсионное уравнение для которых имеет вид

$$k^2 c^2 = \omega^2 (\varepsilon_{\perp} \pm g). \quad (24.7)$$

Два знака в правой части соответствуют двум независимым поляризациям поперечной волны — левой, для которой

$$E_{y1}/E_{x1} = -i \quad (24.8)$$

(так называемая обыкновенная волна), и правой, для которой

$$E_{y2}/E_{x2} = i \quad (24.9)$$

(необыкновенная волна).

Третье же уравнение системы (24.5) в случае чисто продольного распространения ( $k_{\perp} = 0$ ) описывает продольные колебания холодной магнитоактивной плазмы, и дисперсионное уравнение для них принимает вид

$$\varepsilon_{\parallel} = 0, \quad (24.10)$$

причем  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k} \parallel Oz$ .

Спектр продольных колебаний, определяемый решением уравнения (24.10), записывается в виде

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2. \quad (24.11)$$

Что же касается решений дисперсионного уравнения для поперечных волн (24.7), то в общем случае они выражаются громоздкими формулами. Простые аналитические выражения для спектров частот этих волн удается получить лишь в предельных случаях:

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{Le}^2 \left( 1 \mp \frac{\Omega_e}{\sqrt{k^2 c^2 + \omega_{Le}^2}} \right) \quad \text{при } \omega \gg \Omega_e,$$

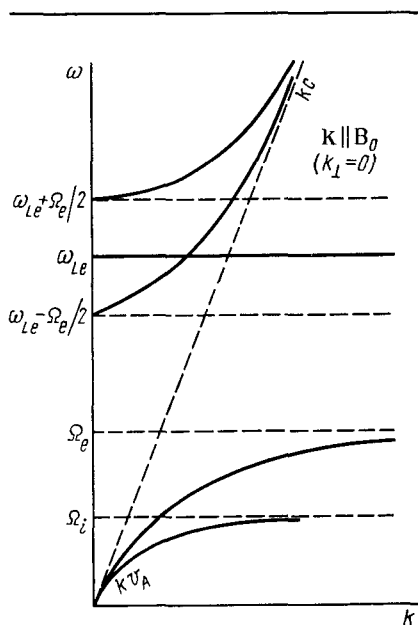
$$\omega = \frac{k^2 c^2 \Omega_e}{\omega_{Le}^2} \quad \text{при } \Omega_i \ll \omega \ll \Omega_e, \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e}, \quad (24.12)$$

$$\omega^2 = \frac{k^2 v_A^2}{1 + v_A^2/c^2} \left[ 1 \mp \frac{k v_A}{\Omega_i (1 + v_A^2/c^2)^{3/2}} \right] \quad \text{при } \omega \ll \Omega_i,$$

где  $v_A = c \frac{\Omega_i}{\omega_{Li}} = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi N_i M}}$  — альвеновская скорость.

Исходя из этих выражений можно представить общий ход кривой  $\omega(k)$ , если учесть, кроме того, что при  $k^2 \rightarrow \infty$  уравнения (24.7) допускают решения  $\omega \rightarrow \Omega_i$  и  $\omega \rightarrow \Omega_e$ .

Ход кривой  $\omega(k)$  для плазмы с  $\omega_{Le} > \Omega_e$  представлен на рис. 9. Из графика видно, что в холодной магнитоактивной плазме существует пять ветвей колебаний, распространяющихся строго вдоль внешнего магнитного поля, причем четыре из них описывают поперечные, а одна — продольные волны. Поперечные волны в области частот  $\omega < \Omega_i$  называют магнитогидродинамическими, причем ветвь колебаний, которая при  $k \rightarrow \infty$  соответствует  $\omega \rightarrow \Omega_i$ , называют альвеновской волной, а ветвь колебаний, которая при  $k \rightarrow \infty$ , соответствует  $\omega \rightarrow \Omega_e$ , для колебаний в области частот  $\omega < \Omega_i$  — быстрой магнитозвуковой волной, а в области промежуточных частот  $\Omega_i < \omega < \Omega_e$  — спиральной волной или геликоном. Следует отметить, что все эти колебания в рассматриваемом бесстолкновительном пределе являются незатухающими.



Не представляет труда проанализировать дисперсионное уравнение (24.6) также в случае стро-

Рис. 9

го поперечного распространения волн ( $k_z = 0$ ). При этом оно распадается на два уравнения:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\parallel}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_{\perp}^2 - g^2}{\varepsilon_{\perp}}, \quad (24.13)$$

описывающие соответственно обыкновенную и необыкновенную волны в магнитоактивной плазме. Обыкновенная волна является чисто поперечной, в ней отлична от нуля лишь одна компонента электрического поля  $E_z$ , причем спектр частот

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{Le}^2. \quad (24.14)$$

Необыкновенная же волна является продольно-поперечной с отличными от нуля компонентами поля  $E_y$  и  $E_x$ . Простые аналитические соотношения для спектров частот этой волны удается получить только в предельных случаях:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[ \Omega_e^2 + 2\omega_{Le}^2 + k^2 c^2 \pm \sqrt{4\omega_{Le}^2 \Omega_e^2 + (k^2 c^2 - \Omega_e^2)^2} \right] \text{ при } \omega \gg \omega_{Li},$$

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Li}^2 k^2 c^2}{k^2 c^2 (1 + \omega_{Le}^2 / \Omega_e^2) + \omega_{Le}^4 / \Omega_e^2} \text{ при } \Omega_i \ll \omega \ll \Omega_e, \quad (24.15)$$

$$\omega^2 = \frac{k^2 v_A^2}{1 + v_A^2 / c^2} \text{ при } \omega \ll \Omega_i.$$

Учитывая формулы (24.14) и (24.15), а также замечая, что при  $k^2 \rightarrow \infty$  второе уравнение (24.13) имеет предельные решения  $\omega \rightarrow \sqrt{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2}$  и  $\omega \rightarrow \frac{\omega_{Li}^2}{\sqrt{1 + \omega_{Le}^2 / \Omega_e^2}} \approx \sqrt{\Omega_e \Omega_i}$  легко представить об-

щий ход дисперсионных кривых  $\omega(k)$ , который приведен на рис. 10 для плазмы с  $\omega_{Le} > \Omega_e$ . Из графика видно, что число ветвей колебаний, распространяющихся строго поперек магнитного поля в холодной бесстолкновительной плазме, равно четырем, причем одна из них описывает чисто поперечные волны (ветвь с  $\omega = \omega_{Le}$  при  $k = 0$ ), а остальные три — продольно-поперечные волны. Колебания с частотой  $\omega < \sqrt{\Omega_e \Omega_i}$  в этом случае соответствуют магнитогидродинамической волне, распространяющейся поперек магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ ; отсутствуют колебания, соответствующие альвеновской ветви.

В общем случае произвольного направления распространения волн получение аналитических решений дисперсионного уравнения (24.6) весьма затруднительно. Простые формулы для  $\omega(k)$  удается записать в области низких частот  $\omega \ll \Omega_i$  для спектров альвеновской и магнитогидродинамической волн:



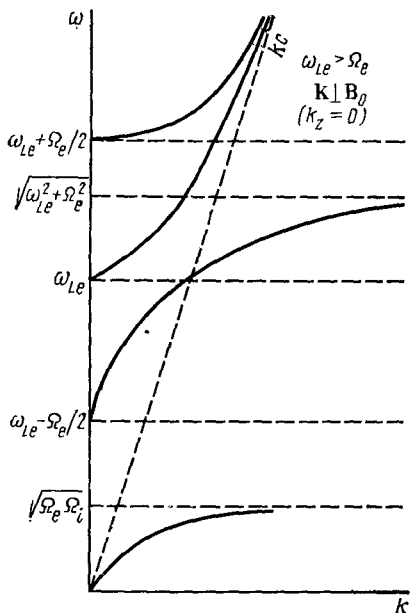


Рис. 10

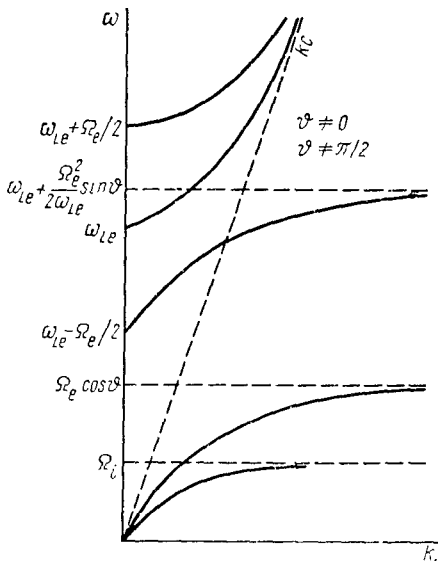


Рис. 11

$$\omega^2 = \frac{k^2 v_A^2 \cos^2 \vartheta}{1 + v_A^2/c^2}, \quad \omega^2 = \frac{k^2 v_A^2}{1 + v_A^2/c^2}, \quad (24.16)$$

в промежуточной области частот  $\Omega_i \ll \omega \ll \Omega_e$ ,  $\omega_{Le}^2/\Omega_e$  для спектра спиральных волн (геликона)

$$\omega = \frac{k^2 c^2 \Omega_e}{\omega_{Le}^2} |\cos \vartheta| \quad (24.17)$$

и в области высоких частот для обыкновенной и необыкновенной волн, спектры частот которых в пределе  $\omega \gg \Omega_e$  стремятся к виду:

$$\omega^2 \rightarrow k^2 c^2 + \omega_{Le}^2. \quad (24.18)$$

Здесь  $\vartheta$  — угол между векторами  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{k}$ .

График функций  $\omega(k)$  всех пяти ветвей колебаний изображен на рис. 11 для плазмы с  $\omega_{Le} > \Omega_e$  и  $\vartheta \neq 0, \pi/2$ .

В заключение рассмотрим вопрос о возможности распространения продольных волн в холодной магнитоактивной плазме и спектр их частот. Как указывалось, строго продольными могут быть только волны, распространяющиеся вдоль внешнего магнитного поля. Однако, если формально электрическое поле волны считать продольным,

т. е.  $\mathbf{E} = -ik\Phi$ , то из уравнений поля (24.4) получим условие существования такого поля в холодной магнитоактивной плазме:

$$k_i k_j \varepsilon_{ij} = k_{\perp}^2 \varepsilon_{\perp} + k_z^2 \varepsilon_{\parallel} = 0. \quad (24.19)$$

Решение этого дисперсионного уравнения не представляет труда и приводит к следующим спектрам продольных волн:

$$\omega^2 = \frac{\omega_{L_e}^2 + \Omega_e^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_{L_e}^2 + \Omega_e^2)^2 - 4\omega_{L_e}^2 \Omega_e^2 \cos^2 \vartheta}, \quad (24.20)$$

$$\omega^2 = \left(1 - \frac{m}{M} Z \operatorname{tg}^2 \vartheta\right) \Omega_i^2,$$

где  $Z = |e_i/e|$ .

Данные выражения теряют смысл при  $\vartheta \rightarrow \pi/2$ , когда  $\cos^2 \vartheta < m/M$ . В этих условиях спектры продольных волн

$$\omega^2 = \omega_{L_e}^2 + \Omega_e^2,$$

$$\omega^2 = \frac{\Omega_e^2 \omega_{Li}^2}{\omega_{L_e}^2 + \Omega_e^2} \approx \Omega_e \Omega_i, \quad (24.21)$$

$$\omega^2 \approx \frac{\omega_{L_e}^2 \Omega_i^2 \cos^2 \vartheta}{\omega_{L_e}^2 + \Omega_e^2}.$$

Часто колебания, соответствующие первому из этих решений, в литературе называют колебаниями на верхней гибридной частоте, а колебания, соответствующие второму решению, — колебаниями на нижней гибридной частоте. Графически решения уравнения (24.19) представлены на рис. 12 для плазмы с  $\omega_{L_e} > \Omega_e$ .

Теперь можно ответить на вопрос о возможности существования продольных волн в магнитоактивной плазме. Очевидно, что в условиях, когда корни уравнения (24.19) близки к корням точного дисперсионного уравнения (24.6), соответствующие последней волны с хорошей степенью точности можно считать продольными. Легко видеть, что в общем случае произвольных значений  $\vartheta$  это имеет место, когда  $k^2 \rightarrow \infty$ , точнее

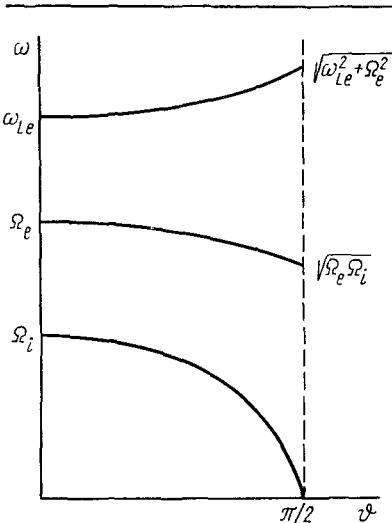


Рис. 12

$$k^2 c^2 \gg \omega^2. \quad (24.22)$$

Неравенство (24.22) и является условием продольности волн в магнитоактивной плазме. При  $\vartheta \neq \pi/2$  имеются три ветви продольных колебаний, а при  $\vartheta = \pi/2$  — только две, что соответствует графику рис. 12.

### § 25. Влияние теплового движения частиц на характер колебаний бесстолкновительной магнитоактивной плазмы

Было показано, что в холодной бесстолкновительной плазме, помещенной во внешнее магнитное поле, существует пять ветвей незатухающих колебаний. Учет теплового движения частиц приводит в первую очередь к появлению затухания рассмотренных колебаний. Кроме того, благодаря учету теплового движения частиц в магнитоактивной плазме появляются новые ветви колебаний, к наиболее интересным из которых относятся низкочастотные ионно-звуковые колебания и циклотронные волны. Именно эти ветви колебаний горячей бесстолкновительной плазмы и будем изучать в дальнейшем.

В общем случае горячей плазмы, когда тензор диэлектрической проницаемости имеет вид (23.10) [либо (23.14) — для вырожденной плазмы], условие разрешимости системы уравнений поля (24.4), т. е. дисперсионное уравнение колебаний плазмы, можно записать таким образом:

$$\Delta(\omega, \mathbf{k}) = \left| k^3 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = Ak^4 + B \frac{\omega^2}{c^2} k^2 + C \frac{\omega^4}{c^4} = 0, \quad (25.1)$$

где

$$A = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \varepsilon_{xx} + \frac{k_z^2}{k^2} \varepsilon_{zz} + 2 \frac{k_{\perp} k_z}{k^2} \varepsilon_{xz},$$

$$B = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{i\mu} \varepsilon_{\mu j} - A \text{Sp} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = -\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xz}^2 - \quad (25.2)$$

$$- \frac{k_z^2}{k^2} (\varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yz}^2) - \frac{k_{\perp}^2}{k^2} (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xy}^2) + 2 \frac{k_{\perp} k_z}{k^2} (\varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} - \varepsilon_{xz} \varepsilon_{zy}),$$

$$C = \text{Det} |\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})| = \varepsilon_{zz} (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xy}^2) + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{yy} \varepsilon_{xz}^2 + 2 \varepsilon_{xy} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz}.$$

Легко видеть, что  $A(\omega, \mathbf{k})$  совпадает с «продольной» диэлектрической проницаемостью магнитоактивной плазмы. Поэтому условие потенциальности колебаний — это условие, при котором решение точного дисперсионного уравнения (25.1) мало отличается от решений уравнения для продольных волн:

$$A(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (25.3)$$

Учитывая, что коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  являются соответственно линейной, квадратичной и кубичной комбинациями компонент тензора диэлектрической проницаемости, а следовательно, и плотности плазмы, приходим к выводу, что в области высоких (электронных) частот  $\omega \sim \omega_{Le} \sim \Omega_e$  все компоненты тензора  $\varepsilon_{ij}$  порядка единицы и условие потенциальности колебаний должно быть

$$\omega^2 \ll k^2 c^2. \quad (25.4)$$

В области низких частот  $\omega \ll \Omega_i \ll \omega_{Li}$  компоненты тензора  $\varepsilon_{ij} \sim \omega_{Li}^2 / \Omega_i^2 = c^2 / v_A^2$  велики и условие потенциальности колебаний имеет более жесткий вид:

$$\omega^2 \ll k^2 v_A^2. \quad (25.5)$$

Условия (25.4) и (25.5) не означают, что все колебания плазмы в этих областях частот являются потенциальными. Наряду с потенциальными возможны и непотенциальные колебания. Важно, что среди большого числа ветвей колебаний обязательно есть и потенциальная ветвь.

Приступая к анализу общего дисперсионного уравнения (25.1), рассмотрим предел (24.1), когда эффекты теплового движения слабо выражены. В предыдущем параграфе было полностью пренебрежено такими диссипативными процессами. Тензор диэлектрической проницаемости (24.2) при этом оказался эрмитовским, а плазма — непоглощающей. Теперь учтем слабое тепловое движение и обусловленное им слабое поглощение волн благодаря черенковскому и циклотронному механизмам диссипации.

Учет этих эффектов приводит к малой антиэрмитовской поправке к тензору (24.2), которая отлична от нуля только для невырожденной (максвелловской) плазмы:

$$\delta\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^a = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^a & ig^a & 0 \\ -ig^a & \varepsilon_{yy}^a & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel}^a \end{pmatrix}, \quad (25.6)$$

где

$$\varepsilon_{xx}^a = \varepsilon_{\perp}^a = i \sqrt{\frac{\pi}{8}} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega |k_z| v_{T\alpha}} \left[ e^{-\frac{(\omega - \Omega_{\alpha})^2}{2k_z^2 v_{T\alpha}^2}} + e^{-\frac{(\omega + \Omega_{\alpha})^2}{2k_z^2 v_{T\alpha}^2}} \right],$$

$$\varepsilon_{yy}^a = \varepsilon_{\perp}^a + i \sqrt{2\pi} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2 k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2 \omega}{\omega^2 \Omega_{\alpha}^2 |k_z| v_{T\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{T\alpha}^2}}, \quad (25.7)$$

$$g^a = i \sqrt{\frac{\pi}{8}} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega |k_z| v_{T\alpha}} \left[ e^{-\frac{(\omega - \Omega_{\alpha})^2}{2k_z^2 v_{T\alpha}^2}} - e^{-\frac{(\omega + \Omega_{\alpha})^2}{2k_z^2 v_{T\alpha}^2}} \right],$$

$$\varepsilon_{\parallel}^a = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{\alpha} \frac{\omega \omega_{L\alpha}^2}{|k_z|^3 v_{T\alpha}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{T\alpha}^2}}.$$

Указанная поправка в свою очередь приводит к слабому затуханию волн, рассмотренных в предыдущем параграфе, причем декремент затухания в общем случае выражается сложной формулой ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ ):

$$\delta = -\frac{\text{Im } \Lambda(\omega, \mathbf{k})}{\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re } \Lambda(\omega, \mathbf{k})} = -\frac{k^4 A^a + \frac{\omega^2}{c^2} k^2 B^a + \frac{\omega^4}{c^4} C^a}{k^4 \frac{\partial A^a}{\partial \omega} + k^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\omega^2}{c^2} B^a + \frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{\omega^4}{c^4} C^a}, \quad (25.8)$$

где

$$A^a = \varepsilon_{\perp}^a \frac{k_{\perp}^2}{k^2} + \varepsilon_{\parallel}^a \frac{k_z^2}{k^2},$$

$$B^a = -\left(1 + \frac{k_z^2}{k^2}\right) (\varepsilon_{\perp}^a \varepsilon_{\parallel}^a + \varepsilon_{\parallel}^a \varepsilon_{\perp}^a) - 2(\varepsilon_{\perp}^a \varepsilon_{\perp}^a - g^a g^a) \frac{k_{\perp}^2}{k^2} -$$

$$- \varepsilon_{\perp}^a (\varepsilon_{yy}^a - \varepsilon_{\perp}^a) \frac{k_{\perp}^2}{k^2} - \varepsilon_{\parallel}^a (\varepsilon_{yy}^a - \varepsilon_{\perp}^a) \frac{k_z^2}{k^2},$$

$$C^a = \varepsilon_{\parallel}^a (\varepsilon_{\perp}^{a2} - g^{a2}) + 2\varepsilon_{\parallel}^a (\varepsilon_{\perp}^a \varepsilon_{\perp}^a - g^a g^a) + \varepsilon_{\perp}^a \varepsilon_{\parallel}^a (\varepsilon_{yy}^a - \varepsilon_{\perp}^a), \quad (25.9)$$

$$A^a = \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \varepsilon_{\perp}^a + \frac{k_z^2}{k^2} \varepsilon_{\parallel}^a,$$

$$B^a = -\varepsilon_{\perp}^a \varepsilon_{\parallel}^a \left(1 + \frac{k_z^2}{k^2}\right) - \frac{k_{\perp}^2}{k^2} (\varepsilon_{\perp}^{a2} - g^{a2}),$$

$$C^a = \varepsilon_{\parallel}^a (\varepsilon_{\perp}^{a2} - g^{a2}).$$

Компоненты  $\varepsilon_{ij}^a$  и  $\varepsilon_{ij}^a$  при этом даются формулами (24.2) и (25.6) соответственно.

В области высоких частот  $\omega \geq \Omega_e$  выражение для декремента затухания  $\delta$ , так же как и для спектра колебаний  $\omega(\mathbf{k})$ , имеет довольно громоздкий вид и здесь приводить их не будем. Ограничимся формулами для  $\delta(\mathbf{k})$  в области низких частот  $\omega \ll \Omega_i$ , в которой спектры колебаний плазмы даются выражениями (24.16) (для альвеновской и магнитогиродинамической ветвей колебаний), и в области промежуточных частот  $\Omega_i \ll \omega \ll \Omega_e$ , в которой спектр спиральных волн дается выражением (24.17). Формулы для  $\delta(\mathbf{k})$  соответственно имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta &= -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{\omega^6 k_{\perp}^2}{\Omega_i^2 |k_z|^5 v_{Te}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}}, \\ \delta &= -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{m}{M} \omega \frac{v_{Te}}{v_A} \frac{k_{\perp}^2}{k |k_z|} e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}}, \\ \delta &= -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{k_{\perp}^2 \omega^7}{2k |k_z|^6 v_{Te}^5 \Omega_e} e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}}. \end{aligned} \quad (25.10)$$

Из этих формул видно, что за безударное затухание колебаний в рассматриваемых областях частот ответственно черенковское поглощение волн электронами плазмы.

Сказанное относится к невырожденной максвелловской плазме. Что касается вырожденной плазмы с функцией распределения Ферми, то в условиях (24.1), т. е. в области фазовых скоростей, больших скорости Ферми, антиэрмитовская часть тензора диэлектрической проницаемости строго равна нулю, и поэтому поглощение таких волн в безударной вырожденной плазме полностью отсутствует.

Как указывалось, в холодной магнитоактивной плазме существует пять ветвей слабозатухающих (либо вовсе незатухающих) колебаний. Естественно ожидать, что с учетом теплового движения частиц должны появиться новые ветви колебаний. Действительно, в отсутствие внешнего магнитного поля в области фазовых скоростей, меньших тепловой скорости электронов, в неизотермической плазме с  $T_e \gg T_i$  существует низкочастотная ионно-звуковая ветвь колебаний, которая существенно зависит от температуры электронов плазмы. Такие колебания могут существовать и в магнитоактивной плазме. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим область частот

$$v_{Ti} \ll \omega/k_z \ll v_{Te}, \quad \omega^2 \ll \Omega_i^2 \ll \omega_{Li}^2. \quad (25.11)$$

Если к тому же интересоваться колебаниями с длиной волны больше ларморовских радиусов частиц, т. е.  $k_{\perp}^2 v_{Tx}^2 \ll \Omega_a^2$ , то для компонент тензора диэлектрической проницаемости невырожденной плазмы из выражения (23.10) получим

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ 0 & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (25.12)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2} = \frac{c^2}{v_A^2}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{c^2}{v_A^2} + i\sqrt{2\pi} \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \cdot \frac{k_{\perp}^2 v_{Te}}{\omega |k_z|}, \\ \varepsilon_{yz} &= -\varepsilon_{zy} = -i \frac{\omega_{Le}^2}{\omega \Omega_e} \cdot \frac{k_{\perp}}{k_z} \left( 1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right), \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{Le}^2}{k_z^2 v_{Te}^2} \left( 1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right). \end{aligned} \quad (25.13)$$

Дисперсионное уравнение (25.1) при подстановке в него (25.12) распадается на два уравнения:

$$k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{xx} = 0, \quad (25.14)$$

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{yy}\right) \varepsilon_{zz} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{yz}^2 = 0.$$

Первое из них описывает незатухающие в рассматриваемом приближении альвеновские волны со спектром

$$\omega^2 = k_z^2 v_A^2 = k^2 v_A^2 \cos^2 \vartheta. \quad (25.15)$$

Это по существу продолжение ветви быстрых альвеновских волн при  $v_A \gg v_{Te}$  со спектром (24.16) в область, в которой  $v_{Ti} \ll v_A \ll v_{Te}$ .

Из второго же уравнения (25.14) находим спектры колебаний так называемых быстрой и медленной магнитозвуковых волн:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} k^2 \left[ (v_A^2 + v_s^2) \pm \sqrt{(v_A^2 + v_s^2)^2 - 4v_A^2 v_s^2 \cos^2 \vartheta} \right],$$

$$\delta_{\pm} = -\frac{kv_s}{2|\cos \vartheta|} \sqrt{\frac{\pi m}{8M}} \left[ 1 \pm \frac{\cos 2\vartheta \left( \frac{v_s^2}{v_A^2} \cos^2 \vartheta - 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{v_s^4}{v_A^4} - 2 \frac{v_s^2}{v_A^2} \cos 2\vartheta}} \right], \quad (25.16)$$

где  $v_s = \sqrt{Z \frac{T_e}{M}}$  — скорость ионного звука;  $\vartheta$  — угол между направлением распространения волны и направлением магнитного поля.

Особо простой вид спектр (25.16) принимает в случае плазмы низкого давления, когда  $\beta = v_s^2/v_A^2 \ll 1$ . При этом быстрая магнитозвуковая волна становится чисто поперечной ( $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ ) со спектром

$$\omega_+^2 = k^2 v_A^2, \quad \delta_+ = -\sqrt{\frac{\pi m}{8M}} \cdot \frac{v_s}{v_A} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{|\cos \vartheta|} \omega_+. \quad (25.17)$$

Отсюда видно, что быстрая магнитозвуковая волна есть продолжение ветви быстрой магнитогиродинамической волны со спектром (24.16) в область малых фазовых скоростей  $\omega/k_z < v_{Te}$ .

Медленная магнитозвуковая волна в плазме низкого давления  $\beta \ll 1$  вырождается в чисто продольную (потенциальную,  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ ), и спектр ее приобретает вид

$$\omega_-^2 = k^2 v_s^2 \cos^2 \vartheta, \quad \delta_- = -\sqrt{\frac{\pi m}{8M}} \omega_-. \quad (25.18)$$

Это новая, шестая ветвь колебаний магнитоактивной горячей плазмы является аналогом ионно-звуковых волн изотропной плазмы

и существует только при достаточно большой неизотермичности плазмы, когда  $T_e \gg T_i$ .

В заключение отметим, что низкочастотные медленные волны существуют и в вырожденной плазме. Действительно, в условиях

$$v_{Fi} \ll \frac{\omega}{k_z} \ll v_{Fe}, \quad \omega^2 \ll \Omega_i^2 \ll \omega_{Li}^2, \quad \frac{k_{\perp}^2 v_{Fa}^2}{\Omega_a^2} \ll 1 \quad (25.19)$$

тензор диэлектрической проницаемости (23.14) также сводится к виду (25.12), причем

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2} = \frac{c^2}{v_A^2}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{c^2}{v_A^2} + i \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{\omega_{Le}^2 k_{\perp}^2 v_{Fe}}{\omega |k_z| \Omega_e^2}, \\ \epsilon_{yz} &= -\epsilon_{zy} = -i \frac{\omega_{Le}^2}{\omega \Omega_e} \cdot \frac{k_{\perp}}{k_z} \left( 1 + i \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{\omega}{|k_z| v_{Fe}} \right), \quad (25.20) \\ \epsilon_{zz} &= -\frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} + \frac{3\omega_{Le}^2}{k_z^2 v_{Fe}^2} \left( 1 + i \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{|k_z| v_{Fe}} \right). \end{aligned}$$

С учетом этих выражений из дисперсионных уравнений (25.14) легко видеть, что спектр альвеновской волны (25.15) остается неизменным и в вырожденной плазме. Что касается быстрой и медленной магнитозвуковых волн, то спектры их частот в вырожденной плазме определяются формулой (25.16), в которой следует принять  $v_s = \sqrt{\frac{m}{3M}} v_{Fe}$ . Декремент же затухания

$$\delta_{\pm} = -\frac{kv_s}{2|\cos \vartheta|} \sqrt{\frac{\pi m}{8M}} \left[ 1 \pm \frac{\cos 2\vartheta \left( \frac{v_s^2}{v_A^2} \cos 2\vartheta - 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{v_s^4}{v_A^4} - 2 \frac{v_s^2}{v_A^2} \cos 2\vartheta}} \right] \quad (25.21)$$

Здесь также  $v_s = \sqrt{\frac{m}{3M}} v_{Fe}$ .

Следует отметить, кроме того, что наряду с альвеновской и магнитозвуковыми волнами в промежуточной области фазовых скоростей  $v_{0i} < \omega/k_z < v_{0e}$  возможны спиральные волны, если только выполнены условия  $\Omega_i < \omega < \Omega_e, \omega_{Le}^2/\Omega_e^2$ . Спектр их частот остается таким же, как и в случае холодной плазмы, т. е. вида (24.17), а декремент затухания определяется выражениями

$$\delta = -\frac{\sin^2 \vartheta \omega^3}{k \Omega_e \cos^2 \vartheta} \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{1}{v_{Te}} & \text{— для невырожденной плазмы,} \\ \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{v_{Fe}} & \text{— для вырожденной плазмы.} \end{cases} \quad (25.22)$$



## § 26. Циклотронные волны в плазме

В холодной магнитоактивной плазме, как было показано в § 24, число различных ветвей колебаний не превышает пяти. При учете теплового движения электронов появляется шестая ветвь — медленная магнитозвуковая волна, которая в случае невырожденной плазмы низкого давления в условиях  $\beta \ll 1$  и  $T_e \gg T_i$  переходит в ионно-звуковую волну (см. § 25).

Однако этими шестью ветвями не исчерпываются спектры всех возможных электромагнитных колебаний магнитоактивной плазмы. Как отмечалось, дисперсионное уравнение электромагнитных волн в магнитоактивной плазме при учете теплового движения частиц является трансцендентным, и, следовательно, число ветвей колебаний может быть бесконечно велико. Но подавляющее большинство этих ветвей колебаний является сильнозатухающими во времени или в пространстве. Только в некоторых областях частот и частных предельных случаях тепловое движение частиц приводит к возможности существования слабозатухающих колебаний в магнитоактивной плазме.

Кроме рассмотренных, заслуживают внимания колебания вблизи циклотронных частот электронов и ионов  $\omega = s\Omega_a$ , где  $s = 1, 2, \dots$ , или циклотронные волны. Исследование циклотронных волн в бесстолкновительной плазме представляет практический интерес в связи с возможностью их использования для нагрева газовой плазмы в условиях, когда омический нагрев становится неэффективным. Не будем подробно излагать теорию циклотронных колебаний магнитоактивной плазмы, ограничимся лишь исследованием циклотронных волн, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля. Именно для таких волн явление циклотронного резонанса (циклотронного поглощения) выражено наиболее явно. Следует отметить, что для волн, распространяющихся строго вдоль магнитного поля, отсутствуют высшие резонансы на кратных циклотронных частотах  $s \geq 2$ , которые появляются лишь при  $k_{\perp} \neq 0$ .

Дисперсионное уравнение (25.1) в случае невырожденной плазмы для волн, распространяющихся вдоль магнитного поля, распадается на три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{zz} = 1 + \sum_a \frac{\omega_{La}^2}{k^2 v_{Ta}^2} \left[ 1 - J_+ \left( \frac{\omega}{k v_{Ta}} \right) \right] = 0, \\ k^2 c^2 - \omega^2 (\epsilon_{xx} \pm i \epsilon_{xy}) = k^2 c^2 - \\ - \omega^2 \left[ 1 - \sum_a \frac{\omega_{La}^2}{\omega (\omega \mp \Omega_a)} J_+ \left( \frac{\omega \mp \Omega_a}{k v_{Ta}} \right) \right] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (26.1)$$

Первое уравнение этой системы описывает чисто продольные колебания магнитоактивной плазмы и в точности совпадает с дисперсионным уравнением для продольных колебаний изотропной невырожденной плазмы, исследованным в § 18. Второе и третье уравнения описывают поперечные обыкновенную (левополяризованную) и необык-

новенную (правополяризованную) волны, распространяющиеся вдоль внешнего магнитного поля. Эти уравнения являются симметричными относительно циклотронной частоты  $\Omega_\alpha$ , поэтому достаточно ограничиться исследованием одного из них. Другое уравнение будет справедливо при замене  $\Omega_\alpha \rightarrow -\Omega_\alpha$ .

Рассмотрим циклотронные волны вблизи электронной циклотронной частоты  $\omega \approx \Omega_e$  (точнее,  $|\omega - \Omega_e| \ll \Omega_e$ ). Пусть при этом  $|\omega - \Omega_e| \gg kv_{Te}$ , или, говоря на языке оптики, резонансная частота  $\omega$  лежит вне линии резонансного поглощения. В этом параграфе, поскольку речь идет об электромагнитных волнах вблизи резонансных частот поглощения отдельных частиц, удобнее пользоваться языком оптики и вместо собственных частот колебаний  $\omega(\mathbf{k})$  из дисперсионных уравнений (26.1) определять показатели преломления  $n = \frac{c}{\omega} \text{Re } k$  и коэффициент поглощения  $\chi = \frac{c}{\omega} \text{Im } k$ . В частности, вдали от линии резонансного поглощения электронов из второго уравнения (26.1) находим

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega - \Omega_e)}, \quad \chi = \sqrt{\frac{\pi}{8} \cdot \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \cdot \frac{c}{v_{Te}} \cdot \frac{1}{n^2}} e^{-\frac{(\omega - \Omega_e)^2 c^2}{2n^2 \omega^2 v_{Te}^2}}. \quad (26.2)$$

Отсюда видно, что электронные циклотронные волны в бесстолкновительной плазме вне линии резонансного поглощения, когда  $|\omega - \Omega_e|^3 \gg \omega_{Le}^2 \frac{v_{Te}^2}{c^2} \Omega_e$ , поглощаются экспоненциально слабо. С приближением частоты  $\omega$  к циклотронной частоте  $\Omega_e$  поглощение циклотронной волны растет и в условиях, когда частота поля попадает внутрь линии резонансного поглощения, т. е. при  $|\omega - \Omega_e|^3 \ll \omega_{Le}^2 \times \frac{v_{Te}^2}{c^2} \Omega_e$  волна становится сильно затухающей:

$$n + i\chi = \frac{i + \sqrt{3}}{2} \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{Le}^2 c}{\omega^2 v_{Te}} \right)^{1/3}. \quad (26.3)$$

Глубина проникновения циклотронной волны в плазму в этом случае, как легко видеть, совпадает с глубиной аномального скин-эффекта в изотропной плазме (см. § 20):

$$\lambda_{\text{ск}} = \frac{1}{\frac{\omega}{c} \chi} = 2 \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{c^2 v_{Te}}{\omega \omega_{Le}^2} \right)^{1/3}.$$

Такой результат имеет физически наглядную интерпретацию. Дело в том, что в магнитоактивной плазме электроны совершают ларморовское вращение с частотой  $\Omega_e$  и поэтому являются источниками поля, обладающими собственной частотой (т. е. частицы представляются в виде осцилляторов с собственной частотой  $\Omega_e$ ). Это в свою очередь приводит к тому, что все особенности изотропной плазмы на частоте  $\omega$  в магнитоактивной плазме должны проявиться на комбинационных

частотах  $\omega \pm \Omega_e$ . В частности, вблизи циклотронного резонанса при  $|\omega - \Omega_e| \ll kv_{Te}$  имеет место аномальное скинирование поперечного поля, подобно изотропной плазме при  $\omega \ll kv_{Te}$ . На рис. 13 показан ход кривой  $n^2(\omega)$  для электронной циклотронной волны. Заштрихованная область соответствует сильному поглощению циклотронной волны в плазме (область аномального скин-эффекта). Из графика видно, что «прозрачность» ( $n^2(\omega) > 0$ ) электронной циклотронной волны соответствует области частот  $\omega < \Omega_e$ .

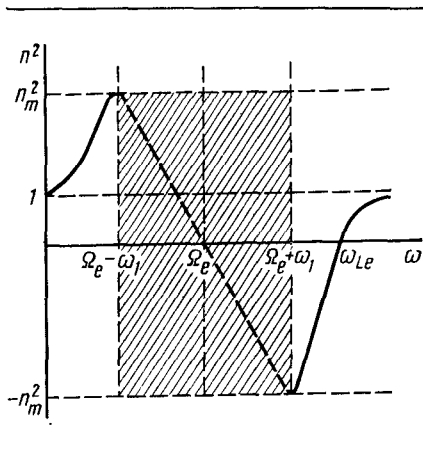


Рис. 13

Перейдем теперь к рассмотрению циклотронных волн в вырожденной плазме. Для волн, распространяющихся строго вдоль магнитного поля, общее дисперсионное уравнение (25.1) распадается на три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{zz} = 1 + \sum_a \frac{3\omega_{La}^2}{k^2 v_{Fa}^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega}{kv_{Fa}} \ln \frac{\omega + kv_{Fa}}{\omega - kv_{Fa}} \right] = 0, \\ k^2 c^2 - \omega^2 (\varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}) = k^2 c^2 - \omega^2 \left\{ 1 - \sum_a \frac{3}{4} \times \right. \\ \times \frac{\omega_{La}^2}{\omega kv_{Fa}} \left[ \left( 1 - \frac{(\omega \mp \Omega_a)^2}{k^2 v_{Fa}^2} \right) \ln \frac{\omega \mp \Omega_a + kv_{Fa}}{\omega \mp \Omega_a - kv_{Fa}} + \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\omega \mp \Omega_a}{kv_{Fa}} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \right\} (26.4)$$

Так же как и в случае невырожденной плазмы, первое уравнение этой системы описывает чисто продольные колебания магнитоактивной плазмы и в точности совпадает с дисперсионным уравнением для продольных колебаний изотропной вырожденной плазмы, подробно исследованным в § 19. Второе и третье уравнения, так же как в невырожденной плазме, симметричны относительно циклотронной частоты  $\Omega_a$  (с заменой  $\Omega_a \rightarrow -\Omega_a$ ), поэтому достаточно проанализировать одно из них.

Ограничиваясь рассмотрением только электронных циклотронных волн  $\omega \approx \Omega_e$ , исследуем второе уравнение (26.4) вдали ( $|\omega - \Omega_e| > kv_{Fe}$ ) и вблизи ( $|\omega - \Omega_e| < kv_{Fe}$ ) резонансной линии поглощения. Первая особенность вырожденной плазмы проявляется в том, что вдали от этой линии поглощение циклотронных волн полностью отсутствует из-за отсутствия черенковского поглощения электронами плазмы. Показатель преломления циклотронной волны, так

же как и для невырожденной плазмы, определяется первым выражением (26.2), которое оказывается справедливым в области  $|\omega - \Omega_e|^3 \gg \gg \omega_{Le}^2 \Omega_e v_{Fe}^2 / c^2$ . Обратное неравенство соответствует области внутри линии поглощения, в которой из (26.4) получаем [ср. с (26.3)]

$$n + i\chi = \frac{i + \sqrt{3}}{2} \left( \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{\omega_{Le}^2 c}{\omega^2 v_{Fe}} \right)^{1/3}. \quad (26.5)$$

Здесь также глубина проникновения поля циклотронной волны в плазму определяется формулой аномального скин-эффекта (см. § 20):

$$\lambda_{ск} = 2 \left( \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{c^2 v_{Fe}}{\omega_{Le}^2} \right)^{1/3}. \quad (26.6)$$

Общий ход кривой  $n^2(\omega)$ , как и в случае невырожденной плазмы, представлен на рис. 13, причем  $n_m \approx (\omega_{Le}^2 c / \Omega_e^2 v_0)^{1/3}$ , а  $\omega_1 \approx n_m \Omega_e v_0 / c$ , где  $v_0 = v_{Te}$  — для невырожденной плазмы и  $v_0 = v_{Fe}$  — для вырожденной плазмы.

### § 27. Тензор диэлектрической проницаемости слабоионизованной магнитоактивной плазмы с учетом столкновений частиц

До сих пор речь шла о бесстолкновительной плазме во внешнем магнитном поле. Рассмотрим эффекты, связанные со столкновениями частиц. Строго говоря, лишь при учете столкновений частиц в магнитоактивной плазме возможно выбирать в качестве равновесной функции распределения по скоростям распределение Максвелла либо Ферми. Правда, это утверждение справедливо только для времен, превышающих времена столкновений частиц (время свободного пробега), характеризующих время установления равновесной функции распределения частиц по скоростям. Для времен же, меньших времен столкновений частиц, функции распределения частиц могут быть произвольными. Другой эффект, возникающий при учете столкновений частиц в плазме, — это столкновительные диссипативные процессы: трение, вязкость, диффузия и теплопроводность плазмы. При частых столкновениях эти процессы могут стать определяющими и даже полностью подавить черенковскую (бесстолкновительную) и циклотронную диссипации. В последующем изложении будет изучено влияние столкновений частиц и связанных с ними диссипативных процессов на характер распространения электромагнитных волн в магнитоактивной плазме.

Рассмотрение начнем со слабоионизованной невырожденной плазмы, так как кинетическая модель слабоионизованной плазмы — кинетическое уравнение с интегралом столкновений БГК — дает возможность наиболее наглядно исследовать роль столкновений частиц в плазме. Кинетическое уравнение с модельным интегралом БГК,

кроме того, позволяет получить общее выражение для тензора диэлектрической проницаемости плазмы без каких-либо ограничений на частоты и длины волн. Действительно, линейризованное кинетическое уравнение для частиц сорта  $\alpha$  в слабоионизованной магнитоактивной плазме с модельным интегралом БГК записывается в виде

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\delta f_\alpha + e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} - \Omega_\alpha \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \varphi} = -\nu_{\alpha n} [\delta f_\alpha - \eta_\alpha f_{0\alpha}], \quad (27.1)$$

где  $\eta_\alpha = \frac{1}{N_\alpha} \int d\mathbf{p} \delta f_\alpha$ , а  $f_{0\alpha}$  — равновесная функция распределения

Максвелла:

$$f_{0\alpha} = \frac{N_\alpha}{(2\pi m_\alpha T_\alpha)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_\alpha \mathbf{v}^2}{2T_\alpha}\right). \quad (27.2)$$

Такой выбор обоснован тем, что магнитное поле в стационарном состоянии не влияет на систему заряженных частиц, поэтому аргументация, приведенная в § 21, справедлива и для магнитоактивной плазмы.

Общее решение уравнения (27.1) записывается так же, как в бесстолкновительной плазме (см. § 23), только с измененной правой частью:

$$\begin{aligned} \delta f_\alpha = & \frac{1}{\Omega_\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi' \left( e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} - \nu_{\alpha n} \eta_\alpha f_{0\alpha} \right) \exp\left[\frac{1}{\Omega_\alpha} \times \right. \\ & \left. \times \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_{\alpha n})_{\varphi''} \right] = \frac{ie_\alpha}{T_\alpha} f_{0\alpha} \sum_n \times \\ & \times \frac{1}{\omega + i\nu_{\alpha n} - k_z v_z - n\Omega_\alpha} \exp\left(in\varphi + i\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha} \sin\varphi\right) \left[ \frac{n\Omega_\alpha}{k} J_n E_x + \right. \\ & \left. + i v_\perp J'_n E_y + \left(v_z E_z + \nu_{\alpha n} \eta_\alpha \frac{T_\alpha}{e_\alpha}\right) J_n \right]. \quad (27.3) \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в формулу для плотности тока частиц сорта  $\alpha$ , индуцированного в плазме:

$$\mathbf{j}_\alpha = e_\alpha \int d\mathbf{p} \mathbf{v} \delta f_\alpha \quad (27.4)$$

и используя для исключения  $\eta_\alpha$  уравнение непрерывности

$$\eta_\alpha = \frac{\mathbf{k} \mathbf{j}_\alpha}{\omega e_\alpha N_\alpha}, \quad (27.5)$$

после несложных, но громоздких преобразований находим тензор диэлектрической проницаемости для слабоионизованной магнитоактивной плазмы:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \sum_a \left[ \delta_{i\mu} + i \frac{\nu_{an} G_{ai} k_\mu}{(\omega - i\nu_{an} \mathbf{k} \mathbf{G}_a)} \right] \times \\ \times \frac{\omega + i\nu_{an}}{\omega} \left[ \varepsilon_{\mu j}^{(a)}(\omega + i\nu_{an}, \mathbf{k}) - \delta_{\mu j} \right]. \quad (27.6)$$

Здесь  $\varepsilon_{ij}^{(a)}(\omega + i\nu_{an}, \mathbf{k})$  — тензор, по виду совпадающий с тензором диэлектрической проницаемости частиц одного сорта  $a$  в бесстолкновительной магнитоактивной плазме [см. (23.10), (23.11)] без суммирования по сортам частиц, в котором, однако, произведена замена  $\omega \rightarrow \omega + i\nu_{an}$ , а вектор  $\mathbf{G}_a$  имеет следующие компоненты:

$$\mathbf{G}_a = \begin{pmatrix} \frac{\Omega_a}{k_\perp} \sum_n \frac{n A_n(z_a)}{\omega + i\nu_{an} - n\Omega_a} J_+(\beta_{an}) \\ -i \frac{\Omega_a}{k_\perp} \sum_n \frac{z_a A_n'(z_a)}{\omega + i\nu_{an} - n\Omega_a} J_+(\beta_{an}) \\ -\frac{1}{k_z} \sum_n A_n(z_a) [1 - J_+(\beta_{an})] \end{pmatrix}, \quad (27.7)$$

где  $z_a = \frac{k_\perp^2 v_{Ta}^2}{\Omega_a^2}$ , а  $\beta_{an} = (\omega + i\nu_{an} - n\Omega_a)/k_z v_{Ta}$ .

Суммирование в формуле (27.6) распространяется по всем сортам заряженных частиц в плазме.

Из выражения (27.6) находим «продольную» диэлектрическую проницаемость невырожденной слабоионизованной плазмы:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_a \frac{\omega_{La}^2}{k^2 v_{Ta}^2} \times \\ \times \frac{1 - \sum_n \frac{\omega + i\nu_{an}}{\omega + i\nu_{an} - n\Omega_a} A_n(z_a) J_+(\beta_{an})}{1 - \sum_n \frac{i\nu_{an}}{\omega + i\nu_{an} - n\Omega_a} A_n(z_a) J_+(\beta_{an})}. \quad (27.8)$$

Аналогично вычисляют тензор диэлектрической проницаемости слабоионизованной вырожденной плазмы. Действительно, записав линеаризованное кинетическое уравнение с модельным интегралом БГК в виде

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \delta f_a + e_a(\mathbf{E}\mathbf{v}) \frac{\partial f_{0a}}{\partial \mathcal{E}} - \Omega_a \frac{\partial \delta f_a}{\partial \varphi} = \\ = -\nu_{an} \left( \delta f_a + \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial f_{0a}}{\partial \mathcal{E}} \mathcal{E}_{Fa} \eta_a \right), \quad (27.9)$$

получим его решение

$$\delta f_{\alpha} = -\frac{1}{\Omega_{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi' \left[ e_{\alpha}(\mathbf{E}\mathbf{v}) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \xi} + \frac{2}{3} \mathcal{E}_{F\alpha} v_{an} \eta_{\alpha} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \xi} \right]_{\varphi'} \times \\ \times \exp \left[ \frac{i}{\Omega_{\alpha}} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_{an})_{\varphi''} \right]. \quad (27.10)$$

Определив плотность тока и используя уравнение непрерывности (27.5), окончательно находим тензор диэлектрической проницаемости вырожденной плазмы, по виду совпадающий с тензором (27.6), причем  $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}(\omega + i\nu_{an}, \mathbf{k})$  является также тензором диэлектрической проницаемости частиц одного сорта  $\alpha$  в бесстолкновительной плазме, в котором  $\omega$  заменено на  $\omega + i\nu_{an}$ , но определяется он выражениями (23.14), (23.15), а вектор  $\mathbf{G}_{\alpha}$  имеет компоненты

$$\mathbf{G}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\Omega_{\alpha}}{2k_{\perp}} \sum_n \int_0^{\pi} \frac{\sin \vartheta d\vartheta n J_n^2(z_{\alpha})}{\omega + i\nu_{an} - k_z v_{F\alpha} \cos \vartheta - n\Omega_{\alpha}} \\ -i \frac{v_{F\alpha}}{2} \sum_n \int_0^{\pi} \frac{\sin \vartheta d\vartheta J_n'(z_{\alpha}) \sin \vartheta}{\omega + i\nu_{an} - k_z v_{F\alpha} \cos \vartheta - n\Omega_{\alpha}} \\ \frac{v_{F\alpha}}{2} \sum_n \int_0^{\pi} \frac{\sin \vartheta d\vartheta J_n^2(z_{\alpha}) \cos \vartheta}{\omega + i\nu_{an} - k_z v_{F\alpha} \cos \vartheta - n\Omega_{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (27.11)$$

Отсюда «продольная» диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{F\alpha}^2} \times \\ \times \frac{1 - \frac{\omega + i\nu_{an}}{2} \sum_n \int_0^{\pi} \frac{\sin \vartheta d\vartheta J_n^2(z_{\alpha})}{\omega + i\nu_{an} - k_z v_{F\alpha} \cos \vartheta - n\Omega_{\alpha}}}{1 - \frac{i\nu_{an}}{2} \sum_n \int_0^{\pi} \frac{\sin \vartheta d\vartheta J_n^2(z_{\alpha})}{\omega + i\nu_{an} - k_z v_{F\alpha} \cos \vartheta - n\Omega_{\alpha}}}. \quad (27.12)$$

В заключение еще раз подчеркнем, что формулы (27.6) ÷ (27.12) справедливы при любых соотношениях величин  $\omega$ ,  $\Omega_{\alpha}$ ,  $k_{\perp} v_0$ ,  $k_z v_0$  и  $\nu_{an}$ . В пределе  $\nu_{an} \rightarrow 0$ , т. е. при пренебрежении столкновениями частиц, они переходят в соответствующие выражения для диэлектрической проницаемости бесстолкновительной плазмы (см. § 23).

**§ 28. Тензор диэлектрической проницаемости полностью ионизованной магнитоактивной плазмы с учетом столкновений частиц**

Учет столкновений частиц в полностью ионизованной плазме представляет значительно более трудную задачу, поскольку требует решения сложного интегродифференциального кинетического уравнения с интегралом столкновений Ландау. Поэтому здесь, как и в случае изотропной плазмы (см. § 22), приведем анализ отдельных предельных случаев, в которых это уравнение удается решить относительно просто.

Прежде всего заметим, что если ограничиться рассмотрением процессов, протекающих быстрее времени выравнивания температур электронов и ионов ( $\omega \gg \frac{m}{M} \nu_{\text{эф}}$ ), то в качестве равновесных распределений частиц по скоростям в невырожденной плазме можно выбрать распределения Максвелла с разными температурами для электронов и ионов:

$$f_{0\alpha} = \frac{N_\alpha}{(2\pi m_\alpha T_\alpha)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{m_\alpha v^2}{2T_\alpha} \right]. \quad (28.1)$$

Для изотермической плазмы с  $T_e = T_i$  в указанном ограничении нет необходимости.

Рассмотрим малое отклонение от равновесия  $\delta f_\alpha \sim \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ . Тогда уравнение для  $\delta f_\alpha$  запишется в виде

$$\begin{aligned} -i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\delta f_\alpha - \Omega_\alpha \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \varphi} + e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial}{\partial p_i} \sum_\beta \int d\mathbf{p}_\beta I_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta) \times \\ \times \left( \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_{\alpha j}} \delta f_\beta + \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial p_{\alpha j}} f_{0\beta} - f_{0\alpha} \frac{\partial \delta f_\beta}{\partial p_{\beta j}} - \delta f_\alpha \frac{\partial f_{0\beta}}{\partial p_{\beta j}} \right). \end{aligned} \quad (28.2)$$

Здесь

$$I_{ij}^{\alpha\beta} = 2\pi e_\alpha^2 e_\beta^2 L \frac{u^{2\delta_{ij}} - u_i u_j}{u^3},$$

$\mathbf{u} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$ , а  $L = \ln \frac{r_D}{r_{\min}}$  — кулоновский логарифм.

Решение уравнения (28.2) в общем случае представляет значительные трудности, однако его относительно легко решить при выполнении неравенств

$$\omega \gg \nu_\alpha, \quad |\omega \pm \Omega_\alpha| > \nu_\alpha. \quad (28.3)$$

В указанном пределе интеграл столкновений в (28.2) является малым членом и это уравнение можно решать методом последовательных приближений, разлагая решение по «степеням интеграла столкновений» (как это было сделано в § 22 для изотропной плазмы):



$$\delta f_\alpha = \delta f_\alpha^{(0)} + \delta f_\alpha^{(1)}, \quad (28.4)$$

где  $\delta f_\alpha^{(0)}$  определяется выражением (23.4) (предел бесстолкновительной плазмы), а

$$\begin{aligned} \delta f_\alpha^{(1)} = & \sum_n \frac{1}{\omega - k_z v_z - n\Omega_\alpha} \exp\left(-in\varphi + i \frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha} \sin \varphi\right) \times \\ & \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \exp\left(in\varphi' - i \frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha} \sin \varphi'\right) \sum_\beta \frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}} \int d\mathbf{p}_\beta \times \\ & \times I_{ij}^{\alpha\beta} \left( \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_{\alpha j}} \delta f_\beta^{(0)} + f_{0\beta} \frac{\partial \delta f_\alpha^{(0)}}{\partial p_{\alpha j}} - f_{0\alpha} \frac{\partial \delta f_\beta^{(0)}}{\partial p_{\beta j}} - \delta f_\alpha^{(0)} \frac{\partial f_{0\beta}}{\partial p_{\beta j}} \right). \quad (28.5) \end{aligned}$$

Теперь определение столкновительной поправки к индуцированному в плазме току от частиц сорта  $\alpha$ , а следовательно, и к диэлектрической проницаемости плазмы сводится к вычислению интеграла

$$\delta \mathbf{j}_\alpha = e_\alpha \int d\mathbf{p} \mathbf{v} \delta f_\alpha^{(1)}. \quad (28.6)$$

Однако вычисление и этого интеграла связано с большими трудностями и провести его удастся лишь в отдельных предельных случаях.

Для холодной плазмы, когда выполняются неравенства (24.1), вычисление интеграла (28.6) не представляет большого труда и дает чисто антиэрмитовскую поправку к тензору (24.2), обусловленную столкновениями частиц в плазме:

$$\delta \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \delta \varepsilon_\perp^a & i\delta g^a & 0 \\ -i\delta g^a & \delta \varepsilon_\perp^a & 0 \\ 0 & 0 & \delta \varepsilon_\parallel^a \end{pmatrix}. \quad (28.7)$$

Здесь

$$\delta \varepsilon_\perp^a = i \frac{\omega_{Le}^2 \nu_{\Phi\Phi} \omega}{\Omega_e^2} \left[ \left( \frac{\Omega_e}{\omega^2 - \Omega_e^2} - \frac{\Omega_i}{\omega^2 - \Omega_i^2} \right)^2 + \left( \frac{\omega}{\omega^2 - \Omega_e^2} - \frac{\omega}{\omega^2 - \Omega_i^2} \right)^2 \right], \quad (28.8)$$

$$\delta g^a = 2i \frac{\omega_{Le}^2 \nu_{\Phi\Phi} \omega^2}{\Omega_e^2} \left( \frac{\Omega_e}{\omega^2 - \Omega_e^2} - \frac{\Omega_i}{\omega^2 - \Omega_i^2} \right) \left( \frac{1}{\omega^2 - \Omega_e^2} - \frac{1}{\omega^2 - \Omega_i^2} \right),$$

$$\delta \varepsilon_\parallel^a = i \frac{\omega_{Le}^2 \nu_{\Phi\Phi}}{\omega^3},$$

а  $\nu_{\Phi\Phi}$  определяется формулой (22.7).

В случае холодной плазмы столкновительная поправка к тензору диэлектрической проницаемости определяется столкновениями частиц разного сорта.

Иное положение имеет место в условиях малых фазовых скоростей, когда выполняются неравенства (25.11) и бесстолкновительный тензор диэлектрической проницаемости имеет вид (25.12), (25.13). Можно показать, что в данном пределе при  $v_e \ll k_z v_{Te} \ll \Omega_e$  столкновениями электронов можно полностью пренебречь, так как длина волны колебаний при этом меньше длины свободного пробега электронов и основным механизмом диссипации в электронной компоненте оказывается черенковская диссипация. В области частот  $\omega > v_i$  вклад в ионную диссипацию наряду с черенковским механизмом дают ионные столкновения, которые легко учесть, если решить кинетическое уравнение для ионов методом последовательных приближений. В рассматриваемой области частот окончательно находим следующую поправку к антиэрмитовой части тензора диэлектрической проницаемости, обусловленную столкновениями частиц в плазме:

$$\delta\varepsilon_{ij}^a = \begin{pmatrix} \delta\varepsilon_{xx}^a & 0 & 0 \\ 0 & \delta\varepsilon_{yy}^a & \delta\varepsilon_{yz}^a \\ 0 & -\delta\varepsilon_{yz}^a & \delta\varepsilon_{zz}^a \end{pmatrix}. \quad (28.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{xx}^a &= i \frac{7}{10} \cdot \frac{\omega_{Li}^2 \nu_{ii} k_{\perp}^2 v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i^4} + i \frac{\omega_{Le}^2 \nu_{\varepsilon\Phi\Phi}}{\omega \Omega_e^2}, \\ \delta\varepsilon_{yy}^a &= i \frac{4}{5} \cdot \frac{\omega_{Li}^2 \nu_{ii} k_{\perp}^2 v_{Ti}^2}{\omega^3 \Omega_i^2}, \\ \delta\varepsilon_{yz}^a &= -\delta\varepsilon_{zy}^a = -\frac{4}{5} \cdot \frac{\omega_{Li}^2 \nu_{ii} k_{\perp} k_z v_{Ti}^2}{\omega^4 \Omega_i}, \\ \delta\varepsilon_{zz}^a &= i \frac{8}{5} \cdot \frac{\omega_{Li}^2 \nu_{ii} k_z^2 v_{Ti}^2}{\omega^5}, \end{aligned} \quad (28.10)$$

а  $\nu_{ii}$  определяется формулой (22.7).

Заметим, что соотношение между  $\omega$  и  $\nu_{\varepsilon\Phi\Phi}$  при этом может быть произвольным.

В заключение рассмотрим роль столкновений частиц в полностью ионизованной вырожденной плазме. Ограничимся высокочастотным пределом, когда существенны только чисто электронные процессы. Это означает, что решим кинетическое уравнение лишь для электронов, учитывая столкновения электронов с электронами и ионами. Равновесным распределением электронов считаем функцию распределения Ферми:

$$f_{0e} = \begin{cases} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} & \text{при } p \leq p_{Fe} = (3\pi^2)^{1/3} \hbar N_e^{1/3}, \\ 0 & \text{при } p > p_{Fe}. \end{cases} \quad (28.11)$$

Линеаризуя кинетическое уравнение (14.9) для электронов по малому отклонению от распределения (28.11)  $\delta f_e \sim \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , считаем выполненными неравенства (28.3), позволяющие решать уравнение (14.9) методом последовательных приближений, подробно изложенным выше. Опуская вычисления, приведем окончательный ответ для холодной плазмы, для которой выполняются условия (24.1). Как неоднократно отмечалось, в этих условиях в вырожденной плазме бесстолкновительное поглощение волн отсутствует, и столкновения частиц оказываются единственным диссипативным механизмом. Вычисления, аналогичные проведенным, дают следующую антиэрмитовскую поправку к тензору диэлектрической проницаемости холодной плазмы (24.2):

$$\delta\varepsilon_{ij}^a = \begin{pmatrix} \delta\varepsilon_{\perp}^a & i\delta g^a & 0 \\ -i\delta g^a & \delta\varepsilon_{\perp}^a & 0 \\ 0 & 0 & \delta\varepsilon_{\parallel}^a \end{pmatrix}. \quad (28.12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{\perp}^a &= i \frac{\omega_{Le}^2 \nu_{Fe}}{\omega} \cdot \frac{\omega^2 + \Omega_e^2}{(\omega^2 - \Omega_e^2)^2}, \\ \delta g^a &= 2i \frac{\omega_{Le}^2 \nu_{Fe} \Omega_e}{(\omega^2 - \Omega_e^2)^2}, \\ \delta\varepsilon_{\parallel}^a &= i \frac{\omega_{Le}^2 \nu_{Fe}}{\omega^3}, \end{aligned} \quad (28.13)$$

а  $\nu_{Fe}$  определяется выражением (22.14).

Заметим еще раз, что формулы (28.12) и (28.13) справедливы только для области высоких частот  $\omega \gg \Omega_i, \omega_{Li}$ , когда движением ионов можно пренебречь.

### § 29. Влияние столкновений частиц на затухание электромагнитных волн в магнитоактивной плазме

Зная диэлектрическую проницаемость магнитоактивной плазмы с учетом столкновений частиц, можно исследовать влияние этих столкновений на характер распространения электромагнитных волн в магнитоактивной плазме. Изучим влияние столкновений частиц

на спектры колебаний, когда учет столкновений не меняет спектров частот, но существенно сказывается на характере поглощения волн в плазме. К таким колебаниям относятся волны в холодной плазме (магнитогиродинамические и альвеновские волны, спиральные волны, обыкновенная и необыкновенная электронные волны), а также быстрая и медленная магнитозвуковые волны в горячей плазме.

Прежде всего рассмотрим предел холодной плазмы, причем наряду с (24.1) потребуем выполнения условий (28.3) и ограничимся высокочастотными колебаниями, когда  $\omega \gg \omega_{Li}$ ,  $\Omega_i$  и плазму можно считать чисто электронной. При этом эрмитовская часть тензора диэлектрической проницаемости, так же как и в бесстолкновительной плазме, будет определяться формулами (24.2) и (24.3). В антиэрмитовской же части диэлектрической проницаемости (25.6), (25.7) появится столкновительная поправка, которая согласно выражениям (27.6), (28.8) и (28.13) записывается в виде

$$\delta \epsilon_{ij}^a = \begin{pmatrix} \delta \epsilon_{\perp}^a & i \delta g^a & 0 \\ -i \delta g^a & \delta \epsilon_{\perp}^a & 0 \\ 0 & 0 & \delta \epsilon_{\parallel}^a \end{pmatrix}. \quad (29.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_{\perp}^a &= i \frac{\omega_{Le}^2 (\omega^2 + \Omega_e^2) \nu_e}{\omega (\omega^2 - \Omega_e^2)^2}, \\ \delta g^a &= i \frac{2\omega_{Le}^2 \Omega_e \nu_e}{(\omega^2 - \Omega_e^2)^2}, \\ \delta \epsilon_{\parallel}^a &= i \frac{\omega_{Le}^2 \nu_e}{\omega^3}, \end{aligned} \quad (29.2)$$

причем  $\nu_e = \nu_{эфф}$  — для невырожденной полностью ионизованной плазмы,  $\nu_e = \nu_{Fe}$  — для вырожденной плазмы и  $\nu_e = \nu_{en}$  — для слабоионизованной плазмы.

Столкновительная поправка к компонентам тензора диэлектрической проницаемости (29.2) обуславливает столкновительный декремент затухания волн, спектры частот которых определяются формулами § 24, а бесстолкновительные декременты затухания — формулами § 25. Столкновительная поправка к декременту затухания равна

$$\Delta \delta = - \frac{k^4 \delta A + k^2 \frac{\omega^2}{c^2} \delta B + \frac{\omega^4}{c^4} \delta C}{k^4 \frac{\partial A^3}{\partial \omega} + k^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{\omega^2}{c^2} B^3 + \frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{\omega^4}{c^4} C^3}, \quad (29.3)$$

где  $\delta A$ ,  $\delta B$  и  $\delta C$  имеют структуру формул (25.9) и получаются из них при замене  $\epsilon_{ij}^a$  на  $\delta \epsilon_{ij}^a$ :

$$\delta A = \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \delta \varepsilon_{\perp}^a + \frac{k_z^2}{k^2} \delta \varepsilon_{\parallel}^a,$$

$$\delta B = - \left( 1 + \frac{k_z^2}{k^2} \right) (\delta \varepsilon_{\perp}^a \varepsilon_{\parallel}^a + \delta \varepsilon_{\parallel}^a \varepsilon_{\perp}^a) - 2 \frac{k_{\perp}^2}{k^2} (\delta \varepsilon_{\perp}^a \varepsilon_{\perp}^a - \delta g^a g^a),$$

$$\delta C = \delta \varepsilon_{\parallel}^a (\varepsilon_{\perp}^a - g^a) + 2 \varepsilon_{\parallel}^a (\delta \varepsilon_{\perp}^a \varepsilon_{\perp}^a - \delta g^a g^a). \quad (29.4)$$

Эти выражения наряду с формулами § 24 и 25 полностью решают задачу распространения высокочастотных электромагнитных волн в холодной магнитоактивной плазме. Они имеют довольно громоздкий вид и могут быть проанализированы лишь численными методами. Простое выражение получается для столкновительного декремента затухания спиральной волны, спектр частот которой определяется выражением (24.17). Из (29.4) и (29.3) имеем

$$\Delta \delta = - \frac{\nu_e}{2} \left( 1 + \frac{k_z}{k^2} \right) \frac{k^2 c^2}{\omega_{Le}^2}. \quad (29.5)$$

В высокочастотном пределе колебания плазмы носят чисто электронный характер, поэтому столкновительное поглощение определяется столкновениями электронов. В области низких частот  $\omega \ll \Omega_i$  существенными оказываются столкновения ионов, спектры частот колебаний бесстолкновительной плазмы определяются формулами (24.16) [альвеновская и магнитогидродинамическая (быстрая магнитозвуковая) волны]. Учет столкновений частиц не меняет спектров частот колебаний, но меняет декременты их затухания:

$$\Delta \delta = - \frac{1}{2} \cdot \frac{\nu_i \omega^2}{\Omega_i^2}, \quad (29.6)$$

где  $\nu_i = \frac{m}{M} \nu_{эфф}$  — для невырожденной полностью ионизованной плазмы и  $\nu_i = \nu_{in}$  — для слабоионизованной плазмы.

Эта формула получается из общего выражения (29.3) при использовании (28.7) и (27.6) (в пределе холодной плазмы).

Поправка (29.6) существенна, так как согласно (25.10) бесстолкновительное затухание волн в этом пределе экспоненциально мало; особенно заметную роль столкновительная поправка играет при почти поперечном распространении волн, когда бесстолкновительным поглощением можно пренебречь.

Исследуем теперь горячую плазму, т. е. низкочастотную область  $\omega \ll \Omega_i$  с колебаниями в промежуточной области фазовых скоростей  $v_{Ti} \ll \omega/k_z \ll v_{Te}$ . Это альвеновские, быстрые и медленные магнитозвуковые волны, спектры частот которых в бесстолкновительном пределе в случае невырожденной плазмы определяются формулами (25.15) и (25.16). Учет столкновений приводит к изменению компонент тензора  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ , причем изменяется лишь его антиэрмитов-

ская часть. Именно в антиэрмитовской части тензора  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  появляется столкновительная поправка

$$\delta\varepsilon_{ij}^a = \begin{pmatrix} \delta\varepsilon_{xx}^a & 0 & 0 \\ 0 & \delta\varepsilon_{yy}^a & \delta\varepsilon_{yz}^a \\ 0 & -\delta\varepsilon_{yz}^a & \delta\varepsilon_{zz}^a \end{pmatrix}. \quad (29.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{xx}^a &= i \frac{7}{10} \cdot \frac{\omega_{Li}^2 \nu_{ii} k_{\perp}^2 v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i^4} + i \frac{\omega_{Le}^2 \nu_{e\Phi}}{\omega \Omega_e^2}, \\ \delta\varepsilon_{yy}^a &= i \frac{4}{5} \cdot \frac{\omega_{Li}^2 \nu_{ii} k_{\perp}^2 v_{Ti}^2}{\omega^3 \Omega_i^2}, \\ \delta\varepsilon_{yz}^a &= -\delta\varepsilon_{zy}^a = -\frac{4}{5} \cdot \frac{\omega_{Li}^2 \nu_{ii} k_{\perp} k_z v_{Ti}^2}{\omega^4 \Omega_i}, \\ \delta\varepsilon_{zz}^a &= i \frac{8}{5} \cdot \frac{\omega_{Li}^2 \nu_{ii} k_z^2 v_{Ti}^2}{\omega^5} \end{aligned} \quad (29.8)$$

для полностью ионизованной плазмы;

$$\delta\varepsilon_{xx}^a = \delta\varepsilon_{yy}^a = i \frac{\omega_{Li}^2 \nu_{in}}{\omega \Omega_i^2}, \quad (29.9)$$

$$\delta\varepsilon_{yz}^a = -\delta\varepsilon_{zy}^a = 0, \quad \delta\varepsilon_{zz}^a = -\frac{\omega_{Li}^2 \nu_{in}}{\omega^3}$$

для слабоионизованной плазмы.

В результате для альвеновской волны, которая в бесстолкновительном пределе являлась незатухающей [см. формулу (25.15)], появляется декремент затухания

$$\delta = -\frac{1}{2} \left[ \frac{m}{M} \nu_e + \nu_i \right], \quad (29.10)$$

где  $\nu_e = \nu_{e\Phi}$ ,  $\nu_i = \frac{m}{M} \nu_{e\Phi} + \frac{7}{10} \nu_{ii} \frac{k_{\perp}^2 v_{Ti}^2}{\Omega_i^2}$  — для полностью ионизо-

ванной плазмы и  $\nu_a = \nu_{an}$  — для слабоионизованной плазмы ( $a=e, i$ ).

Для быстрой и медленной магнитозвуковых волн, спектры которых в бесстолкновительном пределе определялись формулами (25.16), при учете столкновений находим следующие поправки к декрементам затухания:

$$\Delta\delta_{\pm} = \frac{4}{5} \nu_{ii} \frac{v_{Ti}^2}{v_s^2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{9}{8} \cdot \frac{v_s^2}{v_A^2} \sin^2 \vartheta \mp \right. \\ \left. \mp \frac{1}{8} \sqrt{1 + \frac{v_s^4}{v_A^4} - 2 \frac{v_s^2}{v_A^2} \cos 2\vartheta} \times \right. \\ \left. \times \left[ \left(1 - \frac{v_s^2}{v_A^2} \cos 2\vartheta\right) \left(4 + 3 \frac{v_s^2}{v_A^2} \sin^2 \vartheta\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sin^2 \vartheta \left(2 + 3 \frac{v_s^2}{v_A^2} (1 + \cos^2 \vartheta)\right) \right] \right\} \quad (29.11)$$

для полностью ионизованной плазмы;

$$\Delta\delta_{\pm} = -\frac{\nu_{in}}{2} \cdot \frac{k^2 v_s^2 \cos^2 \vartheta}{\omega_{\pm}^4 - k^4 v_A^2 v_s^2 \cos^2 \vartheta} \left[ \omega_{\pm}^2 - k^2 v_A^2 + \omega_{\pm}^2 \left( \frac{\omega_{\pm}^2}{k^2 v_s^2 \cos^2 \vartheta} - 1 \right) \right] \quad (29.12)$$

для слабоионизованной плазмы.

Особенно простой вид принимают эти формулы для плазмы низкого давления  $\beta = v_s^2/v_A^2 \ll 1$ , в которой быстрая магнитозвуковая волна становится поперечной, а медленная — продольной. При этом столкновительная поправка к декременту затухания равна

$$\Delta\delta_{-} = -\frac{1}{2} \begin{cases} \frac{8}{5} \nu_{ii} \frac{T_i}{T_e} & \text{— для полностью ионизованной плазмы,} \\ \nu_{in} & \text{— для слабоионизованной плазмы.} \end{cases} \quad (29.13)$$

Поправка  $\Delta\delta_{+}$  совпадает с  $\Delta\delta$  в формуле (29.6).

### Задачи к главе V

**Задача 1.** Получить выражение для тензора диэлектрической проницаемости беспотенциальной магнитоактивной плазмы в модели независимых частиц.

**Решение.** Линеаризуем систему уравнений, представляющую модель независимых частиц:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial t} + \operatorname{div} N_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}_{\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{V}_{\alpha} \nabla) \mathbf{V}_{\alpha} &= \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_{\alpha} \mathbf{B}] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

относительно невозмущенных значений  $N_{0\alpha}$ ,  $\mathbf{V}_{0\alpha} = 0$ ,  $\mathbf{E}_0 = 0$ ,  $\mathbf{B}_0 \neq 0$ .

Направим ось  $Oz$  вдоль поля  $\mathbf{B}_0$  и считаем возмущенные величины  $\delta N_{\alpha}$ ,  $\delta \mathbf{V}_{\alpha}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  зависящими от времени и координат в виде  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ . При этом из уравнений движения получим

$$-i\omega \delta \mathbf{V}_{\alpha} = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha} c} [\delta \mathbf{V}_{\alpha} \mathbf{B}_0], \quad (2)$$

откуда

$$\delta V_\alpha = \frac{ie_\alpha \omega}{m_\alpha (\omega^2 - \Omega_\alpha^2)} \left[ \mathbf{E} - \frac{\Omega_\alpha^2}{\omega^2} \cdot \frac{\mathbf{B}_0 (\mathbf{E} \mathbf{B}_0)}{B_0^2} \right] - \frac{e_\alpha \Omega_\alpha [\mathbf{E} \mathbf{B}_0]}{m_\alpha (\omega^2 - \Omega_\alpha^2) B_0}. \quad (3)$$

Плотность индуцированного в плазме тока

$$j_i = \sum_\alpha e_\alpha N_{0\alpha} \delta V_{\alpha i} = \sigma_{ij} E_j. \quad (4)$$

Отсюда диэлектрическая проницаемость плазмы

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_\perp & ig & 0 \\ -ig & \epsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_\parallel \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon_\perp &= 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_\alpha^2}, \\ g &= - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2 \Omega_\alpha}{\omega (\omega^2 - \Omega_\alpha^2)}, \\ \epsilon_\parallel &= 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Эти выражения в точности совпадают с выражениями (24.2), (24.3), полученными при полном пренебрежении тепловым движением частиц, т. е. в условиях (24.1). Поэтому часто модель независимых частиц называют также пределом холодной плазмы.

**Задача 2.** Исследовать спектры колебаний магнитоактивной плазмы в модели одножидкостной гидродинамики для неизотермической плазмы при пренебрежении диссипативными процессами.

Решение. Линеаризуем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \text{rot} [\mathbf{V} \mathbf{B}], \quad \text{div} \mathbf{B} = 0, \\ \rho_M \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} \right] &= -v_s^2 \nabla \rho_M - \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{B}], \\ \frac{\partial \rho_M}{\partial t} + \text{div} \rho_M \mathbf{V} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

по малым возмущениям относительно равновесных значений  $\rho_{0M}$ ,  $\mathbf{V}_0 = 0$ ,  $\mathbf{B}_0 \parallel Oz$ , считая возмущения  $\delta \rho_M$ ,  $\delta \mathbf{V}$  и  $\mathbf{B}$  зависящими от времени и координат в виде  $\exp(-i\omega t + ikr)$ . В результате получим:

$$\left. \begin{aligned} \omega \mathbf{B} + [\mathbf{k} [\delta \mathbf{V} \mathbf{B}_0]] &= 0, \\ -\omega \delta \mathbf{V} + \frac{v_s^2}{\rho_{0M}} \delta \rho_M \mathbf{k} + \frac{1}{4\pi \rho_{0M}} [\mathbf{B}_0 [\mathbf{k} \mathbf{B}]] &= 0, \\ \omega \delta \rho_M - \rho_{0M} \mathbf{k} \delta \mathbf{V} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Исключая из этой системы  $\delta \rho_M$ , запишем ее в виде двух независимых подсистем:



$$\left. \begin{aligned} \omega B_y + \delta V_y k_z B_0 &= 0, \\ \omega \delta V_y + \frac{k_z B_0}{4\pi\rho_{0M}} B_y &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega B_x + k_z B_0 \delta V_x &= 0, \\ \omega B_z + k_z B_0 \delta V_z - B_0 (k_{\perp} \delta V_x + k_z \delta V_z) &= 0, \\ \omega \delta V_x - \frac{v_s^2}{\omega} k_{\perp} (k_{\perp} \delta V_x + k_z \delta V_z) + \frac{B_0}{4\pi\rho_{0M}} (B_x k_z - k_{\perp} B_z) &= 0, \\ \omega \delta V_z - \frac{v_s^2}{\omega} k_z (k_{\perp} \delta V_x + k_z \delta V_z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Первая подсистема из двух уравнений для  $B_y$  и  $\delta V_y$  описывает альвеновскую волну, спектр которой

$$\omega^2 = k_z^2 v_A^2. \quad (5)$$

Вторая же подсистема из четырех уравнений для  $B_x$ ,  $B_z$ ,  $\delta V_x$ ,  $\delta V_z$  описывает быструю и медленную магнитозвуковые волны с общим дисперсионным соотношением

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 (v_A^2 + v_s^2) + k^4 v_A^2 v_s^2 \cos^2 \vartheta = 0, \quad (6)$$

где  $\vartheta$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}_0$ .

Отсюда

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} k^2 \left[ v_A^2 + v_s^2 \pm \sqrt{(v_A^2 + v_s^2)^2 - 4v_A^2 v_s^2 \cos^2 \vartheta} \right]. \quad (7)$$

Формулы (5) и (7) в точности совпадают с полученными в § 25.

**Задача 3.** Исследовать продольные волны в бесстолкновительной невырожденной электронной плазме, распространяющиеся строго поперек магнитного поля (моды Бернштейна).

**Решение.** Дисперсионное уравнение для таких волн согласно (23.13) записывается в виде

$$1 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{Le}^2 n^2 \Omega_e^2}{k^2 v_{Te}^2 (\omega^2 - n^2 \Omega_e^2)} A_n \left( \frac{k^2 v_{Te}^2}{\Omega_e^2} \right), \quad (1)$$

или в области длинных волн  $k^2 v_{Te}^2 \ll \Omega_e^2$

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\omega_{Le}^2 n^2}{\omega^2 - n^2 \Omega_e^2} \cdot \frac{1}{n!} \left( \frac{k^2 v_{Te}^2}{2\Omega_e^2} \right)^{n-1} = 0. \quad (2)$$

Отсюда видно, что в пределе  $k \rightarrow 0$  решениями этого уравнения являются

$$\omega = \sqrt{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2}, \quad \omega = n\Omega_e. \quad (3)$$

С другой стороны, в области коротких волн  $k^2 v_{Te}^2 \gg \Omega_e^2$  имеем

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{Le}^2 n^2}{\omega^2 - n^2 \Omega_e^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{\Omega_e^2}{k^2 v_{Te}^2} \right)^{3/2} = 0, \quad (4)$$

т. е. при  $k \rightarrow \infty$  решением дисперсионного уравнения будет

$$\omega \rightarrow n\Omega_e.$$

Графически решения уравнения (1) представлены на рис. 14:  $a$  — при  $\omega_{Le} > \Omega_e$ ,  $b$  — при  $\omega_{Le} < \Omega_e$ .

**Задача 4.** Исследовать моды Бернштейна для вырожденной электронной плазмы.

**Решение.** Согласно (23.16) дисперсионное уравнение для продольных волн, распространяющихся поперек магнитного поля, имеет вид

$$1 - \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta \frac{n^2 \Omega_e^2}{\omega^2 - n^2 \Omega_e^2} J_n^2 \left( \frac{kv_{Fe} \sin \vartheta}{\Omega_e} \right) = 0. \quad (1)$$

В пределе  $k \rightarrow 0$  решениями этого уравнения являются, как и в случае невырожденной плазмы (см. предыдущую задачу),

$$\omega = \sqrt{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2}, \quad \omega = n\Omega_e. \quad (2)$$

В пределе же  $kv_{Fe} \gg \Omega_e$  имеем

$$1 - \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} d\vartheta \frac{n^2 \Omega_e^2}{\omega^2 - n^2 \Omega_e^2} \cdot \frac{2\Omega_e}{\pi kv_{Fe}} \cos \left[ \frac{kv_{Fe} \sin \vartheta}{\Omega_e} - \frac{\pi}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] = 0, \quad (3)$$

или

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6\omega_{Le}^2 \Omega_e^3}{\pi^2 k^3 v_{Fe}^3} \cdot \frac{n^2}{\omega^2 - n^2 \Omega_e^2} J_0 \left( \frac{kv_{Fe}}{\Omega_e} \right) = 0. \quad (4)$$

Здесь также при  $k \rightarrow \infty$  частота колебаний  $\omega \rightarrow n\Omega_e$ , но это носит осцилляционный характер, как показано на рис. 15.

**Задача 5.** Исходя из (23.7) и (23.8) оценить бесстолкновительное поглощение обыкновенной волны, распространяющейся строго поперек магнитного поля, обусловленное релятивистскими эффектами движения электронов в нерелятивистской ( $mc^2 \gg T_e$ ) максвелловской плазме.

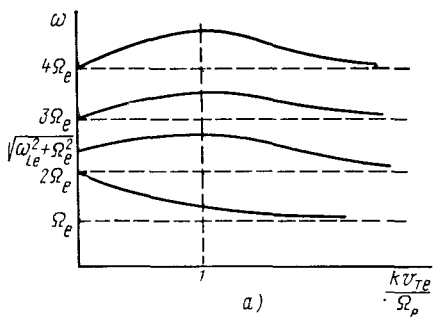
**Решение.** Для обыкновенной волны, распространяющейся строго поперек магнитного поля в электронной плазме, имеем

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{zz} = 0,$$

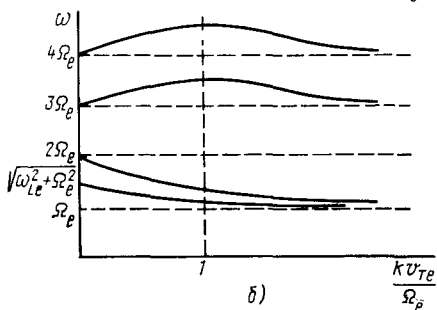
$$\epsilon_{zz} = 1 + \frac{4\pi e^2}{\omega} \int dp \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{v_z^2 J_n^2 \left( \frac{kv_{Te} \gamma}{\Omega_e} \right)}{\omega - n\Omega_e/\gamma}. \quad (1)$$

Ограничиваясь колебаниями с длиной волны, намного большей ларморовского радиуса электронов, т. е.  $\Omega_e \gg kv_{Te}$ , из (1) получим

$$\begin{aligned} \epsilon_{zz} &= 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - i\pi \frac{4\pi e^2}{\omega} \int dp \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \cdot \frac{v_z^2 k^2 v_{\perp}^2}{4\Omega_e^2/\gamma^2} \left[ \delta \left( \omega - \frac{\Omega_e}{\gamma} \right) + \right. \\ &+ \delta \left( \omega + \frac{\Omega_e}{\gamma} \right) \left. \right] = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} + \frac{i\pi}{15} \cdot \frac{2\pi e^2}{\omega^3} \cdot \frac{k^2}{T_e} \int dp f_0 v^4 \times \\ &\times \left[ \delta \left( \omega - \Omega_e + \frac{\Omega_e}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \right) + \delta \left( \omega - \Omega_e - \frac{\Omega_e}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \right) \right]. \quad (2) \end{aligned}$$



a)



б)

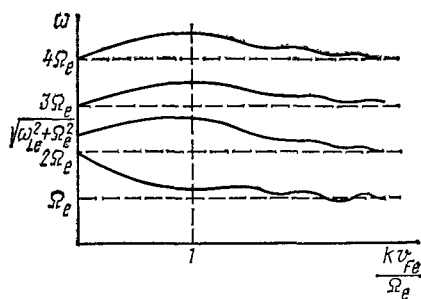


Рис. 15

Рис. 14

Считая для определенности  $\Omega_e/\omega > 0$ , находим

$$\epsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{32}{15} \cdot \frac{\omega_{Le}^2 k^2 c^2}{\omega^3 \Omega_e} \cdot \frac{c^5}{v_{Te}^5} \left( 1 - \frac{\omega}{\Omega_e} \right)^{5/2} - \frac{2c^2}{v_{Te}^2} \left( 1 - \frac{\omega}{\Omega_e} \right)^2 e \quad (3)$$

Подстановка (3) в (1) дает спектр частот и декремент затухания обыкновенной волны ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ ):

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 + k^2 c^2, \quad (4)$$

$$\delta = \text{Im } \omega = - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{\omega_{Le}^2 k^2 c^2}{\omega^3 \Omega_e} \cdot \frac{c^5}{v_{Te}^5} \left( 1 - \frac{\omega}{\Omega_e} \right)^{5/2} e - \frac{2c^2}{v_{Te}^2} \left( 1 - \frac{\omega}{\Omega_e} \right)^2$$

Видно, что поглощение существует только вблизи циклотронной частоты  $\omega \approx \Omega_e$ .

**Задача 6.** Получить показатель преломления и коэффициент затухания электромагнитных волн, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля в области частот ионного циклотронного резонанса в бесстолкновительной невырожденной плазме.

**Решение.** В области частот  $\omega \approx \Omega_i \ll \Omega_e$  общее дисперсионное уравнение (26.1) записывается в виде

$$k^2 c^2 = \omega^2 \left[ 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{\omega \Omega_e} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega (\omega - \Omega_i)} J_+ \left( \frac{\omega - \Omega_i}{k v_{Ti}} \right) \right]. \quad (1)$$

Вдали от линии резонансного поглощения, когда  $\frac{\omega - \Omega_i}{k v_{Ti}} \gg 1$ ,  $\frac{\omega - \Omega_i}{\omega} \ll 1$ , вкладом электронных слагаемых в (1) всегда можно пренебречь. Для показателя преломления и коэффициента затухания ионной циклотронной волны при этом

$$\text{имеем } \left( k = \frac{\omega}{c} (n + i\chi) \right)$$

$$n^2 = - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega (\omega - \Omega_i)}, \quad \chi = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \cdot \frac{c}{v_{Ti}} \cdot \frac{1}{n^2} \exp \left[ - \frac{c^2 (\omega - \Omega_i)^2}{2 n^2 \omega^2 v_{Ti}^2} \right]. \quad (2)$$

Внутри же линии поглощения, когда  $(\omega - \Omega_i)/k v_{Ti} \ll 1$ , электронные слагаемые могут оказаться существенными. Так, при  $v_A \gg v_{Ti}$  (плазма высокого давления) из уравнения (1) получаем спектр слабозатухающих электронных волн

$$n^2 \approx \frac{\omega_{Le}^2}{\omega \Omega_e}, \quad \chi = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \cdot \frac{c}{v_{Ti}} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (3)$$

При  $v_A \gg v_{Ti}$  (плазма низкого давления) электронные слагаемые в уравнении (1) малы, и получаем спектр сильнозатухающих ионных циклотронных волн

$$n + i\chi = \frac{i + \sqrt{3}}{2} \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \cdot \frac{c}{v_{Ti}} \right)^{1/3}. \quad (4)$$

Величина  $\lambda_{\text{СК}} = \frac{c}{\omega \chi} = 2 \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{c^2 v_{Ti}}{\omega \omega_{Li}^2} \right)^{1/3}$  характеризует при этом

глубину проникновения ионной циклотронной волны в плазму.

**Задача 7.** Исследовать ионно-звуковые колебания в неизотермической магнитной плазме с  $T_e \gg T_i \approx 0$  в условиях  $\Omega_e^2 \gg \omega_{Li}^2 \gg \Omega_i^2$ .

**Решение.** В указанных условиях ионно-звуковые волны существуют как при  $\omega < \Omega_i$ , так и при  $\omega > \Omega_i$ . Дисперсионное уравнение для таких волн записывается в виде

$$1 - \frac{k_{\perp}^2 \omega_{Li}^2}{k^2 (\omega^2 - \Omega_i^2)} - \frac{k_z^2 \omega_{Li}^2}{k^2 \omega^2} + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right) = 0. \quad (1)$$

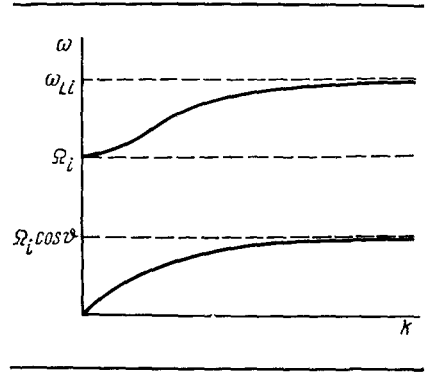
Отсюда, пренебрегая малой мнимой частью, находим уравнение для спектра частот:

$$\omega^4 \left( 1 + \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_s^2} \right) - \omega^2 \left[ \omega_{Li}^2 + \Omega_i^2 \left( 1 + \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_s^2} \right) \right] + \omega_{Li}^2 \Omega_i^2 \cos^2 \vartheta = 0. \quad (2)$$

При  $\omega_{Li}^2 \gg \Omega_i^2$  и  $\vartheta \neq 0$  имеем приближенные корни:

$$\omega_+^2 = \frac{\omega_{Li}^2 + \Omega_i^2 (1 + \omega_{Li}^2/k^2 v_s^2)}{1 + \omega_{Li}^2/k^2 v_s^2}, \quad (3)$$

$$\omega_-^2 = \frac{\omega_{Li}^2 \Omega_i^2 \cos^2 \vartheta}{\omega_{Li}^2 + \Omega_i^2 (1 + \omega_{Li}^2/k^2 v_s^2)}.$$



Этот спектр изображен на рис. 16. При  $\vartheta \rightarrow 0$  согласно (1) имеем

$$\omega_+^2 \rightarrow \Omega_i^2, \quad \omega_-^2 = \frac{\omega_{Li}^2}{1 + \omega_{Li}^2/k^2 v_s^2}. \quad (4)$$

Декремент затухания с учетом малой мнимой части (1)

$$\delta_{\pm} = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{\omega_{\pm}^4}{|k_z^3 v_{Te} v_s^2|} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta \frac{\omega_{\pm}^4}{(\omega_{\pm}^2 - \Omega_i^2)^2}}. \quad (5)$$

**Задача 8.** Найти спектр частот и декремент затухания ионно-звуковых волн в слабоионизованной вырожденной электронно-дырочной плазме в области частот  $\Omega_e \gg \omega \gg \Omega_i$  и в условиях  $\Omega_e \gg v_{en} \gg k_z v_{Fe}$ ,  $\omega \gg v_{in}$ .

**Решение.** Ионно-звуковые волны существуют в области фазовых скоростей  $v_{Fe} \gg \omega/k_z \gg v_{Fi}$  и, являясь продольными, удовлетворяют уравнению

$$\epsilon(\omega, k) = 1 + \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} \cdot \frac{i}{3} \cdot \frac{k^2 D}{\omega} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left(1 - i \frac{v_{in}}{\omega}\right) = 0. \quad (1)$$

Здесь

$$D = \frac{k_{\perp}^2}{k^2} D_{\perp} + \frac{k_z^2}{k^2} D_{\parallel}, \quad (2)$$

причем  $D_{\parallel} = v_{Fe}^2/v_{en}$ ,  $D_{\perp} = \frac{v_{Fe}^2 v_{en}}{2\Omega_e^2}$  — соответственно продольный и поперечный коэффициенты диффузии электронов в сильном магнитном поле.

Из (1) видно, что слабозатухающие ионно-звуковые волны существуют в области частот  $\omega \ll k^2 D$  и их спектр частот и декремент затухания определяются соотношениями ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ )

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Li}^2}{1 + \omega_{Le}^2/k^2 v_{Fe}^2}, \quad (3)$$

$$\delta = - \frac{v_{in}}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\omega^2}{k^2 D} \cdot \frac{1}{1 + k^2 v_{Fe}^2/\omega_{Le}^2}.$$

Рис. 16

Затухание ионно-звуковых волн в рассматриваемых условиях обусловлено ионным трением и диффузией электронов.

**Задача 9.** Исследовать распространение обыкновенной волны поперек магнитного поля в бесстолкновительной вырожденной электронной плазме в условиях  $\omega_{Le}^2 \gg \Omega_e^2 \gg \omega^2$ .

**Решение.** Дисперсионное уравнение для обыкновенной волны

$$k^2 c^2 - \omega^2 \epsilon_{zz} = 0 \quad (1)$$

в указанных условиях сильно упрощается, поскольку в  $\epsilon_{zz}$  [см. формулы (23.14) и (23.15)] основной вклад дает слагаемое с  $n = 0$ :

$$\epsilon_{zz} = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \int_0^\pi \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta J_0^2 \left( \frac{kv_{Fe}}{\Omega_e} \sin \vartheta \right). \quad (2)$$

Учитывая соотношения

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \vartheta) d\vartheta,$$

$$J_0'(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \vartheta \cos(z \sin \vartheta) d\vartheta,$$

в пределе  $kv_{Fe} \gg \Omega_e$  получаем

$$\epsilon_{zz} = 1 - \frac{3\omega_{Le}^2}{\omega^2} \cdot \frac{\Omega_e}{kv_{Fe}} \left[ J_0 \left( \frac{kv_{Fe}}{\Omega_e} \right) + J_0' \left( \frac{kv_{Fe}}{\Omega_e} \right) \right] = 0. \quad (3)$$

Таким образом, при  $\omega \ll \omega_{Le}$  имеем

$$k^2 c^2 + 3\omega_{Le}^2 \frac{\Omega_e}{kv_{Fe}} \left[ J_0 \left( \frac{kv_{Fe}}{\Omega_e} \right) + J_0' \left( \frac{kv_{Fe}}{\Omega_e} \right) \right] = 0. \quad (4)$$

Решения этого уравнения существуют только в условиях, когда

$$J_0'(z) + J_0(z) = -\frac{1}{z} J_0'(z) = \frac{J_1(z)}{z} \approx 0, \quad (5)$$

т. е.

$$k^2 c^2 + 3 \frac{\omega_{Le}^2 \Omega_e^2}{k^2 v_{Fe}^2} J_1 \left( \frac{kv_{Fe}}{\Omega_e} \right) = 0.$$

Это уравнение имеет решения с  $k^2 > 0$  (область прозрачности плазмы), если  $\frac{kv_{Fe}^2}{\Omega_e} \approx \mu_{1s}$ , где  $\mu_{1s}$  — корни функции Бесселя  $J_1(\mu_{1s}) = 0$ . Это означает, что вырожденная плазма большой плотности может оказаться прозрачной для низкочастотных колебаний с длиной волны, кратной ларморовскому радиусу электронов.

**Задача 10.** Исследовать распространение циклотронных волн на частоте  $\omega = s\Omega_e$  при  $s \gg 2$  в электронной плазме под углом  $\vartheta \neq 0$  к магнитному полю.

**Решение.** При распространении циклотронных волн под углом  $\vartheta \neq 0$  в плазме появляется поглощение и на высших гармониках  $\omega \approx s\Omega_e$ . Считая

$$|\omega - s\Omega_e| \ll k_{\parallel} v_{0e}, \quad k_{\perp} v_{0e} \ll \Omega_e,$$

где  $v_{0e}$  — скорость хаотического движения электронов (тепловая скорость —

для невырожденной плазмы и скорость Ферми — для вырожденной плазмы), имеем

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Эрмитовские части компонент тензора диэлектрической проницаемости независимо от степени вырождения равны

$$\begin{aligned} \epsilon_{\perp}^{\text{э}} &= 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \cdot \frac{1}{s^2 - 1}, \\ \mathbf{g}^{\text{э}} &= -\frac{\omega_{Le}^2 \Omega_e}{\omega(\omega^2 - \Omega_e^2)} = -\frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2 s(s^2 - 1)}, \\ \epsilon_{\parallel}^{\text{э}} &= 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{s^2 \Omega_e^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Антиэрмитовские части компонент тензора  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  равны:

$$\epsilon_{\perp}^{\text{а}} = \mathbf{g}^{\text{а}} = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{s^2 \omega_{Le}^2}{\omega |k_{\parallel}| v_{Te}} \left( \frac{k_{\perp}^2 v_{Te}^2}{\Omega_e^2} \right)^{s-1} \frac{1}{2^s s!}, \quad \epsilon_{\parallel}^{\text{а}} \approx 0 \quad (3)$$

— для невырожденной плазмы,

$$\epsilon_{\perp}^{\text{а}} = \mathbf{g}^{\text{а}} = i \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2 \omega_{Le}^2}{\omega |k_{\parallel}| v_{Fe}} \left( \frac{k_{\perp}^2 v_{Fe}^2}{\Omega_e^2} \right)^{s-1} \left( \frac{1}{2^s s!} \right)^2, \quad \epsilon_{\parallel}^{\text{а}} \approx 0 \quad (4)$$

— для вырожденной плазмы.

Видно, что антиэрмитовские части компонент тензора  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  малы по сравнению с эрмитовскими частями. Поэтому даже внутри линий циклотронного резонанса на высших гармониках поглощение волн слабое. Это позволяет легко найти показатели преломления и коэффициенты затухания волн ( $n \rightarrow n + i\chi$ ):

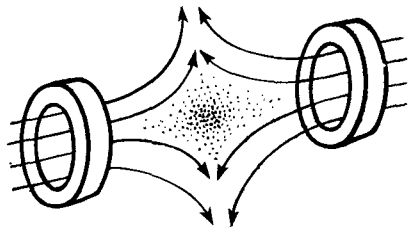
$$\begin{aligned} n_{1,2}^2 &= \\ &= \frac{(\epsilon_{\perp}^{\text{э}2} - g^{\text{э}2} - \epsilon_{\perp}^{\text{э}} \epsilon_{\parallel}^{\text{э}}) \sin^2 \vartheta \pm \sqrt{(\epsilon_{\perp}^{\text{э}2} - g^{\text{э}2} - \epsilon_{\perp}^{\text{э}} \epsilon_{\parallel}^{\text{э}})^2 \sin^4 \vartheta + 4g^{\text{э}2} \epsilon_{\parallel}^{\text{э}2} \cos^2 \vartheta}}{2(\epsilon_{\perp}^{\text{э}} \sin^2 \vartheta + \epsilon_{\parallel}^{\text{э}} \cos^2 \vartheta)}; \\ \chi_{1,2} &= \frac{-i\epsilon_{\perp}^{\text{а}}}{4n_{1,2}(\epsilon_{\perp}^{\text{э}} \sin^2 \vartheta + \epsilon_{\parallel}^{\text{э}} \cos^2 \vartheta)} \left\{ \left[ \sin^4 \vartheta (\epsilon_{\perp}^{\text{э}} - g^{\text{э}})^2 + 2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \epsilon_{\parallel}^{\text{э}} \right] \times \right. \\ &\times (\epsilon_{\perp}^{\text{э}} - g^{\text{э}}) + \cos^2 \vartheta (1 + \cos^2 \vartheta) \epsilon_{\parallel}^{\text{э}2} \left. \sqrt{(\epsilon_{\perp}^{\text{э}2} - g^{\text{э}2} - \epsilon_{\perp}^{\text{э}} \epsilon_{\parallel}^{\text{э}})^2 \sin^4 \vartheta + \right. \\ &\rightarrow \left. + 4g^{\text{э}2} \epsilon_{\parallel}^{\text{э}2} \cos^2 \vartheta \pm [\sin^4 \vartheta (\epsilon_{\perp}^{\text{э}2} - g^{\text{э}2} - \epsilon_{\parallel}^{\text{э}} \epsilon_{\perp}^{\text{э}}) (\sin^2 \vartheta (\epsilon_{\perp}^{\text{э}} - g^{\text{э}})^2 + \right. \\ &+ \cos^2 \vartheta \epsilon_{\parallel}^{\text{э}} (2\epsilon_{\perp}^{\text{э}} - 2g^{\text{э}} - \epsilon_{\parallel}^{\text{э}})) + 4g^{\text{э}} \epsilon_{\parallel}^{\text{э}2} \cos^2 \vartheta (\epsilon_{\perp}^{\text{э}} \sin^2 \vartheta - g^{\text{э}} \sin^2 \vartheta + \\ &\left. + \epsilon_{\parallel}^{\text{э}} \cos^2 \vartheta) \right] \}. \end{aligned}$$

Здесь  $\epsilon_{\perp}^{\text{а}}$  определяется формулами (3) и (4) соответственно для невырожденной и вырожденной плазмы.

---

## Часть 2

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЫ



## Глава VI

### ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С ПЛАЗМОЙ

#### § 30. Тензор диэлектрической проницаемости однородной неравновесной анизотропной плазмы

До сих пор изучались электромагнитные свойства термодинамически равновесной плазмы с максвелловской либо фермиевской функцией распределения частиц по скоростям. Реальная плазма, однако, как правило, далека от термодинамического равновесия. Неравновесность плазмы обусловлена способами ее создания, такими, как электрический разряд в газе, либо на поверхности твердого тела, инжекция заряженных частиц в нейтральный газ и его ионизация, инжекция носителей заряда в образец твердого тела и т. д. Очевидно, что первоначально неравновесная плазма вследствие столкновений частиц стремится стать равновесной. В гл. III был рассмотрен ряд задач и определены времена релаксации наиболее характерных неравновесностей плазмы (анизотропия распределения по импульсам, анизотропия температуры и др.), обусловленные столкновениями частиц.

В этой главе покажем, что в неравновесной плазме возникают бесстолкновительные эффекты, которые должны привести к релаксации неравновесного состояния плазмы значительно быстрее, чем столкновения частиц. Именно неравновесная плазма оказывается неустойчивой к различным малым возмущениям, которые всегда возникают в плазме флуктуационным образом. В результате в плазме нарастают



электромагнитные поля, разрушающие исходное неравновесное состояние.

Вопрос о том, куда релаксирует исходное неравновесное состояние плазмы в результате развития неустойчивостей, может быть решен лишь на основе нелинейной теории. Но начальная стадия развития неустойчивостей является задачей линейной электродинамики, согласно которой поведение во времени малых возмущений плазмы определяется дисперсионным уравнением (8.4)

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0, \quad (30.1)$$

где  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  — тензор диэлектрической проницаемости пространственно однородной неравновесной плазмы.

Корни этого уравнения  $\omega_n(\mathbf{k})$  определяют при больших значениях  $t$  поведение во времени рассматриваемых малых возмущений

$$\varphi_k(t) \sim \sum_n \varphi_k(0) e^{-i\omega_n t}.$$

Если хотя бы один корень среди  $\omega_n(\mathbf{k})$  имеет положительную мнимую часть, т. е.  $\text{Im } \omega_n(\mathbf{k}) > 0$ , то возмущение в плазме нарастает во времени, и плазма неустойчива.

Рассмотрим неустойчивости неравновесной плазмы с функцией распределения частиц сорта  $\alpha$ , анизотропной по отношению к внешнему однородному магнитному полю  $\mathbf{B}_0$ , которое направим вдоль оси  $Oz$ , т. е. примем, что

$$f_{0\alpha} = f_{0\alpha}(p_x, p_z). \quad (30.2)$$

Примерами такой неравновесной плазмы являются плазма с анизотропной температурой частиц, плазма с пучком заряженных частиц, движущихся вдоль направления магнитного поля и вращающихся вокруг него, и т. п.

Отметим, что в отсутствие электрического и переменного магнитного полей, а также при пренебрежении столкновениями частиц распределение (30.2) удовлетворяет стационарному и однородному в пространстве кинетическому уравнению

$$[\mathbf{vB}_0] \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (30.3)$$

Уравнение же для малого отклонения  $\delta f_\alpha(\mathbf{p}, t)$ , вызванного переменными полями  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , записывается как

$$\frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{c} [\mathbf{vB}_0] \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = -e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (30.4)$$

Решая уравнение (30.4) так же, как в § 23, т. е. считая возмущенные величины зависящими от времени и координат в виде  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , направляя ось  $Ox$  вдоль вектора  $\mathbf{k}_\perp$  и подставляя найденное при этом значение  $\delta f_\alpha(\mathbf{p}, t)$  в выражение для плотности индуцирован-

ного в плазме тока

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} \mathbf{j}_{\alpha} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int d\mathbf{p} v \delta f_{\alpha}(\mathbf{p}, t), \quad (30.5)$$

окончательно получаем тензор диэлектрической проницаемости неравновесной плазмы для рассматриваемых условий:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = & \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega \Omega_{\alpha}} \int d\mathbf{p} v_i \gamma \int_{\infty}^{\infty} d\varphi' \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_l} \times \\ & \times \left( \frac{\omega - \mathbf{k}v}{\omega} \delta_{ij} + \frac{k_l v_j}{\omega} \right) \exp \left\{ \frac{i\gamma}{\Omega_{\alpha}} [(\omega - k_z v_z)(\varphi' - \varphi) - \right. \\ & \left. - k_{\perp} v_{\perp} (\sin \varphi' - \sin \varphi)] \right\}, \quad (30.6) \end{aligned}$$

где 
$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \text{а} \quad \Omega_{\alpha} = \frac{e_{\alpha} B_0}{m_{\alpha} c}.$$

Учитывая далее вид невозмущенной функции распределения (30.2) и интегрируя выражение (30.6) по углам, получаем

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega^2} \int d\mathbf{p} \sum_n \frac{(\omega - k_z v_z) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_{\perp}} + k_z v_{\perp} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_z}}{(\omega - k_z v_z - n\Omega/\gamma) v_{\perp}} \Pi_{ij}^{(n)}, \quad (30.7)$$

где

$$\Pi_{ij}^{(n)} = F_{\alpha l} F_{j\alpha}^* = \begin{pmatrix} v_{\perp}^2 \left(\frac{nJ_n(x)}{x}\right)^2 & i v_{\perp}^2 \frac{n}{x} J_n(x) J'_n(x) & v_{\perp} v_z \frac{nJ_n^2(x)}{x} \\ -i v_{\perp}^2 \frac{nJ_n(x) J'_n(x)}{x} & v_{\perp}^2 J_n'^2(x) & -i v_z v_{\perp} J_n(x) J'_n(x) \\ v_{\perp} v_z \frac{nJ_n^2(x)}{x} & i v_{\perp} v_z J_n(x) J'_n(x) & v_z^2 J_n^2(x) \end{pmatrix}, \quad (30.8)$$

$$F_{\alpha} = \left( \frac{n\Omega_{\alpha}}{k_{\perp} \gamma} J_n(x), \quad -i v_{\perp} J'_n(x), \quad v_z J_n(x) \right), \quad x = \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_{\alpha}} \gamma.$$

Дальнейшее вычисление диэлектрической проницаемости требует задания явного вида функции  $f_{0\alpha}(p_{\perp}, p_{\parallel})$ , которую запишем следующим образом:

$$f_{0\alpha}(p_{\perp}, p_{\parallel}) = \frac{N_{0\alpha} \exp \left[ \frac{(p_{\perp} - p_{\perp 0})^2}{2m_{\alpha} T_{\perp\alpha}} - \frac{(p_{\parallel} - p_{\parallel 0})^2}{2m_{\alpha} T_{\parallel\alpha}} \right]}{p_{\perp 0} 2\pi \sqrt{T_{\perp\alpha} m_{\alpha}} \sqrt{T_{\parallel\alpha} m_{\alpha}}}. \quad (30.9)$$

Такая функция описывает систему частиц, обладающих средним продольным (по отношению к направлению  $\mathbf{V}_0$ )  $p_{\parallel 0}$  и средним поперечным  $p_{\perp 0}$  импульсами; тепловой разброс по импульсам при этом определяется температурами  $T_{\parallel \alpha}$  и  $T_{\perp \alpha}$  соответственно в продольном и поперечном направлениях, причем предполагается, что  $T_{\parallel \alpha} \ll m_{\alpha} c^2$ , а  $T_{\perp \alpha} \ll m_{\alpha} c^2$ . В отсутствие средних движений ( $p_{\perp 0} = p_{\parallel 0} = 0$ ) функция (30.9) переходит в функцию

$$f_{0\alpha} \rightarrow \frac{N_{0\alpha} e^{-\frac{p_{\perp}^2}{2m_{\alpha} T_{\perp \alpha}} - \frac{p_{\parallel}^2}{2m_{\alpha} T_{\parallel \alpha}}}}{2\pi m_{\alpha} T_{\perp \alpha} \sqrt{2\pi m_{\alpha} T_{\parallel \alpha}}}, \quad (30.10)$$

соответствующую плазме с анизотропной температурой. В пределе же холодной плазмы  $T_{\perp \alpha} = T_{\parallel \alpha} = 0$  и из (30.9) имеем

$$f_{0\alpha} \rightarrow \frac{N_{0\alpha}}{2\pi p_{\perp 0}} \delta(p_{\perp} - p_{\perp 0}) \delta(p_{\parallel} - p_{\parallel 0}). \quad (30.11)$$

Это распределение описывает моноэнергетическую систему частиц, вращающихся поперек направления внешнего однородного магнитного поля с импульсом  $p_{\perp 0}$  и движущихся вдоль него с импульсом  $p_{\parallel 0}$ . К реальной системе оно применимо в условиях, когда тепловым разбросом частиц по импульсам можно пренебречь, т. е. при  $p_{\perp 0} \gg \sqrt{m_{\alpha} T_{\perp \alpha}}$ ,  $p_{\parallel 0} \gg \sqrt{m_{\alpha} T_{\parallel \alpha}}$ .

Вычисление компонент тензора диэлектрической проницаемости (30.7) с помощью распределения (30.9) в общем случае сопряжено с громоздкими математическими выкладками, приводить которые здесь нет необходимости, поскольку при рассмотрении конкретных задач эти вычисления сильно упрощаются. На них остановимся далее. Здесь же изложим еще один способ нахождения тензора диэлектрической проницаемости неравновесной плазмы, имеющий довольно общий характер, поскольку он применим в условиях, когда отсутствует вращение частиц поперек магнитного поля, т. е.  $p_{\perp 0} = 0$ . При этом можно перейти в инерциальную систему координат, в которой отсутствует и продольный импульс  $p_{\parallel 0}$  у частиц сорта  $\alpha$  и которая, таким образом, связана с ними. Очевидно, что распределение частиц этого сорта по импульсам имеет вид (30.10). При  $T_{\perp \alpha} = T_{\parallel \alpha}$  это распределение совпадает с максвелловским. Тензор диэлектрической проницаемости для частиц сорта  $\alpha$  в последнем случае был вычислен в предыдущей главе [см. выражение (23.10)], а для анизотропной плазмы с  $T_{\perp \alpha} \neq T_{\parallel \alpha}$  его вычисление не представляет труда и проводится в следующем параграфе [см. формулы (31.4)]. Используя эти выражения, можно найти тензор диэлектрической проницаемости многокомпонентной плазмы в лабораторной системе координат, не решая заново кинетического уравнения, а основываясь лишь на формулах преобразования Лоренца. Действительно, полный индуцированный ток в плазме есть сумма токов отдельных ее компонент:

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = \sum_{\alpha} j_{\alpha i} = \sum_{\alpha} \sigma_{ij}^{(\alpha)}(\omega, \mathbf{k}) E_j, \quad (30.12)$$

где  $\sigma_{ij}^{(\alpha)}(\omega, \mathbf{k})$  — вклад в тензор проводимости, обусловленный частицами сорта  $\alpha$ , в лабораторной системе координат.

Чтобы найти эту величину, перейдем в движущуюся со скоростью  $\mathbf{u}_{\alpha}$  собственную систему координат, связанную с частицами сорта  $\alpha$ :

$$\mathbf{p}_{\parallel 0} = m_{\alpha} \gamma_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}, \quad \gamma_{\alpha} = \left(1 - \frac{u_{\alpha}^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (30.13)$$

В этой системе координат

$$j'_{i\alpha}(\omega'_{\alpha}, \mathbf{k}'_{\alpha}) = \sigma_{ij}^{(\alpha)}(\omega'_{\alpha}, \mathbf{k}'_{\alpha}) E'_{j\alpha}(\omega'_{\alpha}, \mathbf{k}'_{\alpha}). \quad (30.14)$$

Здесь  $\omega'_{\alpha}$  и  $\mathbf{k}'_{\alpha}$  — лоренцовски преобразованные частота и волновой вектор:

$$\omega'_{\alpha} = \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{\alpha}}{\sqrt{1 - \frac{u_{\alpha}^2}{c^2}}} = (\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{\alpha}) \gamma_{\alpha}, \quad (30.15)$$

$$\mathbf{k}'_{\alpha} = \mathbf{k} + \mathbf{u}_{\alpha} \gamma_{\alpha} \left[ \frac{\mathbf{k}\mathbf{u}_{\alpha}}{u_{\alpha}^2} \left(1 - \frac{1}{\gamma_{\alpha}}\right) - \frac{\omega}{c^2} \right];$$

$\sigma_{ij}^{(\alpha)}(\omega'_{\alpha}, \mathbf{k}'_{\alpha})$  — тензор проводимости частиц сорта  $\alpha$  в собственной движущейся системе координат;  $\mathbf{E}'_{\alpha}$  и  $\mathbf{j}'_{\alpha}$  — напряженность электрического поля и плотность тока в этой системе, которые связаны с  $\mathbf{E}_{\alpha}$  и  $\mathbf{j}_{\alpha}$  формулами преобразования Лоренца:

$$j_{i\alpha} = \alpha_{ij}(\mathbf{u}_{\alpha}) j'_{i\alpha}, \quad E'_{i\alpha} = \beta_{ij}(\mathbf{u}_{\alpha}) E_{j\alpha}, \quad (30.16)$$

где

$$\alpha_{ij}(\mathbf{u}_{\alpha}) = \delta_{ij} + \gamma_{\alpha} \left[ \frac{u_{\alpha i} u_{\alpha j}}{u_{\alpha}^2} \left(1 - \frac{1}{\gamma_{\alpha}}\right) + \frac{k'_{\alpha j} u_{\alpha i}}{\omega'_{\alpha}} \right], \quad (30.17)$$

$$\beta_{ij}(\mathbf{u}_{\alpha}) = \frac{\omega'_{\alpha}}{\omega} \alpha_{ji}(\mathbf{u}_{\alpha}) = \frac{\omega'_{\alpha}}{\omega} \delta_{ij} + \gamma_{\alpha} \left[ \frac{u_{\alpha i} u_{\alpha j}}{u_{\alpha}^2} \left(\frac{1}{\gamma_{\alpha}} - 1\right) + \frac{k_{i\alpha} u_{\alpha j}}{\omega} \right].$$

Из формул (30.12) ÷ (30.17) легко получить тензор диэлектрической проницаемости многокомпонентной плазмы в лабораторной системе координат:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sum_{\alpha} \alpha_{i\mu}(\mathbf{u}_{\alpha}) \sigma_{\mu\nu}^{(\alpha)}(\omega'_{\alpha}, \mathbf{k}'_{\alpha}) \beta_{\nu j}(\mathbf{u}_{\alpha}) = \\ &= \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{\omega'_{\alpha}}{\omega} \alpha_{i\mu} \left[ \varepsilon_{\mu\nu}^{(\alpha)}(\omega'_{\alpha}, \mathbf{k}'_{\alpha}) - \delta_{\mu\nu} \right] \beta_{\nu j}. \end{aligned} \quad (30.18)$$

В этом выражении  $\epsilon_{ij}^{(\alpha)}(\omega', \mathbf{k}', \mathbf{k}'_a)$  — диэлектрическая проницаемость частиц сорта  $\alpha$  в собственной движущейся системе координат, которая считается известной [см. (23.10) и (31.4)].

При использовании формулы (30.18) следует иметь в виду, что в выражении для  $\epsilon_{ij}^{(\alpha)}(\omega', \mathbf{k}', \mathbf{k}'_a)$  наряду с частотой и волновым вектором преобразуются плотность частиц (вследствие сокращения объема) и их масса. В результате ленгмюровская частота  $\omega'_{L\alpha} = \omega_{L\alpha} \gamma_\alpha^{-1/2}$ , где  $\omega_{L\alpha} \equiv \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_\alpha}{m_\alpha}}$ , остается инвариантной, а ларморовская частота преобразуется:  $\Omega'_\alpha \equiv \Omega_\alpha = \frac{e_\alpha B_0}{m_\alpha c}$ . Здесь  $N_\alpha$  — плотность частиц сорта  $\alpha$  в лабораторной системе координат, а  $m_\alpha$  — их масса покоя.

В заключение заметим, что формулы (30.16) и (30.17) обобщают известные материальные соотношения Минковского для движущихся изотропных сред на случай анизотропных сред с учетом частотной и пространственной дисперсии. Особо простой вид эти формулы принимают в нерелятивистском пределе, когда  $u_\alpha \ll c$ :

$$\begin{aligned} \omega'_\alpha &= \omega - \mathbf{k} \mathbf{u}_\alpha, \quad \mathbf{k}'_\alpha = \mathbf{k}, \\ \alpha_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{k_j u_{ia}}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{u}_\alpha}, \quad \beta_{ij} = \frac{\omega - \mathbf{k} \mathbf{u}_\alpha}{\omega} \delta_{ij} + \frac{k_i u_{aj}}{\omega}. \end{aligned} \quad (30.19)$$

### § 31. Неустойчивость плазмы с анизотропной температурой частиц

В качестве первого примера неустойчивости неравновесной плазмы рассмотрим плазму с анизотропной температурой частиц, т. е. с функцией распределения по импульсам (30.10). Ограничиваясь нерелятивистским распределением по импульсам и вводя обозначения

$$\epsilon_{\parallel} = \frac{mv_{\parallel}^2}{2} = \frac{p_{\parallel}^2}{2m}, \quad \epsilon_{\perp} = \frac{mv_{\perp}^2}{2} = \frac{p_{\perp}^2}{2m}, \quad (31.1)$$

перепишем выражение (30.7) в виде

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \delta_{ij} - \left( \delta_{ij} - \frac{B_{0i} B_{0j}}{B^2} \right) \sum_{\alpha} \frac{2\pi e_{\alpha}^2}{\omega^2} \int dp v^2 \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \epsilon_{\perp}} - \\ &- \frac{B_{0i} B_{0j}}{B_0^2} \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega^2} \int dp v_{\parallel}^2 \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \epsilon_{\parallel}} + \sum_{\alpha} \sum_{\mathbf{n}} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega^2} \int dp \times \\ &\times \frac{F_{\alpha i} F_{\alpha j}^* \left( k_z v_z \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \epsilon_{\parallel}} + n \Omega_{\alpha} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \epsilon_{\perp}} \right)}{\omega - n \Omega_{\alpha} - k_z v_z}, \end{aligned} \quad (31.2)$$

где

$$\mathbf{F}_\alpha = \left( \frac{n\Omega_\alpha}{k_\perp} J_n \left( \frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha} \right), -iv_\perp J_n \left( \frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha} \right), v_z J_n \left( \frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha} \right) \right). \quad (31.3)$$

Подставляя распределение (30.10), соответствующее плазме с анизотропной температурой частиц, запишем тензор (31.2) в компонентах:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 1 - \sum_\alpha \sum_n \frac{n^2 \omega_{L\alpha}^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} \right) \frac{A_n(z_\alpha)}{z_\alpha} - \sum_\alpha \sum_n \times \\ &\times \frac{n^2 \omega_{L\alpha}^2}{\omega(\omega - n\Omega_\alpha)} \cdot \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} \cdot \frac{A_n(z_\alpha)}{z_\alpha} J_+(\beta_{\alpha n}) \left[ 1 + \frac{n\Omega_\alpha}{\omega} \left( \frac{T_{\parallel\alpha}}{T_{\perp\alpha}} - 1 \right) \right], \\ \varepsilon_{xy} &= -\varepsilon_{yx} = i \sum_\alpha \sum_n \frac{n\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} \right) A'_n(z_\alpha) - \\ &- i \sum_\alpha \sum_n \frac{n\omega_{L\alpha}^2}{\omega(\omega - n\Omega_\alpha)} \cdot \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} A'_n(z_\alpha) J_+(\beta_{\alpha n}) \left[ 1 + \frac{n\Omega_\alpha}{\omega} \left( \frac{T_{\parallel\alpha}}{T_{\perp\alpha}} - 1 \right) \right], \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{xx} - 2 \sum_\alpha \sum_n \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} \right) z_\alpha A'_n(z_\alpha) + \quad (31.4) \\ &+ 2 \sum_\alpha \sum_n \frac{n\omega_{L\alpha}^2}{\omega(\omega - n\Omega_\alpha)} \cdot \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} z_\alpha A'_n(z_\alpha) J_+(\beta_{\alpha n}) \left[ 1 + \frac{n\Omega_\alpha}{\omega} \left( \frac{T_{\parallel\alpha}}{T_{\perp\alpha}} - 1 \right) \right], \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} = \sum_\alpha \sum_n \frac{n\omega_{L\alpha}^2}{\omega\Omega_\alpha} \cdot \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} \cdot \frac{A_n(z_\alpha)}{z_\alpha} \cdot \frac{k_\perp}{k_z} [1 - J_+(\beta_{\alpha n})] \left[ 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n\Omega_\alpha}{\omega} \left( \frac{T_{\parallel\alpha}}{T_{\perp\alpha}} - 1 \right) \right], \\ \varepsilon_{yz} &= -\varepsilon_{zy} = -i \sum_\alpha \sum_n \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega\Omega_\alpha} \cdot \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} A'_n(z_\alpha) \frac{k_\perp}{k_\parallel} [1 - J_+(\beta_{\alpha n})] \left[ 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n\Omega_\alpha}{\omega} \left( \frac{T_{\parallel\alpha}}{T_{\perp\alpha}} - 1 \right) \right], \\ \varepsilon_{zz} &= 1 + \sum_\alpha \sum_n \frac{\omega_{L\alpha}^2 (\omega - n\Omega_\alpha)}{k_z^2 v_T^2 \omega} A_n(z_\alpha) [1 - J_+(\beta_{\alpha n})] \left[ 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n\Omega_\alpha}{\omega} \left( \frac{T_{\parallel\alpha}}{T_{\perp\alpha}} - 1 \right) \right], \end{aligned}$$

где

$$z_\alpha = \frac{k_\perp^2 v_{T\perp\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2}, \quad \beta_{\alpha n} = \frac{\omega - n\Omega_\alpha}{k_z v_{T\parallel\alpha}}, \quad v_{T\perp, \parallel\alpha} = \sqrt{\frac{T_{\perp, \parallel\alpha}}{m_\alpha}}.$$

Из формул (31.4) предельным переходом  $\mathbf{B}_0 \rightarrow 0$  можно получить компоненты тензора диэлектрической проницаемости анизотропной плазмы с  $T_{\perp\alpha} \neq T_{\parallel\alpha}$  в отсутствие внешнего магнитного поля. Однако такой предельный переход математически труден, так как связан с суммированием функций Бесселя при больших значениях аргумента, о чем говорилось в гл. V. Для вывода тензора  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  анизотропной немагнитоактивной плазмы проще исходить из выражения

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2}{\omega} \int \frac{d\mathbf{p}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} v_i \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{p})}{\partial p_l} \left[ \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega}\right) \delta_{ij} + \frac{k_l v_j}{\omega} \right], \quad (31.5)$$

обобщающего формулу (17.9) на случай произвольной анизотропной функции распределения  $f_{0\alpha}(\mathbf{p})$ . При этом удобно ввести следующую систему координат: ось  $Oz$  направить вдоль вектора  $\mathbf{k}$ , а ось  $Ox$  — так, чтобы вектор  $\mathbf{n}_\parallel$ , определяющий направление, в котором температура частиц равна  $T_{\parallel\alpha}$ , лежал в плоскости  $xz$ . Угол между  $\mathbf{n}_\parallel$  и  $\mathbf{k}$  обозначим через  $\vartheta$ ; вращение вектора  $\mathbf{n}_\perp$ , перпендикулярного вектору  $\mathbf{n}_\parallel$ , определяет плоскость, в которой температура частиц равна  $T_{\perp\alpha}$  (рис. 17).

В результате для тензора диэлектрической проницаемости анизотропной плазмы получаем

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & \epsilon_{13} \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ \epsilon_{31} & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad (31.6)$$

где

$$\epsilon_{11} = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2} \left\{ 1 + \frac{1}{T_\alpha^{*2}} [(T_{\parallel\alpha} T_{\perp\alpha} - 2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta (T_{\parallel\alpha} - T_{\perp\alpha})^2) \times \right.$$

$$\left. \times (J_+(\beta_\alpha^*) - 1) + \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta (T_{\parallel\alpha} - T_{\perp\alpha})^2 (\beta_\alpha^{*2} J_+(\beta_\alpha^*) - \beta_\alpha^{*2} - 1) \right\},$$

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{31} = \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2} \cdot \frac{\sin 2\vartheta}{2T_\alpha^*} (T_{\perp\alpha} - T_{\parallel\alpha}) [(\beta_\alpha^{*2} - 1) J_+(\beta_\alpha^*) - \beta_\alpha^{*2}], \quad (31.7)$$

$$\epsilon_{22} = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2} \left[ \left(1 - \frac{T_{\perp\alpha}}{T_\alpha^*}\right) + \frac{T_{\perp\alpha}}{T_\alpha^*} J_+(\beta_\alpha^*) \right],$$

$$\epsilon_{33} = 1 + \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2} \beta_\alpha^{*2} [1 - J_+(\beta_\alpha^*)].$$

Здесь

$$T_{\alpha}^* = T_{\parallel\alpha} \cos^2 \vartheta + T_{\perp\alpha} \sin^2 \vartheta; \quad \beta_{\alpha}^* = \frac{\omega}{k} \sqrt{\frac{m_{\alpha}}{T_{\alpha}^*}}.$$

Из формул (31.4) и (31.7) видно, что в анизотропной плазме антиэрмитовские компоненты тензора диэлектрической проницаемости, обусловленные черенковским поглощением и излучением волн, могут изменить знак по сравнению с изотропной максвелловской плазмой. Это обстоятельство, как неоднократно отмечалось, является предвестником возможной неустойчивости плазмы. Однако изменение знака антиэрмитовской части тензора  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  еще не является достаточным условием неустойчивости, так как для развития неустойчивости требуется, чтобы при этом в плазме могли существовать колебания. Для получения достаточных условий неустойчивости необходимо проанализировать дисперсионное уравнение (30.1), что делается ниже.

Анализ устойчивости анизотропной плазмы начнем с плазмы в отсутствие внешнего магнитного поля. Подставляя выражение (31.6) в (30.1), получаем два независимых уравнения:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{22} = 0, \quad (31.8)$$

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{11}\right) \epsilon_{33} + \frac{\nu \omega^2}{c^2} \epsilon_{13} = 0. \quad (31.9)$$

Первое из них описывает чисто поперечную волну  $\mathbf{k} \perp \mathbf{E} \parallel Oy$ , второе — продольно-поперечную волну, в которой поле  $\mathbf{E}$  лежит в плоскости  $xz$ . Лишь при  $\vartheta = 0$  или  $\vartheta = \pi/2$  эта волна распадается на чисто продольную ( $\mathbf{E} \parallel Oz \parallel \mathbf{k}$ ) и чисто поперечную ( $\mathbf{k} \perp \mathbf{E} \parallel Ox$ ):

$$\epsilon_{33} = 0, \quad (31.10)$$

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{11} = 0, \quad (31.11)$$

причем  $T_{\alpha}^* = T_{\parallel\alpha}$  при  $\vartheta = 0$  и  $T_{\alpha}^* = T_{\perp\alpha}$  при  $\vartheta = \pi/2$ .

Легко видеть, что продольные колебания в плазме с анизотропным давлением всегда устойчивы. Поэтому ограничимся исследованием лишь поперечных волн, описываемых уравнениями (31.8) и (31.11); для простоты рассмотрим случай  $\vartheta = 0$ , ли-

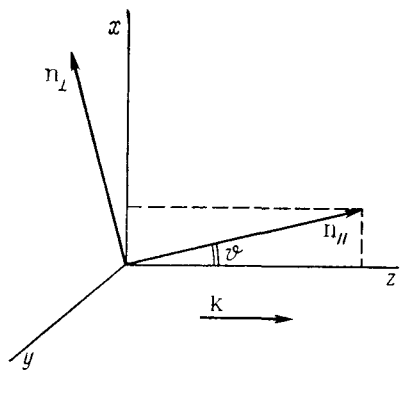


Рис. 17



бо  $\vartheta = \pi/2$ . При  $\vartheta = 0$   $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$  и указанные уравнения тождественны, а при  $\vartheta = \pi/2$   $\varepsilon_{11} \neq \varepsilon_{22}$ . Однако в последнем случае уравнение (31.8) аналогично уравнению для поперечных волн в изотропной плазме с температурой  $T_\alpha = T_{\perp\alpha}$  и имеет лишь устойчивые решения. Таким образом, для анализа устойчивости анизотропной плазмы достаточно исследовать уравнение (31.11), которое имеет вид

$$k^2 c^2 = \omega^2 \left\{ 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2} \left[ 1 + \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} (J_+(\beta_{\parallel\alpha}) - 1) \right] \right\} \quad (31.12)$$

при  $\vartheta = 0$ ,

$$k^2 c^2 = \omega^2 \left\{ 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2} \left[ 1 + \frac{T_{\parallel\alpha}}{T_{\perp\alpha}} (J_+(\beta_{\perp\alpha}) - 1) \right] \right\} \quad (31.12a)$$

при  $\vartheta = \pi/2$ .

Отсюда видно, что все выводы, полученные при  $\vartheta = 0$ , переносятся на случай  $\vartheta = \pi/2$  с заменой  $T_{\parallel\alpha} \rightleftharpoons T_{\perp\alpha}$ . Поэтому рассмотрим лишь распространение волн под углом  $\vartheta = 0$ .

Пусть в плазме анизотропной температурой обладает электронная компонента; ионную функцию распределения для простоты будем считать изотропной. Покажем, что такая плазма всегда неустойчива. Действительно, из уравнения (31.12) и условия  $\beta_e \gg 1$  (т.е.  $\omega \gg kv_{\parallel e}$ ) имеем

$$k^2 c^2 = \omega^2 \left[ 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{k^2 v_{\perp e}^2}{\omega^2} \right) \right]. \quad (31.13)$$

Корни этого биквадратного уравнения с хорошей степенью точности равны

$$\omega_1^2 \approx k^2 c^2 + \omega_{Le}^2, \quad (31.14)$$

$$\omega_2^2 = - \frac{\omega_{Le}^2 k^2 v_{\perp e}^2}{\omega_{Le}^2 + k^2 c^2} \ll -k^2 v_{\perp e}^2.$$

Второй корень  $\omega_2^2 < 0$ , что соответствует наличию гидродинамической аperiodической неустойчивости в анизотропной плазме. Из условия  $\omega_2 \gg kv_{\parallel e}$  следует, что такая неустойчивость возможна только при достаточно большой анизотропии электронной температуры, когда  $T_{\perp e} \gg T_{\parallel e}$ . Аналогичный вывод получается из уравнения (31.12a) при  $T_{\parallel e} \ll \ll T_{\perp e}$ .

Не надо, однако, думать, что для развития неустойчивости в плазме необходима сильная анизотропия электронной температуры. Неустойчивость может существовать и при очень малой анизотропии. Чтобы убедиться в этом, проанализируем уравнение (31.12) в условиях  $\beta_{\parallel e} \ll 1$ ,  $\beta_i \gg 1$  (т.е.  $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{\parallel e}$ ):

$$k^2 c^2 + \omega_{Le}^2 \left(1 - \frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}}\right) - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega \omega_{Le}^2}{k v_{\parallel e}} \cdot \frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} + \omega_{Li}^2 = 0. \quad (31.15)$$

Отсюда

$$\omega = -i \frac{k v_{\parallel e}}{\omega_{Le}^2} \cdot \frac{T_{\parallel e}}{T_{\perp e}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ k^2 c^2 + \omega_{Li}^2 + \omega_{Le}^2 \left(1 - \frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}}\right) \right]. \quad (31.16)$$

Видно, что в неограниченной плазме (в которой волновой вектор  $\mathbf{k}$  может быть сколь угодно малым) при  $T_{\perp e} \gg T_{\parallel e}$  величина  $\delta = \text{Im } \omega$  может стать положительной, а колебания — неустойчивыми. Эта неустойчивость также является аperiодической, но в отличие от рассмотренной обусловлена изменением знака мнимой части  $\epsilon_{\parallel}$ , т. е. связана с черенковским механизмом диссипации, поэтому ее называют кинетической. Аналогичный анализ уравнения (31.12а) убеждает в том, что такая же неустойчивость существует и при  $T_{\parallel e} > T_{\perp e}$  и описывается формулой (31.16) с заменой  $T_{\perp e} \rightleftharpoons T_{\parallel e}$ .

Неустойчивость плазмы с анизотропной температурой частиц сохраняется и при наличии внешнего магнитного поля. Покажем это на примере волн, распространяющихся строго вдоль магнитного поля ( $k = k_{\parallel}$ ,  $k_{\perp} = 0$ ). В этом случае уравнение (30.1) распадается на два уравнения:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon_{xx} \pm i \epsilon_{xy}), \quad (31.17)$$

$$\epsilon_{zz} = 0. \quad (31.17a)$$

Уравнения (31.17) описывают поперечные (обыкновенную и необыкновенную) волны, а уравнение (31.17 а), в точности совпадающее с (31.10), — чисто продольную волну. Таким образом, продольные колебания в анизотропной магнитоактивной плазме при строго продольном распространении, так же как и в отсутствие магнитного поля, всегда устойчивы. Для поперечных волн при подстановке выражений (31.4) в (31.17) получаем

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2} \left[ \frac{\omega}{\omega \mp \Omega_{\alpha}} J_{\pm} \left( \frac{\omega \mp \Omega_{\alpha}}{k v_{\parallel \alpha}} \right) \left( \frac{T_{\perp \alpha}}{T_{\parallel \alpha}} \pm \right) \pm \frac{\Omega_{\alpha}}{\omega} \left( 1 - \frac{T_{\perp \alpha}}{T_{\parallel \alpha}} \right) \right] + \left( 1 - \frac{T_{\perp \alpha}}{T_{\parallel \alpha}} \right) \right\}. \quad (31.18)$$

Пусть в плазме анизотропна электронная температура. Устойчивость такой плазмы естественно исследовать относительно высокочастотных колебаний, в которых ионы принимать участия не могут. В области частот ( $\omega - \Omega_e$ )  $\gg k v_{\parallel}$  дисперсионное уравнение высокочастотных электронных колебаний согласно (31.18) записывается в виде

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega (\omega \mp \Omega_e)} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{Le}^2}{\omega k v_{\parallel}} \left[ \frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} \right] \right\}$$

$$\pm \frac{\Omega_e}{\omega} \left( 1 - \frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} \right) \left. \right] e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(\omega \mp \Omega_e)^2}{k^2 v_{\parallel e}^2}} \quad (31.19)$$

Отсюда для обыкновенной волны при  $\omega \ll \Omega_e$  (в этой области частот она называется спиральной волной) находим ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ )

$$\omega = \frac{k^2 c^2}{\omega_{Le}^2} \Omega_e, \quad (31.20)$$

$$\delta = - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{k c^2 \Omega_e^2}{v_{\parallel e} \omega_{Le}^2} \left[ \frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} + \frac{\Omega_e}{\omega} \left( 1 - \frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} \right) \right] e^{-\frac{(\omega - \Omega_e)^2}{2k^2 v_{\parallel e}^2}}.$$

Видно, что при  $T_{\perp e} > T_{\parallel e}$  волна неустойчива; поскольку  $\omega \ll \ll \Omega_e$ , неустойчивость имеет место практически при сколь угодно малой анизотропии. Максимальным инкрементом обладает волна с

$$k^2 \approx \frac{\omega_{Le}^2}{c^2} \left( 1 - \frac{T_{\parallel e}}{T_{\perp e}} \right),$$

причем

$$\omega = \Omega_e \left( 1 - \frac{T_{\parallel e}}{T_{\perp e}} \right), \quad (31.21)$$

$$\delta_{\max} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_{Le} \left( \frac{T_{\perp e} - T_{\parallel e}}{T_{\perp e}} \right)^{3/2} \frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} \cdot \frac{v_{\parallel e}^2}{c^2} e^{-\frac{B_0}{8\pi N_e T_{\parallel e}} \cdot \frac{T_{\perp e}}{(T_{\perp e} - T_{\parallel e})}}.$$

Рассмотренная неустойчивость волны в области частот  $\omega \ll \Omega_e$  обусловлена изменением знака антиэрмитовской части тензора диэлектрической проницаемости при  $T_{\perp e} > T_{\parallel e}$  и в этом смысле является кинетической. В области же частот  $\omega \gg \Omega_e$ , когда магнитным полем в (31.18) можно пренебречь, это уравнение переходит в (31.12), при исследовании которого было показано, что наряду с кинетической неустойчивостью в анизотропной плазме с  $T_{\perp e} \gg T_{\parallel e}$  возможна гидродинамическая неустойчивость со спектром (31.14).

Теперь, когда рассмотрен вопрос о развитии неустойчивостей в бесстолкновительной плазме с анизотропной температурой, можно сравнить инкременты их нарастания с обратным временем релаксации температуры, обусловленной столкновениями частиц, и тем самым выяснить пределы применимости полученных формул. Как было показано в гл. III (см. задачу 5), релаксация анизотропии электронной температуры в полностью ионизованной плазме определяется электрон-электронными и электрон-ионными столкновениями, а в слабоиони-

зованной плазме — столкновениями электронов с нейтральными частицами. Поэтому справедливость полученных формул определяется неравенствами

$$\text{Im } \omega \gg \nu_{эфф}, \nu_{en} \quad (31.22)$$

соответственно для полностью ионизованной и слабоионизованной плазмы. Именно эти условия определяют минимальную анизотропию температуры электронов, выше которой плазма оказывается неустойчивой.

### § 32. Взаимодействие прямолинейного электронного пучка с плазмой. Черенковская неустойчивость

Рассмотрим другой пример неравновесной плазмы, очень распространенный в различных практических приложениях — плазму, в которой небольшая группа электронов обладает достаточной направленной скоростью и движется относительно остальных «покоящихся» частиц. Другими словами, исследуем плазму, в которую инжектирован релятивистский электронный пучок с малой по сравнению с плазмой плотностью. Будем считать, что электронный пучок движется строго прямолинейно вдоль внешнего магнитного поля, так что равновесная функция распределения электронов пучка имеет вид (30.2). Более того, предположим, что в собственной системе координат они имеют максвелловское распределение с нерелятивистской температурой (разбросом по энергиям); остальные «покоящиеся» частицы плазмы также считаем распределенными по Максвеллу, но в лабораторной системе координат. Это позволяет при вычислении диэлектрической проницаемости плазмы в целом воспользоваться общими формулами преобразования (30.18), в которых тензор  $\epsilon_{\mu\nu}^{(\alpha)}(\omega'_\alpha, k'_\alpha)$  определяется выражением (23.10) для частиц сорта  $\alpha$ .

Анализ устойчивости плазма-пучковых систем начнем с прямолинейного моноэнергетического электронного пучка, взаимодействующего с холодной плазмой. Очевидно, что такой пучок может двигаться лишь строго вдоль магнитного поля. Модель же рассматриваемой плазма-пучковой системы применима для описания быстрых процессов с характерными скоростями, намного превышающими тепловые скорости частиц пучка и плазмы, так что последними можно полностью пренебречь.

Для моноэнергетического электронного пучка в собственной системе координат и частиц холодной плазмы в лабораторной системе координат можно воспользоваться выражениями (24.2) и (24.3), которые при учете формул преобразования (30.17) и (30.18) приводят к следующим выражениям для компонент тензора диэлектрической проницаемости плазма-пучковой системы:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2 \omega_{\alpha}'^2 \gamma_{\alpha}^{-1}}{\omega^2 (\omega_{\alpha}'^2 - \Omega_{\alpha}^2)}, \\
\epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} &= -i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2 \omega_{\alpha}' \Omega_{\alpha} \gamma_{\alpha}^{-1}}{\omega^2 (\omega_{\alpha}'^2 - \Omega_{\alpha}^2)}, \\
\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} &= - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2 \omega_{\alpha}' k_{\perp} u_{\alpha}}{\omega^2 (\omega_{\alpha}'^2 - \Omega_{\alpha}^2)}, \\
\epsilon_{yz} = -\epsilon_{zy} &= i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2 \Omega_{\alpha} k_{\perp} u_{\alpha}}{\omega^2 (\omega_{\alpha}'^2 - \Omega_{\alpha}^2)},
\end{aligned} \tag{32.1}$$

$$\epsilon_{zz} = 1 - \sum_{\alpha} \left[ \frac{\omega_{L\alpha}^2 \gamma_{\alpha}^{-1}}{\omega_{\alpha}'^2} + \frac{\omega_{L\alpha}^2 \gamma_{\alpha} k_{\perp}^2 u_{\alpha}^2}{\omega^2 (\omega_{\alpha}'^2 - \Omega_{\alpha}^2)} \right].$$

Здесь  $\omega_{L\alpha} = \sqrt{\frac{4\pi e_{\alpha}^2 N_{0\alpha}}{m_{\alpha}}}$  — ленгмюровская частота частиц сорта  $\alpha$

( $N_{0\alpha}$  — их плотность в лабораторной системе координат);  $\omega_{\alpha}' = (\omega - \mathbf{u}_{\alpha} \mathbf{k}) \gamma_{\alpha}$ , где  $\gamma_{\alpha} = (1 - u_{\alpha}^2/c^2)^{-1/2}$ ;  $\Omega_{\alpha} = \frac{e_{\alpha} B_0}{m_{\alpha} c}$  — ларморовская частота;  $\mathbf{u}_{\alpha}$  — направленная скорость частиц сорта  $\alpha$ .

Подставляя (32.1) в уравнение (30.1), можно исследовать спектры колебаний любой многопотоковой плазмы в условиях пренебрежения тепловыми движениями частиц. Проанализируем это для случая, когда моноэнергетический электронный пучок малой плотности пронизывает холодную плазму. Заметим, что при инжекции электронного пучка в плазму в последней индуцируются заряды и токи, нейтрализующие заряд и ток пучка (см. задачу 1 настоящей главы). В результате плазма-пучковая система оказывается бестоковой и полностью нейтрализованной. Что касается направленной скорости электронов плазмы, создающих обратный ток, нейтрализующий ток пучка, то при плотности плазмы  $N_p$ , намного превышающей плотность электронов пучка  $N_b$ , она оказывается малой:  $u_p = \frac{N_b}{N_p} u_b \ll u_b$ , и ей можно пренебречь. Сказанное позволяет использовать для исследования свойств плазма-пучковой системы выражения (32.1).

Подставляя (32.1) в уравнение (30.1) и в первом приближении пренебрегая пучковыми слагаемыми, получим дисперсионное уравнение для электромагнитных колебаний холодной магнитоактивной плазмы, подробно проанализированное в § 24. Учет пучковых слагаемых должен давать малые поправки к найденным там спектрам. Из (32.1) легко видеть, что эти поправки наиболее существенны в тех областях частот и фазовых скоростей волн, в которых пучковые слагаемые в компонентах тензора диэлектрической проницаемости неограниченно возраста-

ют. Это имеет место в условиях

$$\omega = k_z u, \quad (32.2)$$

$$\omega = k_z u \pm \Omega_e / \gamma,$$

причем при выполнении первого равенства, называемого условием черенковского резонанса, пучковые слагаемые в случае прямолинейного пучка имеют полюс второго порядка, а при выполнении второго равенства, называемого условием циклотронного (доплеровского) резонанса, — полюс первого порядка. Таким образом, для прямолинейного пучка наиболее сильное взаимодействие с плазмой следует ожидать при выполнении условия черенковского резонанса.

Анализ взаимодействия моноэнергетического электронного пучка с холодной плазмой начнем с простейшего случая, когда отсутствует внешнее магнитное поле, так что  $\omega'_\alpha \gg \Omega_\alpha$ . При этом (30.1) распадается на два уравнения:

$$k^2 c^2 - \omega^2 \left[ 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1}}{\omega^2} \right] = 0, \quad (32.3)$$

$$(k^2 c^2 - \omega^2 + \omega_{Le}^2 + \omega_b^2 \gamma^{-1}) \left( 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} \right) - \frac{k_\perp^2 u^2}{\omega^2} \cdot \frac{\omega_{Le}^2 \omega_b^2 \gamma^{-1}}{(\omega - k_z u)^2} = 0.$$

Здесь  $\omega_{Le}$  и  $\omega_b$  — ленгмюровские частоты электронов плазмы и пучка соответственно.

При выводе уравнений (32.3) ионными слагаемыми было пренебрежено ввиду их малости, т. е. рассматривается взаимодействие электронного пучка с высокочастотными колебаниями плазмы.

Легко видеть, что первое уравнение (32.3) описывает устойчивые колебания плазмы со спектром частот

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 + \omega_b^2 \gamma^{-1} + k^2 c^2. \quad (32.4)$$

Вклад электронов пучка вследствие малости его плотности при этом ничтожно мал. Устойчивость колебаний легко понять, если учесть, что электрическое поле в них направлено вдоль оси  $ou$  (чисто поперечная волна,  $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ ), а следовательно, работа поля волны над электронами пучка равна нулю:

$$\mathbf{E} \mathbf{u} = 0. \quad (32.5)$$

Второе уравнение (32.3) описывает продольно-поперечную волну с отличными от нуля компонентами поля  $E_x$  и  $E_z$ . Здесь  $\mathbf{E} \mathbf{u} \neq 0$ , и возможно воздействие поля на электроны пучка. Пучок может тормозиться полем волны, передавая ей часть своей энергии. Возникшая в системе флуктуационным образом волна будет нарастать во времени — система оказывается неустойчивой. Действительно, пучковые слагае-

мые в уравнении (32.3) наиболее существенны в области частот черенковского резонанса, поэтому решения этого уравнения следует искать в виде

$$\omega = k_z u + \delta,$$

где  $\delta \ll \omega$ .

В результате находим:

при  $\omega^2 \approx k_z^2 u^2 \neq \omega_{Le}^2$

$$\delta^2 = \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{1 - \omega_{Le}^2 k_z^2 u^2} \left[ 1 + \frac{k_{\perp}^2}{k_z^2} \cdot \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^2}{k^2 c^2 - k_z^2 u^2 + \omega_{Le}^2} \right]; \quad (32.6)$$

при  $\omega^2 \approx k_z^2 u^2 \approx \omega_{Le}^2$

$$\delta_{1,2} = \frac{-1 \pm i \sqrt{3}}{2} \omega_{Le} \left( \frac{N_b}{2N_p} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{k_{\perp}^2 + k_z^2 \gamma^{-2}}{k^2} \right)^{1/3}, \quad (32.6a)$$

$$\delta_3 = \omega_{Le} \left( \frac{N_b}{2N_p} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{k_{\perp}^2 + k_z^2 \gamma^{-2}}{k^2} \right)^{1/3}.$$

Из соотношений (32.6) и (32.6a) видно, что колебания с частотой  $\omega \approx k_z u$  неустойчивы ( $\text{Im } \omega = \text{Im } \delta > 0$ ) и нарастают во времени, если  $k_z u \leq \omega_{Le}$ . В отсутствие резонанса,  $\omega \approx k_z u \neq \omega_{Le}$ , инкремент нарастания  $\text{Im } \delta \approx (N_b/N_p)^{1/2}$ , для резонансной же неустойчивости, когда  $\omega \approx k_z u \approx \omega_{Le}$ , инкремент нарастания значительно больше:  $\text{Im } \delta \approx (N_b/N_p)^{1/3}$ . Это и понятно, поскольку при резонансе скорость пучка совпадает с фазовой скоростью собственных колебаний плазмы, а именно со скоростью продольных волн. Действительно, в резонансном случае происходит возбуждение чисто продольных волн релятивистским пучком, в чем легко убедиться, записав дисперсионное уравнение продольных волн в отсутствие магнитного поля:

$$\epsilon = \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} \cdot \frac{k_z^2 + k_{\perp}^2 \gamma^2}{k^2} = 0. \quad (32.7)$$

В отсутствие пучка ( $\omega_b = 0$ ) уравнение (32.7) описывает электронные ленгмюровские колебания плазмы. На пересечении спектра этих колебаний с частотой, соответствующей условию черенковского резонанса (рис. 18), происходит сильное взаимодействие электронного пучка с плазмой и возбуждение колебаний. Именно в этих условиях решения уравнения (32.7) в точности совпадают с (32.6a).

Таким образом, при взаимодействии электронного пучка малой плотности с изотропной плазмой в условиях черенковского резонанса происходит резонансное возбуждение продольных волн в плазме. Заметим, что поперечные электромагнитные волны в изотропной плазме возбуждаться не могут, поскольку их фазовая скорость, как было показано в гл. IV, всегда больше скорости света и электронный пучок с ними резонансно взаимодействовать не может. Кроме того, согласно (32.6a) для

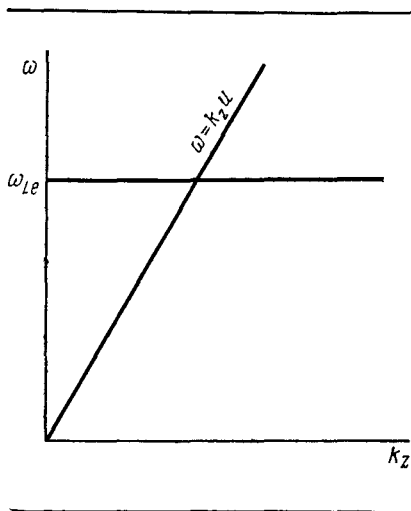


Рис. 18

неустойчивого корня дисперсионного уравнения  $\text{Re } \delta_1 < 0$ . Это означает, что  $u > \omega/k_z$ , т. е. электроны пучка догоняют волну, передавая часть своей кинетической энергии полю. Амплитуда поля при этом растет, возрастает и его энергия, поскольку возбуждаемая пучком продольная волна в случае изотропной плазмы является волной с положительной энергией:

$$|E^l|^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon^l = |E^l|^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \times \left[ \omega \left( 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \right) \right] > 0. \quad (32.8)$$

Рассмотренная черенковская неустойчивость электронного пучка в плазме имеет место и при наличии внешнего продольного магнитного

поля. Если магнитное поле слабое, так что  $|\delta| > \Omega_e \gamma^{-1}$ , то в выражениях (32.1) им можно пренебречь, и справедливыми окажутся все полученные формулы. Если же магнитное поле сильное и  $\Omega_e \gg \omega_{Le}$ , то в формулах (32.1) можно перейти к пределу бесконечного магнитного поля. При этом из (30.1) получим два уравнения:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0, \quad (32.9)$$

$$k_{\perp}^2 + \left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} \right) = 0.$$

Первое из них описывает чисто поперечную волну ( $\mathbf{E} \parallel 0y$ ) с фазовой скоростью  $\omega/k_z > c$ ; с ней пучок вообще не взаимодействует. Второе же уравнение описывает продольно-поперечные волны с отличными от нуля компонентами поля  $E_x$  и  $E_z$  и поэтому взаимодействующие с пучком. В отсутствие пучка это уравнение дает две ветви колебаний:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ \omega_{Le}^2 + k^2 c^2 \pm \sqrt{(\omega_{Le}^2 + k^2 c^2)^2 - 4\omega_{Le}^2 k_z^2 c^2} \right], \quad (32.10)$$

соответствующие быстрой и медленной волнам. Электронный пучок резонансно может взаимодействовать лишь с медленной волной (рис. 19) и то при условии

$$\omega_{Le}^2 - k_{\perp}^2 u^2 \gamma^2 > 0. \quad (32.11)$$

Решение второго уравнения (32.9), соответствующее нарастающим во времени колебаниям, при этом имеет вид



$$\omega = k_z u + \delta,$$

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 - k_{\perp}^2 u^2 \gamma^2, \quad (32.12)$$

$$\delta = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\omega}{\gamma} \left( \frac{N_b}{2N_p} \right)^{1/3} \times \\ \times \left[ 1 + \frac{k_{\perp}^2 u^2}{\omega_p^2} \gamma^2 (\gamma^2 - 1) \right]^{-1/3}.$$

В этом случае также  $\text{Re } \delta < 0$ , поэтому  $u > \omega/k_z$  и электроны пучка, догоняя волну, передают ей часть своей энергии. Для нерелятивистского пучка, когда  $\gamma \rightarrow 1$ , возбуждаемая волна с большой степенью точности является квазипродольной (потенциальной), а с ростом  $\gamma$  становится сильно непотенциальной.

В заключение обсудим вопрос о роли теплового движения электронов плазмы и пучка в развитии черенковской неустойчивости. Ранее тепловым движением частиц было полностью пренебрежено. Поэтому полученные формулы справедливы в условиях, когда фазовые скорости волн в лабораторной системе координат больше тепловых скоростей электронов плазмы, а в собственной системе координат пучка — больше разброса электронов пучка по скоростям:

$$\frac{\omega}{k_z} \approx u \gg v_{Te}, \quad \frac{\omega'}{k'_z u} \approx \frac{\delta \gamma^2}{\omega} \gg \frac{v_{Tb}}{u}. \quad (32.13)$$

Здесь  $v_{Te}$  — тепловая скорость электронов плазмы, а  $v_{Tb}$  — нерелятивистский разброс электронов пучка по скоростям в собственной системе координат.

Чтобы более строго обосновать условия (32.13), а также выяснить, как видоизменяется черенковская пучковая неустойчивость при их нарушении, рассмотрим взаимодействие пучка с плазмой при учете теплового движения частиц. Для упрощения ограничимся продольными волнами, возбуждаемыми пучком и распространяющимися строго вдоль направленной скорости пучка (и магнитного поля). Тогда дисперсионное уравнение колебаний электронной плазма-пучковой системы имеет вид

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left[ 1 - J_+ \left( \frac{\omega}{k v_{Te}} \right) \right] - \\ - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1}}{k'^2 v_{Tb}^2} \left[ 1 - J_+ \left( \frac{\omega'}{k' v_{Tb}} \right) \right] = 0. \quad (32.14)$$

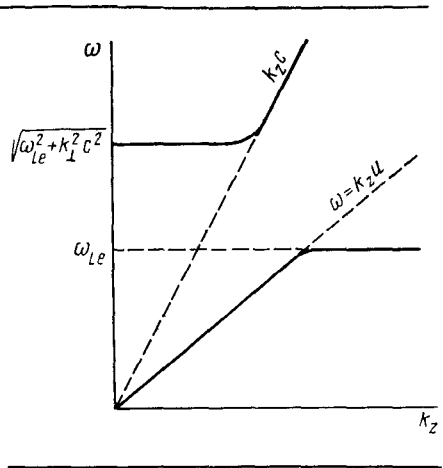


Рис. 19

Отсюда видно, что неравенства (32.13) действительно представляют собой условия пренебрежения тепловым движением частиц в системе при развитии черенковской неустойчивости (при этом  $k' = k \gamma^{-1}$ ). В этих условиях уравнение (32.14) сводится к виду

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2} = 0, \quad (32.15)$$

причем оно совпадает с дисперсионным уравнением для продольных волн (32.7) при  $k_{\perp} = 0$ .

Рассмотренную черенковскую пучковую неустойчивость при полном пренебрежении тепловым движением частиц часто называют также *гидродинамической*, подчеркивая тем самым, что она является недиссипативной и может быть описана в рамках гидродинамики холодной плазмы. Как было показано, такая неустойчивость развивается при  $\mathbf{k}\mathbf{u} \leq \omega_{Le}$ . Покажем, что при учете теплового движения частиц появляется черенковская неустойчивость и в области  $\mathbf{k}\mathbf{u} > \omega_{Le}$ . В отличие от гидродинамической пучковой неустойчивости неустойчивость при  $\mathbf{k}\mathbf{u} > \omega_{Le}$  является диссипативной, обусловленной изменением знака черенковского затухания волн в плазме, и поэтому называется *кинетической*. В этих условиях вкладом пучка в действительную часть продольной диэлектрической проницаемости можно пренебречь и записать уравнение (32.14) следующим образом:

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left( 1 + 3 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{Le}^2 \omega}{k^3 v_{Te}^3} \exp \left[ - \frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2} \right] + \\ + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_b^2 (\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}) \gamma^3}{k^3 v_{Tb}^3} \exp \left[ - \frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2 \gamma^4}{2k^2 v_{Tb}^2} \right] = 0 \quad (32.16)$$

с решением ( $\omega \rightarrow \omega + \delta$ )

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 + 3k^2 v_{Te}^2, \\ \delta = -i \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_{Le}^2 \left[ \frac{\omega_b^2 \gamma^3}{k^3 v_{Tb}^3} \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{u}}{\omega_{Le}} \right) \exp \left( - \frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2 \gamma^4}{2k^2 v_{Tb}^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\omega_{Le}^2}{k^3 v_{Te}^3} \exp \left( - \frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2} \right) \right]. \quad (32.17)$$

Видно, что при  $\text{Im} \delta > 0$  в системе возникает неустойчивость, которая возможна в области  $\mathbf{k}\mathbf{u} > \omega_{Le}$  и обусловлена изменением знака затухания Ландау на электронах пучка при выполнении черенковского условия  $u > \omega/k \approx \omega_{Le}/k$ . Следует отметить, что кинетическая пучковая неустойчивость, так же как и гидродинамическая неустой-

чивость, обладает вблизи частоты черенковского резонанса  $\omega \approx \omega_{Le} \approx \approx k u$  максимальным инкрементом нарастания, величина которого падает с удалением от резонансной частоты.

На рис. 20 приведена зависимость инкремента нарастания черенковской пучковой неустойчивости от величины  $ku$ ; виден постепенный переход гидродинамической неустойчивости (нарастающая ветвь) к кинетической неустойчивости (спадающая ветвь).

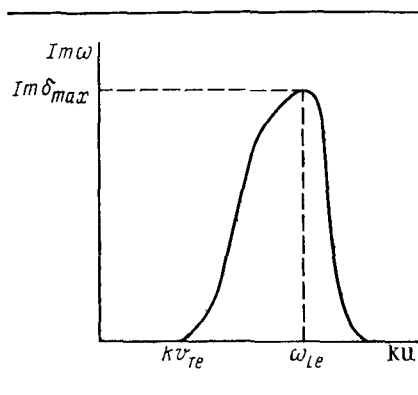


Рис. 20

### § 33. Взаимодействие вращающегося электронного пучка (потока осцилляторов) с плазмой. Циклотронная неустойчивость

В § 32 отмечалось, что сильное взаимодействие электронного пучка с плазмой имеет место при выполнении черенковского либо циклотронного резонанса. В случае прямолинейного пучка преобладающим является черенковское взаимодействие, поскольку в компонентах тензора диэлектрической проницаемости пучка (32.1) ему соответствуют полюсы второго порядка, в то время как циклотронное взаимодействие представлено полюсами первого порядка. Покажем, что при наличии у электронов пучка наряду с продольной также поперечной к внешнему магнитному полю компоненты направленной скорости циклотронное взаимодействие становится столь же сильным, как и черенковское.

Из условия резонанса (32.2) видно, что при циклотронном взаимодействии не накладывается каких-либо ограничений на фазовую скорость волн; она может быть как больше, так и меньше скорости пучка. Важным является лишь соотношение между циклотронной частотой вращения электронов во внешнем магнитном поле и частотой электромагнитной волны. Поэтому, чтобы нагляднее пояснить механизм циклотронного взаимодействия, рассмотрим электромагнитные возмущения в системе вращающийся пучок — плазма, распространяющиеся строго поперек магнитного поля, полагая  $k_z \equiv 0$  и тем самым исключая черенковский резонанс. Для простоты ограничимся рассмотрением моноэнергетического вращающегося пучка, взаимодействующего с холодной электронной плазмой. Тогда диэлектрическая проницаемость плазма-пучковой системы имеет вид:

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon_{ij}^{(0)}(\omega) + \delta\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}), \quad (33.1)$$

где  $\epsilon_{ij}^{(0)}(\omega)$  — диэлектрическая проницаемость холодной электрон-

ной плазмы (см. § 24):

$$\varepsilon_{ij}^{(0)}(\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp 0} & ig_0 & 0 \\ -ig_0 & \varepsilon_{\perp 0} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel 0} \end{pmatrix}, \quad (33.2)$$

$$\text{где } \varepsilon_{\perp 0} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}, \quad g_0 = -\frac{\omega_{Le}^2 \Omega_e}{\omega(\omega^2 - \Omega_e^2)}, \quad \varepsilon_{\parallel 0} = 1 - \omega_{Le}^2/\omega^2,$$

а  $\delta\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  — поправка, обусловленная наличием электронного пучка.

Для вычисления  $\delta\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  уже нельзя воспользоваться формулами преобразования (30.17) и (30.18), поскольку здесь электроны пучка, кроме поступательной скорости, обладают еще и скоростью вращения, и для получения формул преобразования необходимо было бы перейти во вращающуюся систему координат. В этом случае удобнее вычислить  $\delta\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  с помощью формул (30.7) и (30.8), подставляя в качестве равновесной функции распределения электронов пучка функцию (30.11):

$$f_{0b} = \frac{N_b}{2\pi p_{\perp 0}} \delta(p_{\perp} - p_{\perp 0}) \delta(p_{\parallel} - p_{\parallel 0}). \quad (33.3)$$

В результате несложных вычислений для возмущений с  $k_z = 0$

$$\delta\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega_b^2}{\omega^2 \gamma} \left[ \frac{1}{\gamma_{\parallel}^2} \delta_{iz} \delta_{jz} - \sum_{n \neq 0} \left( \frac{\alpha_{ij}}{1 - \frac{\omega \gamma}{n \Omega_e}} + \frac{\beta_{ij}}{\left(1 - \frac{\omega \gamma}{n \Omega_e}\right)^2} \right) \right], \quad (33.4)$$

$$p_0 = m \gamma u, \quad \gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}, \quad \gamma_{\parallel} = (1 - u_{\parallel}^2/c^2)^{-1/2}, \quad z = \frac{ku_{\perp}}{\Omega_e} \gamma,$$

$$\alpha_{xx} = \left(2 + z \frac{d}{dz}\right) \left(\frac{n}{z} J_n(z)\right)^2, \quad \beta_{xx} = \frac{u_{\perp}^2}{c^2} \cdot \frac{n^2}{z^2} J_n^2(z), \quad (33.5)$$

$$\alpha_{yy} = \left(2 + z \frac{d}{dz}\right) (J'_n(z))^2, \quad \beta_{yy} = \frac{u_{\perp}^2}{c^2} J_n'^2(z),$$

$$\alpha_{zz} = \frac{u_{\parallel}^2}{u_{\perp}^2} z \frac{d}{dz} (J_n(z))^2, \quad \beta_{zz} = \frac{u_{\parallel}^2}{c^2} J_n^2(z),$$

$$\alpha_{xy} = -\alpha_{yx} = i \left(2 + z \frac{d}{dz}\right) \left(\frac{n}{z} J_n(z) J'_n(z)\right),$$

$$\beta_{xy} = -\beta_{yx} = i \frac{u_{\perp}^2}{c^2} \cdot \frac{n}{z} J_n(z) J'_n(z).$$

Из выражения (33.4) видно, что при  $u_{\perp} \neq 0$  пучковые слагаемые компонент тензора диэлектрической проницаемости имеют полюсы второго порядка при  $\omega = \frac{n \Omega_e}{\gamma}$ . Это означает, что в этой области частот

пучок сильно взаимодействует с электромагнитной волной. Чтобы убедиться в этом, проанализируем дисперсионное уравнение (30.1) для электромагнитных волн, распространяющихся поперек магнитного поля. В рассматриваемом случае это уравнение распадается на два уравнения:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + \epsilon_{xy}^2}{\epsilon_{xx}}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{zz}, \quad (33.6)$$

описывающие соответственно необыкновенную и обыкновенную волны. Здесь

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{\perp 0} + \delta\epsilon_{xx}, \quad \epsilon_{xy} = i g_0 + \delta\epsilon_{xy}, \quad (33.7)$$

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{\perp 0} + \delta\epsilon_{yy}, \quad \epsilon_{zz} = \epsilon_{\parallel 0} + \delta\epsilon_{zz}.$$

Электрическое поле необыкновенной волны перпендикулярно к внешнему магнитному полю, а обыкновенной волны — параллельно ему. Поэтому необыкновенная волна может взаимодействовать лишь с поперечной компонентой импульса электронов пучка, а обыкновенная — с продольной.

В отсутствие пучка уравнения (33.6) описывают спектры колебаний холодной магнитоактивной плазмы, распространяющихся поперек магнитного поля. В § 24 был проанализирован общий вид зависимости частот таких колебаний от волнового вектора  $k$ . Для чисто электронных колебаний эту зависимость нетрудно найти и аналитически:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ \Omega_e^2 + 2\omega_{Le}^2 + k^2 c^2 \pm \sqrt{4\omega_{Le}^2 \Omega_e^2 + (k^2 c^2 - \Omega_e^2)^2} \right], \quad (33.8)$$

$$\omega_3 = k^2 c^2 + \omega_{Le}^2.$$

Частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответствуют двум ветвям необыкновенной волны, а частота  $\omega_3$  — обыкновенной волне. Пересечения линий  $\omega_\alpha(k)$  (где  $\alpha = 1, 2, 3$ ) с линией  $\omega = \frac{n\Omega_e}{\gamma}$  определяют области резонансного циклотронного взаимодействия вращающегося электронного пучка с указанными колебаниями плазмы (рис. 21). Из рисунка видно:

в условиях

$$\frac{n\Omega_e}{\gamma} < \omega_3(0) \quad (33.9)$$

циклотронный резонанс невозможен;

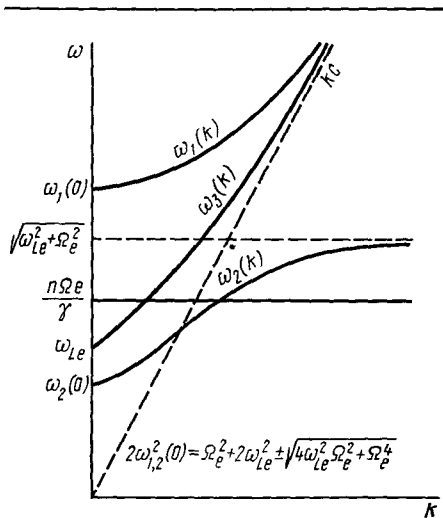


Рис. 21

В условиях

$$\omega_2(0) < \frac{n\Omega_e}{\gamma} < \omega_{Le} \quad (33.9a)$$

возможно резонансное взаимодействие пучка с нижней ветвью необыкновенной волны;

В условиях

$$\omega_{Le} < \frac{n\Omega_e}{\gamma} < \sqrt{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2} \quad (33.9б)$$

возможно резонансное взаимодействие пучка с нижней ветвью необыкновенной волны и с обыкновенной волной;

В условиях

$$\sqrt{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2} < \frac{n\Omega_e}{\gamma} < \omega_1(0) \quad (33.9в)$$

возможно резонансное взаимодействие пучка только с обыкновенной волной;

В условиях

$$\frac{n\Omega_e}{\gamma} > \omega_1(0) \quad (33.9г)$$

возможно резонансное взаимодействие пучка с обыкновенной волной и верхней ветвью необыкновенной волны.

Указанные условия определяют лишь возможность резонансного взаимодействия вращающегося пучка с собственными электромагнитными волнами холодной плазмы. О том, какие из этих волн будут возбуждаться пучком, можно судить, определив инкременты их нарастания. Для этого нужно решать уравнения (33.6) с учетом пучковых слагаемых в компонентах тензора диэлектрической проницаемости и условия резонансного взаимодействия  $\omega = \frac{n\Omega_e}{\gamma}$ . При определении инкрементов нарастания волн мы упростим задачу, а именно рассмотрим предел редкой плазмы  $\Omega_e \gg \omega_{Le}$ . В § 32 было показано, что черенковское возбуждение волн прямолинейным пучком в такой плазме возможно при условии, когда плотность плазмы превышает некоторое критическое значение, хотя и сколь угодно малое для неограниченной в пространстве плазмы [см. условие (32.11)]. Это было обусловлено требованием существования в плазме волны с фазовой скоростью, меньшей скорости света, которая могла бы находиться в черенковском резонансе с электронами пучка. В случае циклотронного резонанса это требование отпадает, поэтому отсутствует и необходимость наличия плазмы: циклотронный резонанс возможен и при полном ее отсутствии. Тогда уравнения (33.6) существенно упрощаются:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 + \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1}}{\omega^2} \cdot \frac{u_{\perp}^2}{c^2} \cdot \frac{J_n'^2 \left( \frac{ku_{\perp}}{\Omega_e} \gamma \right)}{\left( 1 - \frac{\omega \gamma}{n\Omega_e} \right)^2} \right], \quad (33.10)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 + \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1}}{\omega^2} \cdot \frac{u_{\parallel}^2}{c^2} \cdot \frac{J_n^2 \left( \frac{ku_{\perp} \gamma}{\Omega_e} \right)}{\left( 1 - \frac{\omega \gamma}{n \Omega_e} \right)^2} \right].$$

В этих уравнениях полностью пренебрежено плазменными слагаемыми в компонентах тензора диэлектрической проницаемости системы, а из пучковых слагаемых учтены только члены с полюсом второго порядка (для циклотронного резонанса).

Теперь можно легко решить уравнения (33.10), найдя частоты возбуждаемых пучком электромагнитных волн и инкременты их нарастания:

$$\omega \rightarrow \omega + i\delta = \frac{n\Omega_e}{\gamma} + i\delta. \quad (33.11)$$

В рассматриваемом приближении частоты необыкновенной и обыкновенной волн совпадают:

$$\omega = \frac{n\Omega_e}{\gamma} = kc, \quad (33.12)$$

а инкременты их нарастания соответственно равны:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{\text{необ}}}{\omega} &= \frac{-i + \sqrt{3}}{2} \left[ \frac{\omega_b^2 \gamma}{2n^2 \Omega_e^2} \cdot \frac{u_{\perp}^2}{c^2} J_n'^2 \left( \frac{nu_{\perp}}{c} \right) \right]^{1/3}, \\ \frac{\delta_{\text{об}}}{\omega} &= \frac{-i + \sqrt{3}}{2} \left[ \frac{\omega_b^2 \gamma}{2n^2 \Omega_e^2} \cdot \frac{u_{\parallel}^2}{c^2} J_n^2 \left( \frac{nu_{\perp}}{c} \right) \right]^{1/3}. \end{aligned} \quad (33.13)$$

Из этих выражений видно, что инкременты нарастания необыкновенной и обыкновенной волн отличны от нуля лишь при наличии поперечной компоненты скорости электронов  $u_{\perp} \neq 0$ , причем с ростом  $u_{\perp}$  инкременты увеличиваются. Для существования ненулевого инкремента нарастания обыкновенной волны необходимо наличие также продольной компоненты скорости электронов  $u_{\parallel} \neq 0$ . Следует отметить, что инкременты нарастания максимальны на низших циклотронных гармониках  $n$ , особенно при нерелятивистских значениях поперечной компоненты скорости электронов, когда  $u_{\perp} \ll c$ .

Выше была исследована циклотронная неустойчивость вращающегося пучка в отсутствие плазмы. Наличие плазмы затрудняет развитие такой неустойчивости, и при плотностях

$$\omega_{L_e}^2 > \frac{n^2 \Omega_e^2}{\gamma^2} \left( 1 + \frac{\gamma}{n} \right) \quad (33.14)$$

она становится невозможной. Это обусловлено тем, что циклотронная частота излучения вращающихся электронов  $\frac{n\Omega_e}{\gamma}$  экранируется плазмой, т. е. перестает быть собственной частотой системы.

Наконец, заметим, что рассмотренная неустойчивость является гидродинамической в том смысле, что она не связана с диссипативными процессами в системе и проявляется при полном пренебрежении тепловым разбросом скоростей электронов пучка. Учет последнего может привести к развитию в системе слабой кинетической циклотронной неустойчивости (см. задачу 6 данной главы).

## Задачи к главе VI

**Задача 1.** Пусть с момента времени  $t = 0$  в пространственно неограниченную изотропную плазму в плоскости  $z = 0$  инжектируются релятивистский электронный пучок с радиусом  $r_0$  и скоростью  $\mathbf{u} \parallel Oz$ . Найти индуцированные в плазме заряд и ток. Плазму считать бесстолкновительной.

**Решение.** Плотность заряда пучка

$$\rho_0 = eN_0\eta (r_0 - r) [\eta(z) - \eta(z - ut)], \quad (1)$$

где  $\eta(x) = 1$  при  $x > 0$  и  $\eta(x) = 0$  при  $x < 0$ . Плотность тока пучка

$$\mathbf{j}_0 = \rho_0 \mathbf{u}. \quad (2)$$

Индуцированные в плазме заряд  $\rho$  и ток  $\mathbf{j}$  удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\partial\rho_0/\partial t + \operatorname{div} \mathbf{j}_0 = \partial\rho/\partial t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (3)$$

Это означает, что в объеме плазмы не происходит рождения и гибели электронов.

Диэлектрическую проницаемость плазмы представим в виде

$$\epsilon_{ij}(\omega) = \epsilon(\omega) \delta_{ij} = \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right) \delta_{ij}. \quad (4)$$

Для решения системы уравнений поля

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \cdot \frac{d\mathbf{E}}{dt} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_0), \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi (\rho + \rho_0) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

воспользуемся преобразованием Фурье — Лапласа

$$A(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty + i\delta}^{\infty + i\delta} d\omega e^{-i\omega t} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} A(\mathbf{k}, \omega), \quad (6)$$

$$A(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} A(\mathbf{r}, t)$$

и материальными уравнениями для изотропной плазмы

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) &= \sigma \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{[\epsilon(\omega) - 1] \omega}{4\pi i} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}), \\ \rho(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{\mathbf{k}\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k})}{\omega}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из уравнений (5) при этом легко находим Фурье-образ индуцированного в плазме электрического поля:



$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{4\pi i}{\omega} \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mathbf{j}_0(\omega, \mathbf{k}) - \mathbf{k} (k j_0(\omega, \mathbf{k})) \right] \times \\ &\times \left[ \varepsilon(\omega) \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\mathbf{j}_0(\omega, \mathbf{k})$  — Фурье-образ тока пучка:

$$\mathbf{j}_0(\omega, \mathbf{k}) = - \frac{e N_b r_0 \mathbf{u} J_1(k_{\perp} r_0)}{(2\pi)^2 k_{\perp} k_z (\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})}. \quad (9)$$

Подстановка (8) и (7) в формулы обратного преобразования Фурье (6) решает поставленную задачу, т. е. определяет индуцированные в плазме заряд и ток в любой момент времени и в любой точке пространства. Проанализируем эти интегральные выражения в асимптотическом пределе при больших значениях времени  $t$  и координаты  $z$ , когда все переходные процессы затухают и функции  $\rho(t, r)$  и  $\mathbf{j}(t, r)$  становятся функциями  $t' = t - z/u$ . Согласно теореме Лапласа, для таких асимптотических значений имеем

$$A_{\infty}(t, r) = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ z \rightarrow \infty}} A(t, r) = -i \int dk \lim_{\omega \rightarrow \mathbf{k}\mathbf{u}} (\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}) A(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (10)$$

Учитывая это соотношение, находим

$$\begin{aligned} \rho_{\infty}(t, r) &= \frac{ie N_b r_0}{2\pi} \int_0^{\infty} dk_{\perp} J_1(k_{\perp} r_0) J_0(k_{\perp} r) \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{e^{ik_z(z-ut)}}{k_z \varepsilon(k_z u)} - \rho_0, \\ \mathbf{j}_{\infty}(t, r) &= \frac{i\omega_{Le}^2 r_0 e N_b}{2\pi} \int_0^{\infty} dk_{\perp} J_1(k_{\perp} r_0) \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{e^{ik_z(z-ut)}}{k_z u \varepsilon \left( k^2 - \frac{k_z^2 u^2}{c^2} \varepsilon \right)} \times \\ &\times \left[ i \frac{k_{\perp}}{k} J_1(k_{\perp} r) \mathbf{e}_r + \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \varepsilon \right) J_0(k_{\perp} r) \mathbf{e}_z \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Интегралы (11) определяются полюсами подынтегральных выражений

$$k_{z1,2} = \pm \frac{\omega_{Le}}{u}, \quad k_{z3,4} = \pm i\gamma \sqrt{k_{\perp}^2 + \frac{\omega_{Le}^2}{c^2}}. \quad (12)$$

Первые два корня соответствуют продольным колебаниям изотропной плазмы при  $\omega = k_z u$ , а последующие два — поперечным колебаниям.

Естественно, наибольший интерес представляет значения  $\rho_{\infty}$  и  $\mathbf{j}_{\infty}$  за фронтом пучка, на достаточно большом удалении от него  $z' = z - ut \gg \frac{c}{\gamma\omega_p}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \rho_{\infty} &= e N_b \gamma (r_0 - r) \left( \cos \frac{\omega_{Le}}{u} z' - 1 \right), \\ j_{z\infty} &= e N_b u \frac{\omega_{Le}^2 r_0}{u^2} \left[ \Psi_{00}(u) \cos \frac{\omega_{Le} z'}{u} - \frac{u^2}{c^2} T_{00}(c) \right], \\ j_{r\infty} &= -e N_b u \frac{\omega_{Le}^2 r_0}{u^2} \Psi_{11}(u) \frac{u}{\omega_{Le}} \sin \frac{\omega_{Le} z'}{u}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\Psi_{nm}(u) = \int_0^{\infty} dk_{\perp} k_{\perp}^m \frac{J_n(k_{\perp} r) J_0(k_{\perp} r_0)}{k_{\perp}^2 + \omega_{Le}^2/u^2}, \quad (14)$$

$$T_{00}(c) = \int_0^{\infty} dk_{\perp} \frac{J_0(k_{\perp} r) J_1(k_{\perp} r_0)}{k_{\perp}^2 + \omega_{Le}^2/c^2}.$$

Из (13) видно, что ток  $j_{r\infty}$  является быстро осциллирующей функцией  $z'$  и при усреднении обращается в нуль. Усредненный индуцированный заряд в точности равен по величине и противоположен по знаку заряду пучка, так что полный заряд в плазме отсутствует — имеется усредненная зарядовая нейтрализация пучка. Индуцированный ток  $j_{z\infty}$  при малой плотности плазмы, когда  $\alpha = \omega_{Le}^2 \frac{r_0^2}{c^2} \ll 1$ , мал по сравнению с током пучка и составляет от него  $\alpha$ -ю часть. В случае же плотной плазмы, когда  $\alpha \gg 1$ , ток  $j_{z\infty}$  по величине порядка тока пучка, а усредненная его часть с точностью до членов  $1/\alpha$  равна по величине и противоположна по знаку току пучка. Таким образом, в отличие от зарядовой нейтрализации, которая имеет место уже при плотностях плазмы, превышающих плотность пучка, токовая нейтрализация пучка происходит лишь в плотной плазме, в которой  $\omega_{Le}^2 \gg c^2/r_0^2$ .

**Задача 2.** Исходя из уравнения (32.3) показать, что в плазма-пучковой системе в отсутствие внешнего магнитного поля возможна желобковая неустойчивость с  $k_z = 0$ , соответствующая расслоению электронного пучка на отдельные токонесящие нити.

**Решение.** Для желобковых мод с  $k_z = 0$  из уравнения (32.3) получаем

$$\left(k_{\perp}^2 c^2 - \omega^2 + \omega_{Le}^2\right) \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right) - \frac{k_{\perp}^2 u^2}{\omega^2} \cdot \frac{\omega_{Le}^2 \omega_b^2 \gamma^{-1}}{\omega^2} = 0. \quad (1)$$

Отсюда в пределе  $\omega^2 \ll \omega_{Le}^2$  находим

$$\omega^2 = - \frac{k_{\perp}^2 u^2}{k_{\perp}^2 c^2 + \omega_{Le}^2} \omega_b^2 \gamma^{-1}. \quad (2)$$

Поскольку  $\omega^2 < 0$ , неустойчивость аperiodическая, она соответствует расслоению электронного пучка на отдельные токонесящие нити. Максимальным инкрементом нарастания обладают моды с  $k_{\perp} > \omega_{Le}/c$ . Это означает, что наиболее вероятно расслоение пучка на нити с радиусом  $r_0 < c/\omega_{Le}$ . Заметим, что уравнение (32.9) неустойчивых решений с  $k_z = 0$  не имеет, т. е. сильное магнитное поле стабилизирует желобковую неустойчивость.

**Задача 3.** Исследовать взаимодействие прямолинейного релятивистского электронного пучка малой плотности с высокочастотными электростатическими колебаниями холодной магнитоактивной плазмы.

**Решение.** Дисперсионное уравнение, описывающее взаимодействие прямолинейного релятивистского пучка с продольными электронными колебаниями магнитоактивной плазмы, записывается в виде

$$\frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_z^2}{k^2} \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right) + \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}\right) - \frac{k_z^2}{k^2} \cdot \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} -$$

$$- \frac{k_{\perp}^2 \omega_b^2 \gamma^{-1}}{(\omega - k_z u)^2 - \Omega_e^2 \gamma^{-2}} = 0. \quad (1)$$

Отсюда находим спектры частот собственных продольных колебаний плазмы в отсутствие пучка:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ \omega_{Le}^2 + \Omega_e^2 \pm \sqrt{(\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2)^2 - 4 \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2 + k_z^2} \omega_{Le}^2 \Omega_e^2} \right]. \quad (2)$$

На рис. 22 приведены спектральные кривые  $\omega_{1,2}(k_z)$ . Здесь же приведены прямые

$$\omega = k_z u, \quad \omega = k_z u \pm \Omega_e / \gamma, \quad (3)$$

соответствующие черенковскому и циклотронному взаимодействиям пучка с колебаниями плазмы. На пересечении этих прямых со спектральными кривыми  $\omega_{1,2}(k_z)$  возникает наиболее сильное резонансное взаимодействие пучка с плазмой и возможно развитие черенковской и циклотронной неустойчивостей. Из рис. 22 видно, что прямая  $\omega = k_z u$  —  $-\Omega_e / \gamma$  пересекает обе ветви продольных волн, прямая  $\omega = k_z u$  всегда пересекает верхнюю ветвь, а при  $k_{\perp} u < \min(\omega_{Le}, \Omega_e)$  — также нижнюю ветвь; прямая  $\omega = k_z u + \Omega_e / \gamma$  пересекает только верхнюю ветвь.

Простые формулы для частот и инкрементов нарастания колебаний удается получить в предельных случаях плотной ( $\omega_{Le}^2 \gg \Omega_e^2$ ) и разреженной ( $\Omega_e^2 \gg \omega_{Le}^2$ ) плазмы.

В плотной плазме при развитии черенковской неустойчивости ( $\omega = k_z u + i\delta$ ) происходит преимущественное возбуждение верхней лангмюровской ветви колебаний со спектром

$$\omega \approx \omega_{Le}, \quad \frac{\delta}{\omega} \approx \frac{i + \sqrt{3}}{2\gamma} \left( \frac{N_b}{2N_p} \right)^{1/3} \left[ 1 + \frac{k_{\perp}^2 u^2}{\omega_{Le}^2} \right]^{-1/3}. \quad (4)$$

Циклотронная неустойчивость ( $\omega = k_z u \pm \Omega_e / \gamma + i\delta$ ) в этих условиях также возбуждает преимущественно верхнюю ветвь колебаний, причем

$$\omega \approx \omega_{Le}, \quad \frac{\delta}{\omega} = \frac{1}{2} \left( \frac{N_b}{N_p} \cdot \frac{\omega_{Le}}{\Omega_e} \right)^{1/2} \left[ 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k_{\perp}^2 u^2} \right]^{-1/2}. \quad (5)$$

Из сравнения (4) и (5) видно, что инкремент развития черенковской неустойчивости  $\delta \sim (N_b/N_p)^{1/3}$ , в то время как для циклотронной неустойчивости  $\delta \sim (N_b/N_p)^{1/2}$ . Тем не менее циклотронная неустойчивость может оказаться преобладающей, если

$$\frac{1}{\gamma^{1/3}} > \left( \frac{\omega_{Le}}{\Omega_e} \right)^{1/2} \left( \frac{N_b}{N_p} \right)^{1/6} > \frac{1}{\gamma}, \quad (6)$$

что возможно в случае ультрарелятивистских электронных пучков.

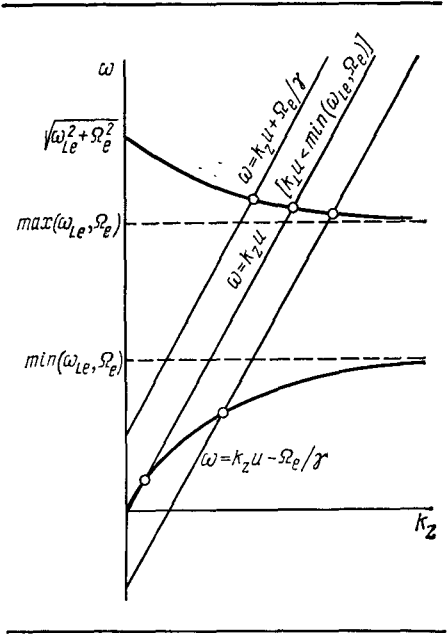


Рис. 22

В разреженной плазме при развитии черенковской неустойчивости происходит преимущественное возбуждение нижней ленгмюровской ветви продольных колебаний со спектром

$$\omega \approx \sqrt{\omega_{Le}^2 + k_{\perp}^2 u^2}, \quad \frac{\delta}{\omega} \approx \frac{i + \sqrt{3}}{2\gamma} \left( \frac{N_b}{2N_p} \right)^{1/3}. \quad (7)$$

Для циклотронной неустойчивости имеем

$$\omega \approx \omega_{Le}, \quad \frac{\delta}{\omega} \approx \frac{1}{3} \left( \frac{N_b}{6N_p} \right)^{1/2} \left( \frac{\omega_{Le}}{\Omega_e} \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Этот инкремент всегда намного меньше, чем инкремент (7), поэтому в разреженной плазме циклотронная неустойчивость вообще не может проявиться.

**Задача 4.** Исследовать взаимодействие двух встречных одинаковых плазменных пучков, движущихся параллельно внешнему магнитному полю со скоростями, намного меньшими тепловой скорости электронов.

**Решение.** Поскольку скорости движения пучков намного меньше скорости света, при исследовании их взаимодействия достаточно ограничиться анализом потенциальных (электростатических) возмущений. Дисперсионное уравнение для таких возмущений в системе двух сталкивающихся пучков записывается в виде

$$1 + \sum_{\alpha, l} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left[ 2 - \sum_s \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u} - s\Omega_{\alpha}} A_s \left( \frac{k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2} \right) J_{+} \left( \frac{\omega - \mathbf{u}\mathbf{k} - s\Omega_{\alpha}}{k_z v_{T\alpha}} \right) - \sum_s \frac{\omega + \mathbf{k}\mathbf{u}}{\omega + \mathbf{k}\mathbf{u} - s\Omega_{\alpha}} A_s \left( \frac{k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2} \right) J_{+} \left( \frac{\omega + \mathbf{k}\mathbf{u} - s\Omega_{\alpha}}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right] = 0. \quad (1)$$

Проанализируем это уравнение в двух предельных случаях: в отсутствие внешнего магнитного поля и при наличии бесконечно сильного продольного магнитного поля.

В отсутствие магнитного поля из (1) получаем

$$1 + \sum_{\alpha, l} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left[ 2 - J_{+} \left( \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}}{k v_{T\alpha}} \right) - J_{+} \left( \frac{\omega + \mathbf{k}\mathbf{u}}{k v_{T\alpha}} \right) \right] = 0. \quad (2)$$

Отсюда, в частности, следует, что в условиях  $u \ll v_{Ti}$  колебания, описываемые этим уравнением, устойчивы, более того, они затухают во времени. Это означает, что взаимодействие между пучками плазмы отсутствует. При  $v_{Ti} \ll u \ll v_{Te}$  из (2) имеем

$$1 + 2 \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left( 1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k v_{Te}} \right) - \frac{\omega_{Li}^2}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{(\omega + \mathbf{k}\mathbf{u})^2} = 0. \quad (3)$$

Пренебрегая малым мнимым слагаемым в этом уравнении, описывающим черенковское поглощение волн электронами (и членами, учитывающими поглощение на ионах, как экспоненциально малыми), находим спектр

$$\omega_{1,2}^2 = \left( 1 + 2 \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \right)^{-1} \left\{ \omega_{Li}^2 + (\mathbf{k}\mathbf{u})^2 \left( 1 + 2 \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \right) \pm \sqrt{\left[ \omega_{Li}^2 + (\mathbf{k}\mathbf{u})^2 \left( 1 + 2 \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \right) \right]^2 + 4 (\mathbf{k}\mathbf{u})^2 \left( 1 + 2 \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \right)} \right\} \times \dots$$

$$\dots \times \left[ 2\omega_{Li}^2 - (\mathbf{k}\mathbf{u})^2 \left( 1 + 2 \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \right) \right] \}. \quad (4)$$

Видно, что при условии

$$2\omega_{Li}^2 > (\mathbf{k}\mathbf{u})^2 \left( 1 + 2 \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \right) \quad (5)$$

корень  $\omega_2^2 \approx -(\mathbf{k}\mathbf{u})^2 < 0$ , т. е. колебания аperiодически неустойчивы, что соответствует сильному взаимодействию сталкивающихся пучков. Согласно (5) такое взаимодействие возможно при скоростях  $u < v_s = \sqrt{T_e/M}$ , но поскольку  $u \gg v_{Ti}$ , оно имеет место только в неизотермической плазме с  $T_e \gg T_i$ .

Указанная гидродинамическая неустойчивость сохраняется и при наличии сильного продольного магнитного поля. Так, в пределе  $B_0 \rightarrow \infty$  при  $v_{Ti} \ll u \ll v_{Te}$  из (1) получаем

$$1 + 2 \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left( 1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right) - \frac{k_z^2}{k^2} \times \\ \times \left[ \frac{\omega_{Li}^2}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2} + \frac{\omega_{Li}^2}{(\omega + \mathbf{k}\mathbf{u})^2} \right] = 0. \quad (6)$$

Из сравнения этого уравнения с (3) заключаем, что неустойчивость в случае взаимодействия сильно замагниченных плазменных пучков имеет такую же природу, как и незамагниченных. Только условие (5) немного видоизменяется:

$$2\omega_{Li}^2 > k^2 u^2 \left[ 1 + 2 \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \right] \quad (7)$$

и увеличивается инкремент нарастания неустойчивости

$$\omega_2^2 \approx -k^2 u^2.$$

**Задача 5.** Показать, что при инжекции ионов в электронный пучок возможен их захват и ускорение при резонансе продольной электронной циклотронной волны с ионной черенковской волной, т. е. при

$$\omega \approx k_z u_e - \Omega_e / \gamma \approx k_z u_i,$$

где  $u_e$  и  $u_i$  — направленные скорости электронов и ионов.

Решение. Поскольку скорость ионов мала по сравнению со скоростью света, при исследовании взаимодействия электронного и ионного пучков можно ограничиться анализом устойчивости продольных волн, описываемых дисперсионным уравнением

$$\frac{k_{\perp}^2}{k^2} \left[ 1 - \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-1}}{(\omega - k_z u_e)^2 - \Omega_e^2 / \gamma^2} \right] + \frac{k_z^2}{k^2} \left[ 1 - \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u_e)^2} \right] - \\ - \frac{\omega_{Li}^2}{(\omega - k_z u_i)^2} = 0. \quad (1)$$

При написании этого уравнения предполагалось, что  $\omega_{Li}^2 \gg \Omega_i^2$ , т. е. ионы незамагничены. Электроны же, наоборот, сильно замагничены,  $\Omega_e^2 \gg \omega_{Le}^2 \gamma$ .

Решение уравнения (1) в этих условиях можно искать в виде

$$\omega = \omega_0 + i\delta = k_z u_i + i\delta, \quad (2)$$

где  $\omega_0$  определяется из (1) в отсутствие ионного пучка:

$$\omega_0 = k_z u_e - \frac{\Omega_e}{\gamma} + \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \cdot \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-2}}{\Omega_e}. \quad (3)$$

В результате находим

$$\delta^3 = -i \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \cdot \frac{\omega_{Le}^2 \omega_{Li}^2}{2\Omega_e}. \quad (4)$$

Неустойчивым колебаниям соответствует следующее решение этого уравнения:

$$\delta_1 = \frac{\sqrt{3} - i}{2} \left( \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \cdot \frac{\omega_{Le}^2 \omega_{Li}^2}{2\Omega_e} \right)^{1/3}. \quad (5)$$

Поскольку  $\text{Im } \delta_1 < 0$ , фазовая скорость волны оказывается больше скорости ионов, поэтому волна ускоряет ионы, догоняя их. Ионы получают энергию от волны, амплитуда которой растет во времени с инкрементом  $\text{Re } \delta_1 > 0$ . Энергия волны при этом, однако, уменьшается, так как в рассматриваемых условиях ( $\omega = \omega_0 < k_z u_e$ ) энергия циклотронной волны в пучке отрицательна:

$$|E|^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon(\omega) \Big|_{\omega=\omega_0} \approx 2 |E|^2 \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \cdot \frac{\omega(\omega_0 - k_z u_e) \omega_{Le}^2 \gamma^{-1}}{[(\omega_0 - k_z u_e)^2 - \Omega_e^2/\gamma^2]^2} < 0. \quad (6)$$

**Задача 6.** Исследовать возбуждение обыкновенной электромагнитной волны, распространяющейся поперек магнитного поля в плазме, вращающимся электронным пучком с учетом теплового разброса электронов по скоростям.

**Решение.** Дисперсионное уравнение для обыкновенной волны, распространяющейся поперек магнитного поля, имеет вид [см. (33.6)]

$$k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_{iz} = 0. \quad (1)$$

Вклад в  $\varepsilon_{zz}$ , обусловленный вращающимся пучком с учетом теплового разброса по скоростям, т. е. пучком с функцией распределения (30.9), вычисляются по формулам (30.7), (30.8):

$$\delta \varepsilon_{zz} = - \frac{\omega_b^2}{\omega^2 \gamma} \left[ \frac{1}{\gamma_{\parallel}^2} - \sum_n' \left( \alpha_{zz} - \beta_{zz} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{J_n \left( \frac{x}{a} \right)}{x} \right], \quad (2)$$

где

$$\alpha_{zz} = \left( 2 + z \frac{d}{dz} \right) \left( \frac{n}{z} J_n(z) \right)^2; \quad \beta_{zz} = \frac{u_{\parallel}^2}{c^2} J_n^2; \quad (3)$$

$$x = 1 - \omega \gamma / n \Omega_e; \quad a = \frac{v_{Tb} u}{\gamma c^2}, \quad z = \frac{k u_{\perp}}{\Omega_e} \gamma.$$

При вычислении (2) было принято, что  $T_{\perp b} = T_{\parallel b} = T_b$ , а  $v_{Tb}^2 = T_b/m$ .

Используя (2), нетрудно записать уравнение (1) в области частот циклотрон-

ного резонанса  $\left(\omega \approx \frac{n\Omega_e}{\gamma}\right)$ :

$$k^2 c^2 = \omega^2 \left[ 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1}}{\omega^2} \cdot \frac{u_{\parallel}^2}{c^2} J_n^2 \left( \frac{ku_{\perp} \gamma}{\Omega_e} \right) \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{J_+ \left( \frac{x}{a} \right)}{x} \right]. \quad (4)$$

В отсутствие плазмы в пределе моноэнергетического пучка, т. е.  $a \rightarrow 0$ , это уравнение переходит во второе уравнение (33.10), описывающее гидродинамическую циклотронную неустойчивость обыкновенной волны. Таким образом, условие применимости формул (33.13) можно записать в виде

$$|x| \gg a = \frac{uv_{\tau b}}{\gamma c^2}. \quad (5)$$

Это условие должно выполняться наряду с (33.14) (отсутствие экранирования циклотронного излучения плазмой).

Уравнение (4) допускает существование в системе также кинетической неустойчивости, обусловленной конечностью температуры пучка, т. е. конечностью величины  $a$ . Такая неустойчивость возникает при выполнении условия (5), причем спектр неустойчивых колебаний ( $\omega \rightarrow \omega + id$ )

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{Le}^2, \quad (6)$$

$$\frac{\delta}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1}}{\omega^2} \cdot \frac{u_{\parallel}^2}{c^2} J_n^2 \left( \frac{ku_{\perp} \gamma}{\Omega_e} \right) \frac{x}{a^2} \cdot \exp \left( -\frac{x^2}{2a^2} \right).$$

В отличие от гидродинамической неустойчивости, соответствующей условию  $\omega > \frac{n\Omega_e}{\gamma}$  [см. (33.13)], кинетическая неустойчивость возможна при  $\omega < \frac{n\Omega_e}{\gamma}$  (т. е.  $x > 0$ ).

**Задача 7.** Исследовать возбуждение полуциклотронных волн в системе встречных вращающихся моноэнергетических электронных пучков, обладающих малой поперечной скоростью:  $u_{\perp}^2 \ll c^2$ .

**Решение.** Возбуждение полуциклотронных волн в системе встречных пучков возможно при выполнении условия двойного резонанса — черенковского и циклотронного:

$$\omega \approx k_z u, \quad \omega \approx \frac{\Omega_e}{\gamma} - k_z u. \quad (1)$$

Для исследования двойного резонанса необходимо знание тензора диэлектрической проницаемости с  $k_z \neq 0$ , который в условиях  $u_{\perp}^2 \ll c^2$  имеет вид

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

причем

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 1 - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1}}{2\omega^2} \left\{ \frac{2(\omega - k_z u_{\parallel})^2}{[(\omega - k_z u_{\parallel})^2 - \Omega_e^2/\gamma^2]} + \frac{2(\omega + k_z u_{\parallel})^2}{(\omega + k_z u_{\parallel})^2 - \Omega_e^2/\gamma^2} + u_{\perp}^2 \left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left[ \frac{(\omega - k_z u_{\parallel})^2 + \Omega_e^2/\gamma^2}{[(\omega - k_z u_{\parallel})^2 - \Omega_e^2/\gamma^2]^2} + \frac{(\omega + k_z u_{\parallel})^2 + \Omega_e^2/\gamma^2}{[(\omega + k_z u_{\parallel})^2 - \Omega_e^2/\gamma^2]^2} \right] \right\}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = & -i \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1}}{2\omega^2} \left\{ \frac{2(\omega - k_z u_{\parallel}) \Omega_e / \gamma}{(\omega - k_z u_{\parallel})^2 - \Omega_e^2 / \gamma^2} + \frac{2(\omega + k_z u_{\parallel}) \Omega_e / \gamma}{(\omega + k_z u_{\parallel})^2 - \Omega_e^2 / \gamma^2} + \right. \\ & + 2u_{\perp}^2 \frac{\Omega_e}{\gamma} \left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left[ \frac{(\omega + k_z u_{\parallel})}{[(\omega + k_z u_{\parallel})^2 - \Omega_e^2 / \gamma^2]^2} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{(\omega - k_z u_{\parallel})}{[(\omega - k_z u_{\parallel})^2 - \Omega_e^2 / \gamma^2]^2} \right] \right\}, \\ \varepsilon_{33} = & 1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma \gamma_{\parallel}^2} \left[ \frac{1}{(\omega - k_z u_{\parallel})^2} + \frac{1}{(\omega + k_z u_{\parallel})^2} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя выражение (3) в общее дисперсионное уравнение (30.1) и учитывая линейные по плотности пучка слагаемые, содержащие полюсы черенковского и циклотронного типов (1), получим

$$\begin{aligned} k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \left( k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1} u_{\perp}^2}{2\omega^2} \cdot \frac{(\omega + k_z u_{\parallel})^2 + \Omega_e^2 / \gamma^2}{[(\omega + k_z u_{\parallel})^2 - \Omega_e^2 / \gamma^2]^2} - \\ - \left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \frac{\omega_b^2}{\gamma \gamma_{\parallel}^2} \cdot \frac{1}{(\omega - k_z u_{\parallel})^2} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Решая это уравнение в условиях резонанса:

$$\omega = \omega_0 + i\delta = \Omega_e / \gamma - k_z u_{\parallel} + i\delta, \quad (5)$$

где

$$\omega_0 = k_z u_{\parallel} - \sqrt{\frac{\omega_b^2 k_z^2 \gamma^{-1} \gamma_{\parallel}^{-2}}{k_{\perp}^2 \gamma_{\parallel}^2 + k_z^2}} \approx k_z u_{\parallel} \approx \frac{\Omega_e}{2\gamma} \quad (6)$$

является решением уравнения (4) при  $u_{\perp} = 0$ , находим соотношение для определения инкремента нарастания полудиклотронной волны:

$$\frac{\delta^3}{\omega_0^3} = \frac{\omega_b^3 u_{\perp}^2 (k_{\perp}^2 c^2 - k_z^2 u_{\parallel}^2)}{8 \omega_0^5 c^2 \gamma_{\parallel} \gamma^3 / 2} \left( \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2 \gamma_{\parallel}^2 + k_z^2} \right)^{3/2}. \quad (7)$$

**Задача 8.** Исследовать устойчивость моноэнергетического электронного пучка с гауссовским распределением вектора скорости электронов по азимутальному углу относительно возбуждения циклотронных волн (такой пучок формируется при прохождении прямолинейного моноэнергетического пучка через тонкую фольгу).

**Решение.** При этом функция распределения электронов

$$f_{0e} = A \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0) \exp\left(-\frac{\theta^2}{\theta_0^2}\right). \quad (1)$$

Здесь  $A$  — постоянная нормировки;  $\mathcal{E}_0$  — энергия электронов;  $\theta_0$  — средний азимутальный угол ( $\theta_0^2 \ll 1$ ).

Далее имеем

$$\int f_{0e} d\mathbf{p} = N_e, \quad A = \frac{N_e c^3}{2\pi \theta_0^2 \mathcal{E} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 - m^2 c^4}}. \quad (2)$$



Функцию распределения (1) можно записать также в виде

$$f_{0e} = A\delta(\delta - \delta_0) \exp\left(-\frac{\rho_{\perp}^2}{\rho^2 \theta_0^2}\right), \quad (3)$$

удобном для вычисления тензора диэлектрической проницаемости по формулам (30.7) и (30.8).

Рассмотрим необыкновенную циклотронную волну, распространяющуюся поперек магнитного поля. В случае достаточно редкого пучка, когда  $\Omega_e \gg \omega_b$ , в дисперсионном уравнении для этой волны следует ограничиться лишь линейными слагаемыми по плотности пучка. Тогда получим

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{yy} = 0, \quad (4)$$

$$\epsilon_{yy} \approx 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{\omega_b^2 \theta_0^2}{(\omega - \Omega_e/\gamma)^2} \cdot \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^3},$$

где  $\gamma = \mathcal{E}_0/(mc^2)$ . При вычислении  $\epsilon_{yy}$  была учтена малость величины  $\theta_0^2 \ll 1$ , поэтому можно было ограничиться первым циклотронным резонансом  $\omega \approx \Omega_e/\gamma$ .

Из уравнения (4) находим ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ )

$$\omega^2 = k^2 c^2 = \Omega^2/\gamma^2,$$

$$\frac{\delta}{\omega} = \frac{i + \sqrt{3}}{2} \left( \frac{\omega_b^2}{8\omega^2} \cdot \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^3} \theta_0^2 \right)^{1/3}. \quad (5)$$

**Задача 9.** На примере изотропной плазмы показать, что черенковская пучковая неустойчивость может развиваться также в условиях, когда инкремент ее нарастания меньше частоты столкновений плазменных электронов (диссипативная пучковая неустойчивость).

**Решение.** Как было показано в § 32, при развитии черенковской неустойчивости в изотропной плазме происходит возбуждение продольных волн. При учете столкновений электронов плазмы вместо уравнения (32.7) имеем

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left(1 - i \frac{\nu_e}{\omega}\right) - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} \cdot \frac{k_z^2 + k_{\perp}^2 \gamma^2}{k^2} = 0. \quad (1)$$

В отсутствие пучка это уравнение описывает слабозатухающие плазменные колебания со спектром ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta_0$ )

$$\omega \approx \omega_{Le}, \quad \delta_0 = -\nu_e/2. \quad (2)$$

При наличии пучка подобные колебания могут оказаться нарастающими. Действительно, в условиях черенковского резонанса ( $\omega = k_z u + i\delta = \omega_{Le} + i\delta$ ) из (1) получаем

$$\delta = \begin{cases} \frac{i + \sqrt{3}}{2} \omega_{Le} \left( \frac{N_b}{2N_p} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{k_{\perp}^2 + k_z^2 \gamma^{-2}}{k^2} \right)^{1/3} & \text{при } |\delta| > \nu_e, \\ \frac{i + 1}{\sqrt{2}} \omega_{Le} \left( \frac{N_b}{N_p} \cdot \frac{\omega_{Le}}{\nu_e} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{k_{\perp}^2 + k_z^2 \gamma^{-2}}{k^2} \right)^{1/2} & \text{при } |\delta| < \nu_e. \end{cases} \quad (3)$$

Верхнее из этих выражений соответствует инкременту нарастания бесстолкновительной неустойчивости (32.6а), а нижнее — диссипативной неустойчивости. Очевидно, что пучковая неустойчивость может быть реализована лишь при  $|\delta| \gg \nu_b$ , где  $1/\nu_b$  — время релаксации направленной скорости электронов пучка (см. задачу 4, гл. III).

## ПЛАЗМА ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

### § 34. Функция распределения заряженных частиц плазмы во внешнем электрическом поле

Рассмотрим еще один широко распространенный в природе пример термодинамически неравновесной плазмы с анизотропной функцией распределения частиц по скоростям — пространственно неограниченную и однородную плазму во внешнем электрическом поле.

Реальную плазму трудно представить себе без внешнего электрического поля. Электрическое поле используется как для создания плазмы (разряд в газе в постоянном и высокочастотном электрических полях, оптический разряд), так для нагрева и удержания, а часто и для ускорения плазмы (омический нагрев плазмы в постоянном и высокочастотном полях, нагрев излучением лазера, радиационное удержание и ускорение плазмы в переменных полях и т. д.). Более того, характер распространения электромагнитных волн конечной амплитуды в плазме в значительной степени определяется поведением плазмы в электрическом поле. Поэтому исследование свойств плазмы во внешних постоянном и переменном электрических полях имеет важное практическое значение.

В настоящем параграфе изучим равновесное состояние плазмы во внешнем переменном во времени, но однородном в пространстве электрическом поле  $E_0$ . Прежде всего рассмотрим случай постоянного электрического поля  $E_0$ , параллельного внешнему магнитному полю  $B_0$ . Отдельные заряженные частицы плазмы в таком поле ускоряются во времени:

$$p_0 = \frac{m_\alpha u_\alpha}{\sqrt{1 - u_\alpha^2/c^2}} = \int^t e_\alpha E_0 dt = e_\alpha E_0 t. \quad (34.1)$$

Однако ускорение будет иметь место до тех пор, пока частица не столкнется с другой частицей, потеряв приобретенный в поле импульс, т. е. в течение времени  $t < \nu_\alpha^{-1}$ , где  $\nu_\alpha$  — частота столкновений данной частицы по отношению к передаче импульса другим частицам. Из-за огромной разницы в массах электронов и ионов фактически воздействием электрического поля на ионы всегда можно пренебречь и учитывать лишь его воздействие на легкие заряженные частицы — электроны. Поэтому приведенные рассуждения следует относить к электронам, а под  $\nu_\alpha$  подразумевать частоту электронных столкновений, т. е.  $\alpha = e$  и  $\nu_\alpha = \nu_e$ .

Таким образом, в течение времени  $t < \nu_e^{-1}$  плазму можно считать бесстолкновительной, в которой под действием электрического поля все электроны ускоряются по закону (34.1), а ионы остаются неподвижными. При этом, если до включения поля распределение электронов

по импульсам имело вид  $f_0(\mathbf{p})$  [под  $f_0(\mathbf{p})$  будем подразумевать термодинамически равновесное распределение Максвелла либо Ферми], то к моменту времени  $t$  оно получит «сдвиг» на величину  $\mathbf{p}_0(t) = e\mathbf{E}_0 t$ . Например, в нерелятивистском случае для начального распределения Максвелла функция распределения электронов в момент времени  $t$  имеет вид

$$f_0(\mathbf{p}, t) = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0(t))^2}{2m T_e}\right]. \quad (34.2)$$

В вырожденной плазме в момент времени  $t$  функция распределения электронов станет сдвинутой функцией распределения Ферми:

$$f_0(\mathbf{p}, t) = \begin{cases} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} & \text{при } |\mathbf{p} - \mathbf{p}_0| < p_F, \\ 0 & \text{при } |\mathbf{p} - \mathbf{p}_0| > p_F, \end{cases} \quad (34.3)$$

где  $p_F = (3\pi^2 N_e)^{1/3} \hbar$ .

Сдвинутую нестационарную функцию распределения нетрудно получить непосредственно из кинетического уравнения Власова

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + e\mathbf{E}_0 \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (34.4)$$

приняв за начальное распределение (без поля)  $f_0(\mathbf{p})$ . В этом можно убедиться простой подстановкой функции  $f_0(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0(t))$  в уравнение (34.4).

В невырожденной полностью ионизованной плазме нестационарное решение (34.2) для электронов оказывается справедливым для любых моментов времени (и при  $t > v_e^{-1}$ ), если

$$E_0 > E_{кр} = \frac{m v_{ei}}{e} v_{те}, \quad (34.5)$$

где  $v_{ei} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m} \cdot \frac{e^2 e_i^2 N_i L}{T_e^{3/2}}}$  — частота электрон-ионных столкновений, определяющая силу трения электронов об ионы:  $\mathbf{F}_{тр} = -m v_{ei} \mathbf{u}_e$ .

Условие (34.5) имеет наглядный физический смысл. При  $E_0 > E_{кр}$  электрон за время между столкновениями приобретает энергию, большую его тепловой энергии  $T_e$ . В результате резко снижается частота электрон-ионных столкновений ( $v_{ei} \sim 1/u^3$ , см. задачу 4 в гл. III), а вместе с ней уменьшается и сила трения электронов об ионы; она уже не способна препятствовать ускоряющей силе  $e\mathbf{E}_0$ , и все электроны плазмы переходят в режим непрерывного ускорения или в режим «убегания», что и описывается функцией (34.2). Более того, при этом со временем скорость электронов станет релятивистской и функцию распределения  $f_0(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0(t))$  следует записывать в виде функции релятивистского распределения Максвелла.

Иная картина наблюдается в полностью ионизованной невырожденной плазме при условии, обратном (34.5), т. е. когда поле  $E_0$  слабое.

В этом случае электрон за время свободного пробега приобретает энергию, меньшую тепловой, и сила трения со стороны ионов способна компенсировать ускоряющую силу электрического поля; устанавливается стационарная функция распределения электронов. Для определения стационарной функции распределения электронов в плазме, помещенной в электрическое поле  $E_0$ , необходимо решать уравнение

$$\frac{eE_0}{m} \frac{\partial f_{0e}}{\partial v} = \left( \frac{\partial f_{0e}}{\partial t} \right)_{st}^{ei} + \left( \frac{\partial f_{0e}}{\partial t} \right)_{st}^{ee}. \quad (34.6)$$

Здесь  $\left( \frac{\partial f_{0e}}{\partial t} \right)_{st}^{ee}$  и  $\left( \frac{\partial f_{0e}}{\partial t} \right)_{st}^{ei}$  — интегралы столкновений электронов с электронами и ионами соответственно (см. § 14).

При слабых полях  $E_0$  функция  $f_0$  мало отличается от изотропной максвелловской функции распределения  $f_{00}$ . Поэтому уравнение (34.6) можно линеаризовать, положив

$$f_{0e} = f_{00} + \delta f_{0e}, \quad (34.7)$$

где

$$f_{00} = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}} e^{-\frac{mv^2}{2T_e}}, \quad (34.8)$$

а  $\delta f_{0e}$  удовлетворяет линеаризованному уравнению (см. также задачу 4 в гл. IV):

$$\begin{aligned} \frac{eE_0}{m} \cdot \frac{\partial f_{0e}}{\partial v} = N_i \frac{\partial}{\partial p_i} I_{ij}^{ei}(\mathbf{p}) \frac{\partial \delta f_{0e}}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial p_i} \int d\mathbf{p}' I_{ij}^{ee}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \times \\ \times \left[ \frac{\partial f_{00}}{\partial p_j} \delta f_{0e}(\mathbf{p}') + \frac{\partial \delta f_{0e}}{\partial p_j} f_{00}(\mathbf{p}') - f_{00}(\mathbf{p}) \frac{\partial \delta f_{0e}}{\partial p_j} - \delta f_{0e} \frac{\partial f_{00}}{\partial p_j} \right]. \end{aligned} \quad (34.9)$$

Это уравнение удобно решать методом Чепмена—Энскога, разлагая  $\delta f_{0e}(\mathbf{p})$  по полиномам Сонина. Ограничиваясь двумя членами разложения, запишем

$$\delta f_{0e}(\mathbf{p}) = \frac{vE_0}{E} \left[ a_0 + a_1 \left( \frac{5}{2} - \frac{v^2}{2v_{Te}^2} \right) \right] f_{00}. \quad (34.10)$$

Подставляя это выражение в (34.9) и домножая это уравнение на полиномы 1 и  $\left( \frac{5}{2} - \frac{v^2}{2v_{Te}^2} \right)$ , после интегрирования по импульсам для простой плазмы с  $e_i = |e|$  получим

$$\begin{aligned} \frac{e}{T_e} E_0 = -v_{ei} \left( a_0 + \frac{3}{2} a_1 \right), \\ \frac{3}{2} a_0 + \frac{13 + 4\sqrt{2}}{4} a_1 = 0. \end{aligned} \quad (34.11)$$

Отсюда находим

$$a_1 = -\frac{3}{2(1+2\sqrt{2})} \cdot \frac{eE}{v_{ei}T_e}, \quad a_0 = -\frac{13+4\sqrt{2}}{6} a_1, \quad (34.12)$$

а следовательно, искомую функцию  $f_{0e}$ :

$$f_{0e} = \frac{N_e}{(2\pi mT_e)^{3/2}} e^{-\frac{mv^2}{2T_e}} \left[ 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{u_e v}{v_{te}^2} \left( \frac{2\sqrt{2}-1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{v^2}{v_{te}^2} \right) \right], \quad (34.13)$$

где  $u_e = \frac{eE_0}{m\nu_{ei}}$ .

Согласно условию применимости этой формулы [неравенство, обратное (34.5)], средняя направленная скорость электронов, определенная с помощью (34.7),

$$\langle v \rangle = \frac{\int f_{0e} v dp}{N_e} \approx 1,96 u_e \quad (34.14)$$

намного меньше их тепловой скорости, т. е.  $u_e \ll v_{te}$ .

Выражение (34.13) несколько отличается от разложенной в ряд функции распределения Максвелла со средней скоростью  $u_e$  (34.2), что приводит к небольшим количественным отличиям в различных конкретных результатах при использовании функции (34.2) вместо (34.13). Качественно, однако, эти результаты согласуются между собой, поэтому для простоты далее и в случае слабого поля будем пользоваться формулой (34.2), в которой  $p_0 = m u_e = eE_0/\nu_{ei}$ .

В слабоионизованной плазме, как невырожденной, так и вырожденной, помещенной во внешнее электрическое поле, стационарное состояние также может существовать, если

$$E_0 < E_{кр} = \frac{m\nu_{en}}{e} v_0, \quad (34.15)$$

где  $v_0$  — средняя хаотическая скорость движения электронов (тепловая скорость, либо скорость Ферми).

Это условие означает, что за время свободного пробега электрон в поле приобретает скорость, меньшую его средней хаотической скорости. Для определения равновесной функции распределения электронов в слабоионизованной невырожденной плазме при этом будем исходить из кинетического уравнения с модельным интегралом БГК (см. § 15):

$$\frac{eE_0}{m} \cdot \frac{\partial f_{0e}}{\partial v} = -\nu_{en} (f_{0e} - N_e \Phi_{en}). \quad (34.16)$$

В результате находим

$$f_{0e} = \frac{N_e}{(2\pi mT_e)^{3/2}} e^{-\frac{mv^2}{2T_e}} \left( 1 + \frac{u_e v}{v_{te}^2} \right) \approx \frac{N_e}{(2\pi mT_e)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{m(v-u_e)^2}{2T_e} \right], \quad (34.17)$$

где  $u_e = \frac{eE_0}{m\nu_{en}}$ .

Аналогично находим функцию распределения электронов в слабоионизованной вырожденной плазме во внешнем электрическом поле. Для этого необходимо решить уравнение (см. § 15)

$$e\mathbf{E}_0 \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{p}} = -\nu_{en} (f_{0e} - f_{00}(\mathbf{p})), \quad (34.18)$$

где  $f_{00}(\mathbf{p})$  — изотропная функция распределения Ферми для вырожденного электронного газа.

При этом получаем

$$f_{0e}(\mathbf{p}) = f_{00}(\mathbf{p}) - \frac{e\mathbf{E}_0}{\nu_{en}} \frac{\partial f_{00}}{\partial \mathbf{p}} \approx f_{00}(|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|), \quad (34.19)$$

где  $f_{00}(|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|)$  определяется формулой (34.3).

Полученные соотношения соответствовали постоянному полю  $\mathbf{E}_0$ . Не представляет труда обобщить их на случай переменного поля и, что наиболее интересно, — периодически меняющегося во времени высокочастотного поля

$$\mathbf{E}_0(t) = \mathbf{E}_0 \sin \omega_0 t. \quad (34.20)$$

При  $\omega_0 \gg \nu_e$  столкновениями электронов можно пренебречь, и из уравнения Власова

$$\frac{\partial f_{0e}}{\partial t} + e\mathbf{E}_0 \sin \omega_0 t \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (34.21)$$

получаем решение в виде сдвинутой функции распределения Максвелла, либо Ферми:

$$f_{0e} = f_{0e}(|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0(t)|), \quad (34.22)$$

где

$$\mathbf{p}_0(t) = e \int^t \mathbf{E}_0(t) dt = -\frac{e\mathbf{E}_0}{\omega_0} \cos \omega_0 t = \frac{m\mathbf{u}_e(t)}{\sqrt{1 - u_e^2(t)/c^2}}. \quad (34.23)$$

При  $\omega_0 \ll \nu_e$  интеграл столкновений в кинетическом уравнении становится главным членом и оказываются справедливыми полученные соотношения (34.6) ÷ (34.19), если в них произвести замену  $\mathbf{E}_0 \rightarrow \mathbf{E}_0(t) = \mathbf{E}_0 \sin \omega_0 t$ .

### § 35. Устойчивость незамагниченной плазмы во внешнем постоянном электрическом поле

В предыдущем параграфе отмечалось, что при условии (34.5), которое в реальной плазме выполняется уже в относительно слабых полях, электроны за время свободного пробега разгоняются до больших скоростей, намного превышающих их тепловую скорость. При этом возникает состояние, когда все электроны движутся относительно неподвижных ионов. Такой электронный пучок, как будет по-

казано, является неустойчивым, причем инкремент развития неустойчивости весьма велик, порядка или даже больше ленгмюровской частоты ионов. За столь короткие времена, несмотря на нестационарность равновесной функции распределения электронов (34.2), величина их направленной скорости не успевает заметно измениться. Поэтому при исследовании устойчивости системы скорость  $u_e$  можно в первом приближении считать постоянной (подобное приближение при анализе устойчивости плазмы во внешнем электрическом поле получило название *адиабатического приближения*). Для простоты пренебрежем также столкновениями частиц, считая плазму достаточно разреженной и поэтому бесстолкновительной.

Указанные ограничения позволяют проанализировать устойчивость плазмы во внешнем электрическом поле исходя из дисперсионного уравнения

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0, \quad (35.1)$$

где  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  вычисляется с помощью полученных в гл. VI формул преобразования.

Для немагнитизированной плазмы, в которой под действием достаточно сильного электрического поля электроны движутся относительно неподвижных ионов со скоростью, намного превышающей их тепловую скорость, уравнение (35.1) имеет вид

$$\left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-1} + \omega_{Li}^2}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-3}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-1} \omega_{Li}^2 k_{\perp}^2 u^2}{\omega^2 c^2 (\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2} = 0. \quad (35.2)$$

Здесь  $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ ,  $\mathbf{u}$  — скорость электрического дрейфа электронов, а  $k_{\perp}$  — компонента волнового вектора возмущений, перпендикулярная скорости  $\mathbf{u}$ .

Уравнение (35.2) имеет неустойчивые решения при условии

$$\omega_{Le}^2 \geq (\mathbf{k}\mathbf{u})^2 \gamma^3, \quad (35.3)$$

причем максимальный инкремент нарастания определяется из соотношения

$$\omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \left( \frac{m}{2M} \right)^{1/3} \gamma \left[ 1 + \frac{k_{\perp}^2 u^2 \gamma^2}{c^2 (k_{\perp}^2 + k_z^2 \gamma^2)} \right]^{1/3} \mathbf{k}\mathbf{u} \quad (35.4)$$

и достигается при выполнении равенства (35.3) или, как говорят, в резонансном случае\*. Эта неустойчивость получила название *бунемановской*.

\* Из уравнения (35.2) легко показать, что в нерезонансном случае, когда выполняется неравенство (35.3), инкремент нарастания бунемановской неустойчивости значительно меньше:  $\text{Im } \omega \sim (m/M)^{1/2} k u$ .

Как указывалось, рассмотренная быстро нарастающая аperiodическая неустойчивость имеет место при  $u \gg v_{Te}$ . Покажем теперь, что неустойчивость возможна и при  $u < v_{Te}$ . При столь малых скоростях дрейфа электронов возбуждаемые в системе колебания с большой степенью точности являются продольными и подчиняются дисперсионному уравнению

$$\frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left[ 1 - J_+ \left( \frac{\omega - \mathbf{k}u}{kv_{Te}} \right) \right] + \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \left[ 1 - J_+ \left( \frac{\omega}{kv_{Ti}} \right) \right] = 0. \quad (35.5)$$

При больших скоростях электрического дрейфа электронов, когда  $u \gg v_{Te}$ , это уравнение совпадает с (35.2) в пределе  $u \ll c$  и описывает быстро нарастающую бунемановскую неустойчивость. При  $u \ll v_{Te}$  из уравнения (35.5) в области частот  $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$  получаем

$$1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega - \mathbf{k}u}{kv_{Te}} \right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{Li}^2 \omega}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}} = 0. \quad (35.6)$$

Мнимые слагаемые в этом уравнении, обусловленные черенковской диссипацией волн на электронах и ионах плазмы, малы по сравнению с действительными. Поэтому решения этого уравнения можно искать в виде  $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ , где  $|\delta| \ll \omega$ . В результате находим

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Li}^2}{1 + \omega_{Le}^2/k^2 v_{Te}^2}, \quad \frac{\delta}{\omega} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{M}{m} \frac{\omega^3}{k^3 v_{Ti}^3} \left( 1 - \frac{u}{v_b} \cos^2 \vartheta \right) - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{\omega^3}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}}. \quad (35.7)$$

Здесь  $v_\phi = \omega/k$  — фазовая скорость волны, а  $\vartheta$  — угол между векторами  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{k}$ .

При  $\mathbf{u} = 0$  спектр (35.7) совпадает со спектром ионно-звуковых колебаний, которые возможны в неизотермической плазме с  $T_e \gg T_i$ . Отличная от нуля скорость дрейфа электронов  $\mathbf{u}$ , как видно из (35.7), уменьшает декремент затухания этих колебаний, и при  $u > u_{кр}$ , когда  $\delta > 0$ , колебания становятся неустойчивыми. Легко видеть, что неус-



тойчивость возможна лишь при условии  $u > v_{\phi}/\cos\vartheta \gg v_{Ti}$ , т.е. когда скорость дрейфа электронов больше фазовой скорости ионно-звуковых колебаний. Отсюда следует, что эта неустойчивость имеет чисто черенковскую природу и приводит к раскачке ионно-звуковых колебаний. Поэтому ее часто называют ионно-звуковой неустойчивостью плазмы с током.

Для наиболее интересных длинноволновых ионно-звуковых колебаний из (35.7) имеем

$$\omega^2 = k^2 v_s^2, \quad (35.8)$$

$$\frac{\delta}{\omega} = -\sqrt{\frac{\pi}{8} \cdot \frac{m}{M}} \left(1 - \frac{u}{v_s} \cos\vartheta\right) - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} e^{-\frac{T_e}{2T_i}}.$$

Отсюда для критической скорости раскачки длинноволновых ионно-звуковых колебаний находим

$$u_{кр} \cos\vartheta = v_s \left[ 1 + \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{T_e}{2T_i}} \right]. \quad (35.9)$$

При этом  $u_{кр} > v_s$ .

С ростом частоты колебаний скорость  $u_{кр}$  падает и становится меньше  $v_s$ . Наименьшей критической скоростью обладают коротковолновые колебания с длиной волны, меньшей дебаевского радиуса электронов, для которых

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \quad (35.10)$$

$$\frac{\delta}{\omega} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{M}{m} \cdot \frac{\omega_{Li}^3}{k^3 v_{Te}^3} \left[ 1 - \frac{u}{v_{\phi}} \cos\vartheta \right] - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{\omega_{Li}^3}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\frac{\omega_{Li}^2}{2k^2 v_{Ti}^2}}.$$

Наконец, заметим, что при совсем малых скоростях дрейфа электронов, когда  $u \ll v_{Ti}$ , уравнение (35.5) имеет лишь устойчивые решения, т.е. плазма с током во внешнем электрическом поле в таких условиях устойчива.

На рис. 23 приведена зависимость инкремента нарастания неустойчивых колебаний плазмы в постоянном электрическом поле от  $ku$ : пунктиром показан инкремент кинетической неустойчивости, а сплошной линией — инкремент гидродинамической неустойчивости, причем

$$\delta_{\max} \approx \sqrt{\frac{3}{4}} \left(\frac{m}{2M}\right)^{1/3} \omega_{Le} \gamma^{1/6}.$$

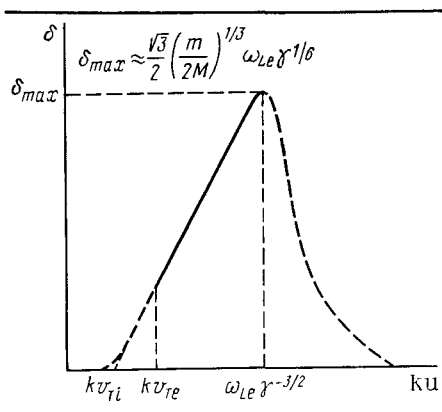


Рис. 23

До сих пор не учитывались столкновения частиц в плазме. Поэтому, строго говоря, полученные формулы справедливы в условиях  $|\delta| \gg v_e$ , т. е. когда все процессы развития и нарастания колебаний протекают значительно быстрее, чем время между столкновениями частиц. Для высокочастотной гидродинамической неустойчивости, развивающейся при  $u > v_{Te}$ , это требование действительно необходимо, так как указанная скорость может приобретаться электронами только при  $E_0 > E_{кр}$  и за времена, меньшие

времени их свободного пробега. Оно означает

$$\omega_{Le} \left( \frac{m}{M} \right)^{1/3} \gamma^{1/6} \gg v_e, \quad (35.11)$$

где под  $v_e$  следует понимать  $v_{ei}$  — для полностью ионизованной плазмы и  $v_{en}$  — для слабоионизованной плазмы.

Что касается ионно-звуковой неустойчивости неизотермической плазмы в электрическом поле, то она может развиваться как при  $E_0 > E_{кр}$ , так и при  $E_0 < E_{кр}$ , нужно только, чтобы дрейфовая скорость электронов достигла критической скорости для раскачки ионно-звуковых колебаний. Если плазма достаточно разрежена и такая скорость достигается за время, меньшее времени свободного пробега электронов, то равновесная функция распределения электронов имеет вид (34.2). Если же плотность плазмы высокая и электроны во время ускорения в поле  $E_0$  испытывают много столкновений, то их равновесной функцией распределения будет (34.13) для полностью ионизованной плазмы, либо (34.17) для слабоионизованной плазмы. Функция распределения (34.17) является функцией распределения Максвелла со сдвигом по скорости, а (34.13) не есть максвелловская функция распределения. Однако, как отмечалось, для простоты и эту функцию распределения можно заменить максвелловской, что позволяет для исследования ионно-звуковой неустойчивости в плазме со столкновениями применять изложенную в предыдущей главе общую теорию, основанную на формулах преобразования Лоренца. В случае невырожденной слабоионизованной плазмы со столкновениями использование этих формул (а также соотношений, полученных в § 21) приводит к следующему дисперсионному уравнению для продольных электромагнитных волн, обобщающему (35.5):

$$1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \frac{1 - J_+ \left( \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u} + i\nu_e}{k v_{Te}} \right)}{1 - \frac{i\nu_e}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u} + i\nu_e} J_+ \left( \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u} + i\nu_e}{k v_{Te}} \right)} +$$

$$+ \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \cdot \frac{1 - J_+ \left( \frac{\omega + i\nu_i}{k v_{Ti}} \right)}{1 - \frac{i\nu_i}{\omega + i\nu_i} J_+ \left( \frac{\omega + i\nu_i}{k v_{Ti}} \right)} = 0. \quad (35.12)$$

Здесь  $\nu_e$  и  $\nu_i$  — частоты столкновений электронов и ионов с нейтральными частицами.

В области частот ионно-звуковых колебаний ( $\omega, \nu_e \ll k v_{Te}$  и  $\omega \gg \nu_i, k v_{Ti}$ ) уравнение (35.12) принимает вид

$$1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}}{k v_{Te}} \right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left( 1 - i \frac{\nu_i}{\omega} \right) +$$

$$+ i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{Li}^2 \omega}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}} = 0. \quad (35.13)$$

Это уравнение отличается от (35.6) малым мнимым слагаемым, учитывающим столкновения ионов с нейтральными частицами, что в свою очередь меняет спектр (35.7): в выражении для  $\delta$  появляется дополнительное слагаемое

$$\Delta\delta = -\nu_i/2. \quad (35.14)$$

Такая же поправка появляется и в формулах (35.8) и (35.10).

Таким образом, учет столкновений ионов в слабоионизованной плазме приводит к увеличению критической скорости для раскочки ионно-звуковых колебаний. Так, вместо (35.9) в области длинноволновых колебаний имеем

$$u_{кр} \cos \vartheta = v_s \left[ 1 + \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left( \frac{M}{m} \right)^{1/2} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} e^{-\frac{T_e}{2T_i}} + \sqrt{\frac{2M}{\pi m}} \cdot \frac{\nu_i}{\omega} \right]. \quad (35.15)$$

Для полностью ионизованной плазмы с равновесной функцией распределения электронов (34.2) справедливыми остаются соотношения (35.13) ÷ (35.15), если в них произвести замену

$$\nu_i \rightarrow \frac{8}{5} \nu_{ii} \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2}, \quad (35.16)$$

где  $\nu_{ii} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{M}} \cdot \frac{e_i^4 L N_i}{T_i^{3/2}}$  — частота ион-ионных столкновений.

В этом легко убедиться, если вспомнить, что в области частот ионного звука столкновительная поправка к продольной диэлектрической проницаемости полностью ионизованной плазмы определяется формулой (22.6).

В заключение рассмотрим устойчивость вырожденной плазмы во внешнем электрическом поле, когда функция распределения электронов по импульсам имеет вид сдвинутой функции распределения Ферми (34.3). Считая скорость дрейфа электронов малой по сравнению со скоростью света, ограничимся анализом устойчивости продольных волн в такой плазме. Используя формулы преобразования (30.18) и явный вид продольной диэлектрической проницаемости вырожденной плазмы (21.19), получим следующее дисперсионное уравнение:

$$1 + \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u} + i\nu_e}{k v_{Fe}} \ln \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u} + i\nu_e + k v_{Fe}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u} + i\nu_e - k v_{Fe}} \right] \times \\ \times \left[ 1 - \frac{i\nu_e}{2k v_{Fe}} \ln \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u} + i\nu_e + k v_{Fe}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u} + i\nu_e - k v_{Fe}} \right]^{-1} - \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \times \\ \times \left[ 1 - J_+ \left( \frac{\omega + i\nu_i}{k v_{Ti}} \right) \right] \left[ 1 - \frac{i\nu_i}{\omega + i\nu_i} J_+ \left( \frac{\omega + i\nu_i}{k v_{Ti}} \right) \right]^{-1} = 0. \quad (35.17)$$

При выводе этого уравнения ионы плазмы считались невырожденными.

В области частот ионно-звуковых колебаний  $\nu_i$ ,  $k v_{Ti} \ll \omega$ ,  $\nu_e \ll k v_{Fe}$  из уравнения (35.17) получаем

$$1 + \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} \left( 1 + i \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}}{k v_{Fe}} \right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left( 1 - i \frac{\nu_i}{\omega} \right) + \\ + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{Li}^2 \omega}{k^3 v_{Ti}^3} \exp \left( -\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2} \right) = 0. \quad (35.18)$$

Это уравнение аналогично (35.13). Поэтому проведенный анализ применим и здесь, что дает формулы, подобные (35.7) ÷ (35.10) и (35.15), в которых, однако, следует произвести замену  $v_{Te} \rightarrow v_{Fe}$ ,

$$T_e \rightarrow \mathcal{E}_{Fe} = \frac{m v_{Fe}^2}{2}.$$

### § 36. Влияние магнитного поля на устойчивость плазмы во внешнем постоянном электрическом поле

Рассмотрим влияние сильного магнитного поля на устойчивость плазмы во внешнем постоянном электрическом поле и тем самым обобщим полученные в предыдущем параграфе результаты на магнитоактивную плазму, считая, что  $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{E}_0$ . Как и ранее, функцию распределения электронов будем считать сдвинутой функцией распределения Максвелла (34.2) либо Ферми (34.3) и пренебрежем изменением

направленной скорости в процессе развития колебаний (адиабатическое приближение). Для простоты ограничимся случаем достаточно сильного магнитного поля, когда электроны замагничены ( $\Omega_e^2 \gg \omega_{Le}^2$ ), а ионы, наоборот, не замагничены ( $\Omega_i^2 \ll \omega_{Li}^2$ ).

При указанных ограничениях анализ дисперсионного уравнения (35.1) существенно облегчается. Так, в пределе сильного поля, когда скорость электрического дрейфа электронов намного больше средней скорости их хаотического движения и последней можно пренебречь, уравнение (35.1) принимает вид

$$k_{\perp}^2 \varepsilon_{xx} + \left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{xx} \right) \varepsilon_{zz} = k_{\perp}^2 \left( 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \right) + \left[ k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \right) \right] \left[ 1 - \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \right] = 0. \quad (36.1)$$

Это уравнение имеет неустойчивые решения при условии

$$\omega_{Le}^2 \geq k^2 u^2 \gamma^3. \quad (36.2)$$

Неустойчивость аperiодическая, причем  $\omega \ll k_z u$ , и достигает своего максимального значения при резонансном равенстве (36.2):

$$\omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \left( \frac{m}{2M} \right)^{1/3} k_z u \gamma \left( \frac{k^2}{k_z^2} \right)^{1/3}. \quad (36.3)$$

Из сравнения формул (35.3), (35.4) с (36.2), (36.3) следует, что внешнее магнитное поле затрудняет развитие высокочастотной бунемановской неустойчивости в плазме в сильном электрическом поле, область неустойчивости (36.2) уже области (35.3) для волн, распространяющихся под углом  $\vartheta \neq 0$  к магнитному полю, и инкремент развития неустойчивости в магнитоактивной плазме (36.3) меньше, чем в отсутствие магнитного поля (35.4).

Рассмотренная высокочастотная неустойчивость, как и в незамагниченной плазме, может иметь место лишь при больших скоростях электрического дрейфа электронов, превышающих скорость их хаотического движения. И так же как и в отсутствие магнитного поля, в замагниченной плазме возможны неустойчивости и при малых скоростях дрейфа, меньших тепловой скорости электронов, но больших тепловой скорости ионов. Для анализа таких неустойчивостей, однако, важен учет теплового движения частиц, т. е. явный вид функции распределения заряженных частиц в плазме. Это существенно усложняет анализ дисперсионного уравнения (35.1). Вместе с тем при малых скоростях дрейфа можно ограничиться анализом уравнения для продольных колебаний вместо общего дисперсионного уравнения (35.1), что упрощает задачу.

В случае невырожденной электронно-ионной плазмы в постоянном электрическом поле и параллельном ему магнитном поле уравнение для продольных колебаний записывается в виде

$$\frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij} = 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left[ 1 - \sum_n \frac{\omega - ku}{\omega - ku - n\Omega_e} A_n \left( \frac{k_{\perp}^2 v_{Te}^2}{\Omega_e^2} \right) \times \right. \\ \left. \times J_+ \left( \frac{\omega - ku - n\Omega_e}{k_z v_{Te}} \right) \right] + \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \left[ 1 - \sum_n \frac{\omega}{\omega - n\Omega_i} A_n \left( \frac{k_{\perp}^2 v_{Ti}^2}{\Omega_i^2} \right) \times \right. \\ \left. \times J_+ \left( \frac{\omega - n\Omega_i}{k_z v_{Ti}} \right) \right] = 0. \quad (36.4)$$

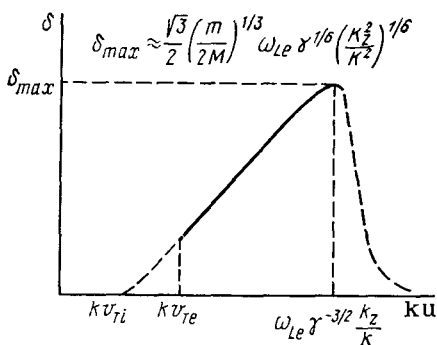
При малых скоростях дрейфа электронов, когда  $u \ll v_{Te}$ , неустойчивые решения уравнения (36.4) следует искать в области частот  $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$ . Тогда

$$1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega - ku}{|k_z| v_{Te}} \right) - \\ - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{Li}^2 \omega}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}} = 0. \quad (36.5)$$

При получении этого уравнения ионы плазмы, так же как и ранее, считались немагнитными, а электроны — сильно замагниченными. Уравнение (36.5) подобно уравнению (35.6) и отличается от него малым мнимым слагаемым, обусловленным черенковским эффектом на электронах. Поэтому анализ уравнения (35.6) полностью переносится и на уравнение (36.5): сохраняются формулы (35.7) ÷ (35.10) с заменой

$$1 - \frac{u}{v_{\phi}} \cos \vartheta \rightarrow \frac{1}{\cos \vartheta} \left( 1 - \frac{u}{v_{\phi}} \cos \vartheta \right). \quad (36.6)$$

В результате критическая скорость дрейфа электронов оказывается меньше, а инкремент нарастания неустойчивости больше, чем в отсутствие магнитного поля. Это означает, что внешнее магнитное поле облегчает развитие ионно-звуковой неустойчивости плазмы во внешнем электрическом поле.



На рис. 24 приведена зависимость инкремента развития неустойчивости невырожденной плазмы во внешних постоянных электрическом и магнитном полях от  $ku$ . Она качественно такая же, как и в отсутствие магнитного поля.

До сих пор было полностью пренебрежено столкновениями частиц в плазме. Обсудим

Рис. 24

теперь их влияние на развитие неустойчивостей в магнитоактивной плазме при наличии электрического дрейфа электронов. Для справедливости формул, относящихся к высокочастотным колебаниям, которые возбуждаются при  $u > v_{Te}$ , необходимо, чтобы за время свободного пробега электроны плазмы приобрели в поле скорость, превышающую их тепловую скорость, что возможно при  $E_0 > E_{кр}$ . Это требование в свою очередь означает, что все процессы должны успевать развиваться быстрее времени свободного пробега электронов, т. е.  $|\delta| > \nu_e$ , что приводит к условию (35.11). Медленная же ионно-звуковая неустойчивость может развиваться как при  $E_0 > E_{кр}$ , так и при  $E_0 < E_{кр}$ , необходимо только, чтобы электроны имели среднюю дрейфовую скорость, превышающую тепловую скорость ионов. В предыдущем параграфе было показано, что это возможно не только в разреженной бесстолкновительной плазме, но и в плазме с большим числом столкновений. В раскачке ионно-звуковых колебаний существенную роль играют столкновения ионов, причем, так же как и в немагнитоактивной плазме, раскачка имеет место лишь при  $\omega > \nu_i$ . Используя результаты § 27 и 28, дисперсионное уравнение для ионно-звуковых колебаний магнитоактивной плазмы с функцией распределения электронов (34.2) в области частот  $\Omega_e \gg \gg \omega \gg \Omega_i$  (электроны замагничены, ионы не замагничены) можно записать в виде

$$1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}}{|k_z| v_{Te}} \right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left( 1 - i \frac{\nu_i}{\omega} \right) + \\ + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{Li}^2(\omega)}{k^3 v_{Ti}^3} \exp \left( -\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Ti}^2} \right) = 0, \quad (36.7)$$

где  $\nu_i = \nu_{in}$  — для слабоионизованной плазмы и  $\nu_i = \frac{8}{5} \nu_{ii} \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2}$  — для полностью ионизованной плазмы.

Это уравнение отличается от (36.5) лишь наличием малого мнимого члена, учитывающего столкновения ионов в плазме, что дает поправку к декременту затухания [см. формулы (35.7), (35.8), (35.10)] с учетом замены (36.6):

$$\Delta \delta = -\nu_i/2, \quad (36.8)$$

соответствующую стабилизирующему влиянию ионных столкновений на характер возбуждения ионно-звуковой неустойчивости в неизотермической плазме под действием дрейфа электронов.

В заключение кратко обсудим вопрос об устойчивости вырожденной плазмы во внешних электрическом и магнитном полях. Как и ранее, вырожденными считаются только электроны, причем скорость их электрического дрейфа меньше скорости Ферми, но больше тепловой скорости ионов.

В этих условиях общее дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned}
\frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = & 1 + \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \left[ 1 - J_+ \left( \frac{\omega + i\nu_i}{k v_{Ti}} \right) \right] \times \\
& \times \left[ 1 - \frac{i\nu_i}{\omega + i\nu_i} J_+ \left( \frac{\omega + i\nu_i}{k v_{Ti}} \right) \right]^{-1} + \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} \times \\
& \times \left[ 1 - \sum_n \frac{\omega - k_z u + i\nu_e}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta J_n^2 \left( \frac{k_\perp v_{Fe}}{\Omega_e} \sin \vartheta \right)}{\omega - k_z u + i\nu_e - k_z v_{Fe} \cos \vartheta - n\Omega_e} \right] \times \\
& \times \left[ 1 - \sum_n \frac{i\nu_e}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta J_n^2 \left( \frac{k_\perp v_{Fe}}{\Omega_e} \sin \vartheta \right)}{\omega - k_z u + i\nu_e - k_z v_{Fe} \cos \vartheta - n\Omega_e} \right]^{-1} \quad (36.9)
\end{aligned}$$

можно упростить, рассмотрев область частот  $k v_{Ti} \ll \omega \ll k v_{Fe}$ . В результате получим уравнение

$$\begin{aligned}
1 + \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} \left( 1 + i \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega - \mathbf{k}u}{|k_z| v_{Fe}} \right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left( 1 - i \frac{\nu_i}{\omega} \right) + \\
+ i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{Li}^2 \omega}{k^3 v_{Ti}^3} \exp \left( -\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2} \right) = 0, \quad (36.10)
\end{aligned}$$

которое отличается от (35.18) малым мнимым слагаемым, обусловленным черенковским эффектом на электронах. Поэтому все сказанное относительно уравнения (35.18) сохраняет силу и здесь с учетом замены (36.6), которая свидетельствует о дестабилизирующем влиянии магнитного поля на токовую неустойчивость вырожденной плазмы.

### § 37. Плазма в сверхвысокочастотном электрическом поле

Изучим свойства плазмы в сверхвысокочастотном (СВЧ) электрическом поле. Вопросы взаимодействия СВЧ полей с плазмой, как отмечалось, связаны с рядом прикладных проблем физики плазмы. В первую очередь это СВЧ разряд в плазме, т. е. создание плазмы с помощью СВЧ полей. Сюда же относится нагрев плазмы посредством СВЧ полей для получения высокотемпературной термоядерной плазмы. Большой интерес для физиков-термоядерщиков представляет также идея удержания плазмы СВЧ полями. Наконец, в последнее время физиками интенсивно исследуется возможность ускорения плазменных сгустков с помощью радиационного давления СВЧ полей. Бурно развиваемая теория взаимодействия СВЧ полей с плазмой охватывает все более широкий круг явлений в плазме. Достаточно полное изложение этой теории выходит за рамки настоящей книги. Поэтому ограничимся здесь изложением общих основ теории взаимо-



действия СВЧ полей с плазмой и опишем лишь те явления, которые на сегодняшний день считаются хорошо исследованными как теоретически, так и экспериментально.

В § 34 были найдены равновесные функции распределения [см. формулы (34.21), (34.22)] заряженных частиц в пространственно однородной плазме во внешнем высокочастотном электрическом поле, параллельном внешнему магнитному полю,

$$E_0(t) = E_0 \sin \omega_0 t. \quad (37.1)$$

Исследуем устойчивость этих распределений, рассмотрев малые колебания в такой плазме. Анализ устойчивости начнем с СВЧ полей, частота которых больше всех характерных частот плазмы:

$$\omega_0 \gg \omega_{L\alpha}, \quad \Omega_\alpha, \quad \nu_\alpha. \quad (37.2)$$

Плазму в таком СВЧ поле можно считать изотропной и оценить неоднородность поля с помощью дисперсионного уравнения для поперечных волн (см. гл. IV):

$$k_0 = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_0^2}} \approx \frac{\omega_0}{c}. \quad (37.3)$$

Величина  $k_0^{-1} \simeq \frac{c}{\omega_0}$  характеризует неоднородность СВЧ поля, которой при записи уравнения (37.1) было пренебрежено. Это означает, что СВЧ поле можно считать однородным лишь для таких процессов в плазме, характерные размеры неоднородности которых  $1/k$  значительно меньше  $1/k_0$ , т. е.  $k \gg \omega_0/c$ . Это условие, которое далее всюду считается выполненным, позволяет при исследовании устойчивости плазмы в СВЧ поле ограничиться анализом квазипродольных (потенциальных) колебаний. Действительно, частоты колебаний порядка характерных частот плазмы, т. е.  $\omega \sim (\omega_{L\alpha}, \Omega_\alpha)$ . Учитывая (37.2), заключаем, что  $\omega \ll \omega_0 \approx k_0 c \ll kc$ . Это же неравенство представляет собой условие квазипродольности колебаний.

Поскольку действием высокочастотного электрического поля на ионы плазмы можно пренебречь (по сравнению с его действием на электроны), то функцию распределения ионов по скоростям можно считать изотропной (как правило, максвелловской), в то время как функция распределения электронов определяется формулами (34.22) и (34.23):

$$f_{0e}(\mathbf{p}) = f_{0e}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0(t)), \quad (37.4)$$

$$\mathbf{p}_0(t) = e \int^t \mathbf{E}_0(t) dt = -\frac{eE_0}{\omega_0} \cos \omega_0 t = \frac{m\mathbf{u}_0(t)}{\sqrt{1 - u_0^2/c^2}}.$$

При анализе устойчивости плазмы в СВЧ поле для простоты ограничимся нерелятивистским случаем, считая  $u_0(t) \ll c$ .

Линеаризуя кинетическое уравнение Власова для электронов и ионов по малым отклонениям от равновесных функций распределения, в случае бесстолкновительной плазмы во внешних параллельных СВЧ электрическом и постоянном магнитном полях получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta f_e}{\partial t} + ikv\delta f_e + \frac{eE_0 \sin \omega_0 t}{m} \cdot \frac{\partial \delta f_e}{\partial v} + \frac{e}{m} [\mathbf{v}\mathbf{B}_0] \times \\ \times \frac{\partial \delta f_e}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e\mathbf{E}}{m} \cdot \frac{\partial f_{0e}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)}{\partial \mathbf{v}} = 0, \end{aligned} \quad (37.5)$$

$$\frac{\partial \delta f_i}{\partial t} + ikv\delta f_i + \frac{e_i}{M} [\mathbf{v}\mathbf{B}_0] \frac{\partial \delta f_i}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_i \mathbf{E}}{M} \cdot \frac{\partial f_{0i}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$

Здесь  $f_{0e}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$  и  $f_{0i}(\mathbf{p})$  — равновесные функции распределения электронов и ионов;  $\delta f_e$  и  $\delta f_i$  — их малые возмущения, зависимость которых от координат вследствие пространственной однородности плазмы принята в виде  $\exp(-ikr)$ ;  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  — электрическое поле возмущений, удовлетворяющее уравнению Пуассона

$$k^2\Phi = 4\pi e \int d\mathbf{p}\delta f_e + 4\pi e_i \int d\mathbf{p}\delta f_i. \quad (37.6)$$

Для решения системы (37.5) и (37.6) удобно ввести новую функцию

$$\Psi_e(\mathbf{p}, t) = \exp\left(-i \frac{e}{m} \cdot \frac{k\mathbf{E}_0 \sin \omega_0 t}{\omega_0^2}\right) \delta f_e\left(\mathbf{p} + \frac{e\mathbf{E}_0}{\omega_0} \cos \omega_0 t\right), \quad (37.7)$$

в результате чего система сводится к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Psi_e}{\partial t} + ikv\Psi_e - \Omega_e \frac{\partial \Psi_e}{\partial \varphi} - ik \frac{\partial f_{0e}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{4\pi e}{mk^2} \left[ e \int d\mathbf{p}\Psi_e(\mathbf{p}) + \right. \\ \left. + e_i \int d\mathbf{p}\delta f_i(\mathbf{p}) \exp\left(-i \frac{e}{m} \cdot \frac{k\mathbf{E}_0 \sin \omega_0 t}{\omega_0^2}\right) \right] = 0, \\ \frac{\partial \delta f_i}{\partial t} + ikv\delta f_i - \Omega_i \frac{\partial \delta f_i}{\partial \varphi} - ik \frac{\partial f_{0i}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{4\pi e_i}{Mk^2} \left[ e_i \int d\mathbf{p}\delta f_i + \right. \\ \left. + e \int d\mathbf{p}\Psi_e \exp\left(-i \frac{ie}{m} \cdot \frac{k\mathbf{E}_0 \sin \omega_0 t}{\omega_0^2}\right) \right] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (37.8)$$

Здесь  $f_{0e}(\mathbf{p})$  и  $f_{0i}(\mathbf{p})$  — изотропные равновесные функции распределения электронов и ионов в системе покоя этих частиц.

Воспользуемся далее разложением

$$e^{\pm ikr_E \sin \omega_0 t} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{\pm il\omega_0 t} J_l(kr_E), \quad (37.9)$$

где  $r_E = \frac{eE_0}{m\omega_0^2}$  — амплитуда осцилляций электронов во внешнем СВЧ

электрическом поле, и учтем, что уравнения (37.8) образуют систему с периодическими коэффициентами. Последнее обстоятельство позволяет искать решение этой системы в виде

$$(\Psi_e, \delta f_i) = e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega_0 t} (\Psi_{en}, \delta f_{in}). \quad (37.10)$$

В результате из системы (37.8) получаем

$$\begin{aligned} & -i(\omega + n\omega_0) \Psi_{en} + ikv\Psi_{en} - \Omega_e \frac{\partial \Psi_{en}}{\partial \varphi} - ik \frac{\partial f_{0e}}{\partial v} \times \\ & \times \frac{4\pi e}{mk^2} \left[ e \int dp \Psi_{en} + e_i \sum_l J_{l-n}(\mathbf{k}r_E) \int dp \delta f_{il} \right] = 0, \\ & -i(\omega + n\omega_0) \delta f_{in} + ikv\delta f_{in} - \Omega_i \frac{\partial \delta f_{in}}{\partial \varphi} - \\ & - ik \frac{\partial f_{0i}}{\partial v} \cdot \frac{4\pi e_i}{Mk^2} \left[ e_i \int dp \delta f_{in} + e \sum_l J_{n-l}(\mathbf{k}r_E) \int dp \Psi_{en} \right] = 0. \end{aligned} \quad (37.11)$$

Введем обозначения

$$u_{en} = e \int dp \Psi_{en}, \quad u_{in} = e_i \int dp \delta f_{in} \quad (37.12)$$

и запишем систему (37.11) в виде зацепляющихся уравнений, воспользовавшись формальным ее решением

$$\begin{aligned} u_{en} &= -\delta\varepsilon_e(\omega + n\omega_0, \mathbf{k}) \left[ u_{en} + \sum_l J_{l-n}(\mathbf{k}r_E) u_{il} \right], \\ u_{in} &= -\delta\varepsilon_i(\omega + n\omega_0, \mathbf{k}) \left[ u_{in} + \sum_l J_{n-l}(\mathbf{k}r_E) u_{el} \right]. \end{aligned} \quad (37.13)$$

Здесь  $\delta\varepsilon_e(\omega)$  и  $\delta\varepsilon_i(\omega)$  — парциальные вклады в продольную диэлектрическую проницаемость плазмы от электронов и ионов соответственно.

Условие разрешимости бесконечной системы зацепляющихся уравнений (37.13) представляет собой искомое дисперсионное уравнение для малых продольных (потенциальных) колебаний плазмы во внешнем СВЧ электрическом поле. В общем случае это определитель бесконечного порядка и проанализировать его невозможно. Однако в наиболее интересных предельных случаях этот определитель удастся существенно упростить и найти спектр колебаний плазмы во внешнем СВЧ электрическом поле. Так, например, в пределе очень высоких частот, когда выполнены условия (37.2), все величины  $\delta\varepsilon_{e,i}(n\omega_0 + \omega)$  с  $n \neq 0$  малы по сравнению с единицей. Поэтому в системе (37.13) можно ограничиться слагаемыми, содержащими  $u_{e0}$  и  $u_{i0}$ , считая только такие слагаемые отличными от нуля. В результате из системы

(37.13) получим

$$\left. \begin{aligned} [1 + \delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k})] u_{e0} + \delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k}) J_0(\mathbf{k}\mathbf{r}_E) u_{i0} &= 0, \\ [1 + \delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})] u_{i0} + \delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k}) J_0(\mathbf{k}\mathbf{r}_E) u_{e0} &= 0. \end{aligned} \right\} (37.14)$$

Условие разрешимости этой системы — искомого дисперсионное уравнение — записывается в виде

$$1 + \delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k}) + \delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k}) + [1 - J_0^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)] \delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k}) \delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k}) = 0. (37.15)$$

При выводе дисперсионного уравнения (37.15) полностью пренебрежено столкновениями частиц в плазме. Легко показать, однако, что это уравнение справедливо и при учете столкновений, если только скорость осцилляций частиц мала по сравнению со скоростью их теплового движения, и поэтому внешнее СВЧ поле не влияет на сам акт столкновений (т. е. на сечения рассеяния). Действительно, при учете столкновений частиц в системе уравнений (37.11) появляются правые части, обусловленные линеаризованными интегралами столкновений электронов и ионов. По своей структуре эти члены такие же, как и в отсутствие СВЧ электрического поля. Это означает, что сохраняется вид решений этих уравнений, т. е. система (37.13), с той лишь разницей, что в выражениях  $\delta\varepsilon_e(\omega + n\omega_0)$  и  $\delta\varepsilon_i(\omega + n\omega_0)$  нужно учитывать столкновения частиц (см. § 21, 22, 27 и 28).

Приступая к анализу дисперсионного уравнения (37.15), рассмотрим прежде всего немагнитичную и невырожденную газовую плазму, когда  $\delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k})$  и  $\delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})$  определяются выражениями (см. § 17,  $\alpha = e, i$ )

$$\delta\varepsilon_\alpha(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left[ 1 - J_+ \left( \frac{\omega}{k v_{T\alpha}} \right) \right]. (37.16)$$

В высокочастотном пределе  $\omega \gg k v_{T\alpha}$  (предел холодной плазмы), пренебрегая экспоненциально малыми мнимыми слагаемыми, из (37.15) получаем

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{Le}^2 \omega_{Li}^2}{\omega^4} (1 - J_0^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)) = 0. (37.17)$$

Отсюда находим спектры колебаний холодной плазмы во внешнем СВЧ поле:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega_{Le}^2 + \omega_{Li}^2 J_0^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E), \\ \omega_2^2 &= \omega_{Li}^2 [1 - J_0^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)]. \end{aligned} (37.18)$$

Первый спектр (37.18) является спектром известных высокочастотных ленгмюэвских колебаний, видоизмененным под действием внешнего СВЧ поля, второй спектр — новый, аналогичный спектру ионно-звуковых колебаний, в котором роль электронной температуры играет средняя энергия колебательного движения электронов в высокочас-

тотном поле (рис. 25). Особенно явно это видно в длинноволновом пределе  $kr_E \ll 1$ , когда

$$\omega_2^2 = \omega_{Li}^2 \frac{(kr_E)^2}{2} = (kW_s)^2. \quad (37.19)$$

Здесь  $W_s = \frac{\omega_{Li}}{\omega_0} \cdot \frac{v_E}{\sqrt{2}}$  ( $v_E$  — амплитуда скорости осциллирующих электронов во внешнем поле).

Таким образом, можно говорить о существовании анизотропных электрзвучковых колебаний в плазме, помещенной в СВЧ электрическое поле, понимая под скоростью звука величину  $W_s$ . Отметим, что такие звуковые колебания возможны только в достаточно сильных полях, когда  $W_s \gg v_{Te}$ , а следовательно, скорость осциллирующих электронов  $v_E \gg \frac{\omega_0}{\omega_{Li}} v_{Te} \gg \sqrt{\frac{M}{m}} v_{Te}$ . Следует отметить также, что в коротковолновом пределе  $kr_E \gg 1$  частота  $\omega_2$ , так же как и  $\omega_1$ , осциллирует, причем  $\omega_2$  асимптотически стремится к  $\omega_{Li}$ , а  $\omega_1$  — к  $\omega_{Le}$ , как показано на рис. 25.

Рассмотрим уравнение (37.15) в области частот  $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$ . В отсутствие внешнего высокочастотного поля в этой области частот, как известно, возможны колебания, если плазма неизотермическая и  $T_e \gg T_i$  (ионный звук). При наличии СВЧ поля дисперсионное уравнение (37.15) в этой области частот записывается в виде

$$1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega}{kv_{Te}} \right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} - [1 - J_0^2(kr_E)] \times \\ \times \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \cdot \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega}{kv_{Te}} \right) = 0. \quad (37.20)$$

Здесь пренебрежено экспоненциально малым ионным поглощением. Из этого уравнения находим следующий спектр ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ ):

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \left[ 1 - \frac{J_0^2(kr_E)}{1 + k^2 r_{De}^2} \right], \quad (37.21) \\ \delta = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{\omega_{Le}^2 \omega_{Li}^2}{k^3 v_{Te}^3} \cdot \frac{J_0^2(kr_E)}{[1 + (kr_{De})^{-2}]^2}.$$

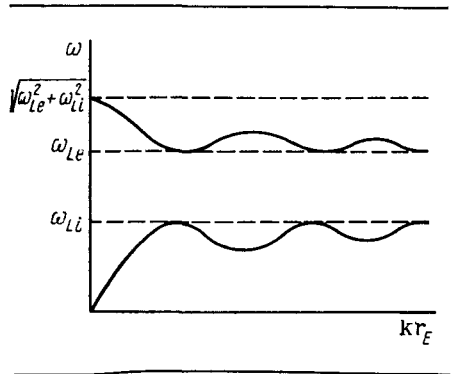


Рис. 25

В пределе длинных волн  $\mathbf{k}r_E \ll 1$  и  $k^2 r_{De}^2 \ll 1$  спектр (37.21) принимает вид

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \left[ \frac{(\mathbf{k}r_E)^2}{2} + k^2 r_{De}^2 \right] = (\mathbf{k}W_s)^2 + k^2 v_s^2, \quad (37.22)$$

$$\delta = - \sqrt{\frac{\pi}{8} \cdot \frac{m}{M}} k v_s.$$

Видно, что спектр ионно-звуковых колебаний при  $v_s > W_s$  мало искажается высокочастотным полем и, так же как в отсутствие поля, возможен только в неизоотермической плазме. При  $W_s > v_s$  (или  $v_E \gg \gg v_{Te}$ ) в плазме оказывается возможным специфический звук, обусловленный высокочастотным полем. Спектр (37.22) в этом пределе представляет собой продолжение спектра (37.19) в область низких фазовых скоростей или меньших напряженностей высокочастотных полей. Отметим, что в этом пределе колебания возможны как в неизоотермической, так и в изотермической плазме.

Исследуем теперь влияние внешнего магнитного поля на спектры колебаний плазмы в СВЧ электрическом поле. Иными словами, исследуем уравнение (37.15) в условиях, когда  $\delta \varepsilon_e(\omega, \mathbf{k})$  и  $\delta \varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})$  определяются формулами (см. § 23,  $\alpha = e, i$ ):

$$\delta \varepsilon_\alpha(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left[ 1 - \sum_n \frac{\omega}{\omega - n\Omega_\alpha} A_n \left( \frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} \right) J_n \left( \frac{\omega - n\Omega_\alpha}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right]. \quad (37.23)$$

При  $k_\perp = 0$  и  $\omega \gg \Omega_\alpha$  выражение (37.23) совпадает с (37.16), так как при этом оно перестает зависеть от магнитного поля, т. е. в этих условиях спектры колебаний такие же, как и в отсутствие магнитного поля. Поэтому рассмотрим теперь колебания при  $k_\perp \neq 0$ . Анализ уравнения (37.15) начнем с холодной плазмы, когда  $k_\perp v_{T\alpha} \ll \ll \Omega_\alpha$ ,  $|\omega - \Omega_\alpha| \gg k_z v_{T\alpha}$ . В этом пределе оно записывается в виде

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2 + \omega_{Li}^2}{\omega^2} \cdot \frac{k_z^2}{k^2} - \left( \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} + \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} \right) \frac{k_\perp^2}{k^2} +$$

$$+ [1 - J_0^2(\mathbf{k}r_E)] \frac{\omega_{Le}^2 \omega_{Li}^2}{\omega^4} \left( \frac{k_z^2}{k^2} + \frac{k_\perp^2}{k^2} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} \right) \cdot \left( \frac{k_z^2}{k^2} + \frac{k_\perp^2}{k^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} \right) = 0. \quad (37.24)$$

В области частот  $\omega \ll \Omega_i$  это уравнение сводится к биквадратному уравнению относительно  $\omega$ , корни которого приближенно равны:

$$\omega_1^2 = \frac{\omega_{Le}^2 k_z^2}{k^2} \left[ 1 + (1 - J_0^2(\mathbf{k}r_E)) \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2} \cdot \frac{k_\perp^2}{k^2} \right] \cdot \left\{ 1 + \frac{k_\perp^2}{k^2} \times \right.$$

$$\times \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2} \left[ 1 + (1 - J_0^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)) \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \cdot \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \right]^{-1}, \quad (37.25)$$

$$\omega_2^2 = \frac{k_z^2}{k^2} \omega_{Li}^2 (1 - J_0^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)) \left[ 1 + (1 - J_0^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)) \frac{\omega_{Li}^2 k_{\perp}^2}{\Omega_i^2 k^2} \right]^{-1}.$$

Первый спектр (37.25) в отсутствие высокочастотного электрического поля переходит в спектр низкочастотных колебаний холодной магнитоактивной плазмы (см. § 18); при слабых высокочастотных полях происходит небольшое искажение этого спектра. Второй спектр является новым, в отсутствие высокочастотного поля частота  $\omega_2 = 0$ , т. е. колебания отсутствуют. По своей природе эти колебания аналогичны звуковым колебаниям с высокочастотной осцилляцией электронов, исследованным выше [см. спектры (37.18) и (37.19)], и, так же как и в случае немагнитной плазмы, возможны, когда скорость осцилляций  $v_E > \frac{\omega_0}{\omega_{Li}} v_{Te} \gg \sqrt{\frac{M}{m}} v_{Te}$ .

Рассмотрим теперь спектры колебаний магнитоактивной плазмы в высокочастотном электрическом поле в области промежуточных фазовых скоростей  $v_{Ti} \ll \frac{\omega}{k_z} \ll v_{Te}$  и промежуточных частот  $\Omega_i < \omega < \Omega_e$ , т. е. в области, в которой в отсутствие высокочастотного поля и при сильной неизотермичности ( $T_e \gg T_i$ ) возможны ионно-звуковые колебания. Кроме того, пренебрегая для простоты тепловым движением ионов, из уравнения (37.15) получим

$$1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} - (1 - J_0^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)) \times \\ \times \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \cdot \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right) = 0. \quad (37.26)$$

Отсюда, учитывая малость мнимых слагаемых, обусловленных черенковской диссипацией волн на электронах плазмы, находим следующий спектр колебаний ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ ):

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \left[ 1 - \frac{J_0^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)}{1 + k^2 r_{De}^2} \right], \quad (37.27)$$

$$\delta = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{\omega_{Le}^2 \omega_{Li}^2}{k^2 |k_z| v_{Te}^3} \cdot \frac{J_0^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)}{[1 + (kr_{De})^{-2}]^2}.$$

Этот спектр аналогичен спектру (37.21), поэтому проведенный анализ сохраняет силу и в данном случае. Небольшое отличие обусловлено изменением характера черенковского поглощения волн на

электронах, что привело к увеличению декремента затухания волн в замагниченной плазме.

В заключение рассмотрим продольные колебания вырожденной плазмы в СВЧ электрическом поле. Ограничимся случаем немагнитной плазмы. В высокочастотном пределе  $\omega \gg kv_{Fe,i}$ , когда тепловым движением можно пренебречь, степень вырождения несущественна и справедливы формулы (37.17) ÷ (37.19). В области же промежуточных частот  $kv_{Fi} \ll \omega \ll kv_{Fe}$  из уравнения (37.15) при использовании выражения (17.18) (см. гл. IV) получаем

$$1 + 3 \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} \left( 1 + i \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{kv_{Fe}} \right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} - 3 [1 - J_0(kr_E)] \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} \left( 1 + i \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{kv_{Fe}} \right) = 0. \quad (37.28)$$

Это уравнение подобно (37.20) и приводит к спектру колебаний, подобному (37.21):

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \left[ 1 - \frac{J_0^2(kr_E)}{1 + k^2 v_{Fe}^2 / 3\omega_{Le}^2} \right], \quad (37.29)$$

$$\delta = - \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{\omega_{Le}^2 \omega_{Li}^2}{k^3 v_{Fe}^3} \cdot \frac{J_0^2(kr_E)}{[1 + (k^2 v_{Fe}^2 / 3\omega_{Le}^2)^{-2}]^2}.$$

Отсюда, в частности, следует, что в вырожденной плазме, так же как и в невырожденной, возможны специфические звуковые волны, обусловленные высокочастотным электрическим полем. Так, в пределе  $k^2 v_{Fe}^2 \ll \omega_{Le}^2$  и  $kr_E \ll 1$  имеем [ср. с (37.22)]

$$\omega^2 = k^2 v_s^2 + (k\mathbf{W}_s)^2, \quad (37.30)$$

$$\delta = - \frac{3\pi}{4} \sqrt{\frac{m}{M}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} k v_s,$$

$$\text{где } v_s^2 = \frac{m}{3M} v_{Fe}^2, \text{ а } \mathbf{W}_s = \frac{\omega_{Li}}{\omega_0} \cdot \frac{v_E}{\sqrt{2}}.$$

Для реального проявления такого звука, однако, необходимо, чтобы  $v_E \geq v_{Fe}$ .

### § 38. Параметрическое взаимодействие сверхвысокочастотного электрического поля с плазмой

Как было показано, в плазме во внешнем СВЧ (сверхвысокочастотном, или просто высокочастотном) электрическом поле в условиях, когда частота поля значительно больше всех частот колеба-



ний плазмы, появляется ряд новых специфических спектров колебаний, а также искажаются спектры, характерные для плазмы в отсутствие высокочастотного поля. Существенно при этом, что колебания являются устойчивыми, т. е. их амплитуды не нарастают во времени. Иное положение имеет место, если частота внешнего поля близка к одной из частот колебаний плазмы. В этом случае происходит сильное параметрическое взаимодействие высокочастотного поля с плазмой, и даже при малых значениях поля возможно появление в плазме нарастающих колебаний.

Чтобы убедиться в этом, вновь вернемся к системе уравнений (37.13) и предположим, что частота внешнего поля  $\omega_0$  порядка электронных собственных частот плазмы и тем самым намного больше ионных частот. Например, для немагнитиченной плазмы  $\omega_0 \approx \omega_{Le}$  и, следовательно,  $\omega_0 \gg \omega_{Li}$ . При этом в системе (37.13) малыми являются величины  $\delta\epsilon_i(\omega + n\omega_0)$  для всех  $n \neq 0$ . Это позволяет считать отличной от нуля лишь величину  $u_{i0}$  и условие разрешимости системы записать в виде

$$1 = \frac{\delta\epsilon_i(\omega, \mathbf{k})}{1 + \delta\epsilon_i(\omega, \mathbf{k})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\mathbf{k}r_E) \frac{\delta\epsilon_e(\omega + n\omega_0, \mathbf{k})}{1 + \delta\epsilon_e(\omega + n\omega_0, \mathbf{k})}. \quad (38.1)$$

Отсюда, в частности, при  $\omega_0 \gg \omega_{Le}$ , когда в сумме по  $n$  можно ограничиться лишь вкладом слагаемого с  $n = 0$ , снова получаем уравнение (37.15).

Проанализируем уравнение (38.1) в пределе холодной плазмы, когда  $\omega \gg kv_{Ti}$ ;  $(\omega \pm n\omega_0) \gg kv_{Te}$  и пространственной дисперсией в парциальных диэлектрических проницаемостях  $\delta\epsilon_e(\omega + n\omega_0, \mathbf{k})$  и  $\delta\epsilon_i(\omega, \mathbf{k})$  можно пренебречь. Кроме того, для простоты плазму будем считать бесстолкновительной, а ионы — немагнитиченными, что позволяет переписать уравнение (38.1) в виде

$$\frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} = 1 - \sum_n J_n^2(\mathbf{k}r_E) \frac{\delta\epsilon_e(\omega + n\omega_0)}{1 + \delta\epsilon_e(\omega + n\omega_0)}. \quad (38.2)$$

Отсюда сразу видно, что гидродинамически неустойчивые решения с  $\omega^2 < 0$  возможны только в области частот  $\omega_0 \gg |\omega|$  и в условиях, когда для  $n \neq 0$

$$|1 + \delta\epsilon_e(n\omega_0)| \ll 1. \quad (38.3)$$

Это означает, что сильная неустойчивость может возникнуть, если частота внешнего СВЧ электрического поля либо ее обертоны близки к собственным частотам продольных электронных колебаний плазмы. Полагая в правой части  $\omega = 0$ , из уравнения (38.2) в первом приближении находим

$$\omega^2 = \frac{2J_n^2(\mathbf{k}r_E) \omega_{Li}^2}{1 + \delta\epsilon_e(n\omega_0)}. \quad (38.4)$$

В отсутствие сильного внешнего магнитного поля (при  $\omega_0 \gg \Omega_e$ ) отсюда получаем

$$\frac{\omega^2}{\omega_{Le}^2} = \frac{m}{M} \cdot \frac{2J_n^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)}{1 - \frac{\omega_{Le}^2}{n^2\omega_0^2}}. \quad (38.5)$$

Видно, что плазма неустойчива ( $\omega^2 < 0$ ) в области своей непрозрачности по отношению к СВЧ полю:

$$n^2\omega_0^2 \leq \omega_{Le}^2. \quad (38.6)$$

При выполнении равенства (38.6) инкремент нарастания неустойчивости неограниченно возрастает, и формула (38.5) теряет смысл. В этом резонансном случае в правой части уравнения (38.2) уже нельзя полагать  $\omega = 0$ , необходимо учесть члены порядка  $\omega^2/n^2\omega_0^2$ . Рассмотрим эту область частот СВЧ поля подробнее. Из (38.2) следует уравнение

$$\frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} = 1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E) \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_{Le}^2 - (n\omega_0 + \omega)^2}, \quad (38.7)$$

которое в условиях

$$\omega^2 \gg \omega_{Li}^2, \quad 1 \gg |\Delta_n| \equiv \left| \frac{\omega_{Le}^2}{n^2\omega_0^2} - 1 \right| \gg \sqrt{\frac{m}{M}} \quad (38.8)$$

записывается в виде

$$4 \frac{\omega^4}{\omega_{Le}^4} - \frac{\omega^2}{\omega_{Le}^2} \Delta_n^2 - 2J_n^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E) \frac{m}{M} \Delta_n = 0. \quad (38.9)$$

Величину  $\Delta_n$  называют расстройкой частоты при резонансном параметрическом взаимодействии СВЧ поля с плазмой. Согласно (38.9) инкремент нарастания колебаний  $\text{Im}\omega$  является функцией  $\Delta_n$ . При больших расстройках, когда

$$\Delta_n^2 \gg \frac{\omega^2}{\omega_{Le}^2} = -\frac{2 \frac{m}{M} J_n^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)}{\Delta_n}, \quad (38.10)$$

справедливо решение (38.5), и инкремент нарастания  $\text{Im}\omega \sim \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \omega_{Le}$ . С уменьшением расстройки инкремент возрастает и при условии

$$\frac{\omega^2}{\omega_{Le}^2} \Delta_n + \frac{m}{M} J_n^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E) = 0 \quad (38.11)$$

достигает максимума:

$$\frac{\omega^2}{\omega_{Le}^2} = -\left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{M} J_n^2(\mathbf{k}\mathbf{r}_E) \right]^{2/3}. \quad (38.12)$$

Таким образом, максимальный инкремент нарастания  $\text{Im } \omega \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/3} \omega_{Le}$  также достигается в области непрозрачности плазмы  $\Delta_n > 0$  (т. е.  $n\omega_0 < \omega_{Le}$ ), причем резонансная расстройка  $(\Delta_n)_{\text{max}} \approx \left[4 \frac{m}{M} J_n^2(kr_E)\right]^{1/3}$ .

$$(38.13)$$

Не следует думать, что неустойчивость имеет место только в области непрозрачности плазмы по отношению к СВЧ полю; плазма неустойчива и в области прозрачности  $n\omega_0 > \omega_{Le}$ . Однако при этом неустойчивость становится кинетической с малым инкрементом нарастания (см. задачу 9 к этой главе). На рис. 26 показана зависимость инкремента нарастания гидродинамической параметрической неустойчивости в незамагниченной плазме от отношения  $\omega_0/\omega_{Le}$ .

Внешнее продольное (параллельное СВЧ электрическому полю) магнитное поле не влияет на рассмотренную неустойчивость, пока оно слабое и  $\Omega_e < \omega_0$ . В сильных же полях при  $\Omega_e > \omega_0$  появляются качественно новые особенности в характере параметрического взаимодействия внешнего СВЧ поля с плазмой. Эти особенности связаны с существованием двух ветвей электронных продольных колебаний магнитоактивной плазмы, называемых верхней и нижней гибридными колебаниями и определяемых формулами (см. § 24)

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2)^2 - 4\omega_{Le}^2 \Omega_e^2 \cos^2 \vartheta}, \quad (38.14)$$

где  $\vartheta$  — угол между волновым вектором колебаний и магнитным полем.

Параметрическая неустойчивость в магнитоактивной плазме возникает, когда обертоны частоты СВЧ поля близки к одной из собственных частот (38.14), т. е.

$$n^2 \omega_0^2 \approx \omega_\alpha^2 \quad (38.15)$$

для  $\alpha = 1, 2$ .

Анализ параметрической неустойчивости в магнитоактивной плазме проводят так же, как и в отсутствие магнитного поля. Более того,

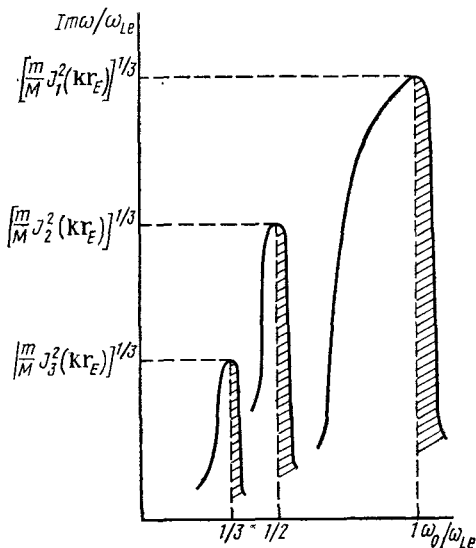


Рис. 26

вводя расстройку частоты вблизи резонансных частот (38.15) для  $\alpha = 1, 2$ :

$$\Delta_{n\alpha} = \cos^2 \vartheta \frac{\omega_{L_e}^2}{n^2 \omega_0^2 - \omega_e^2} + \sin^2 \vartheta \frac{\omega_{L_e}^2}{n^2 \omega_0^2} - 1, \quad (38.16)$$

уравнение (38.2) в условиях (38.8) можно записать в виде

$$A_\alpha^2 \frac{\omega^4}{\omega_{L_e}^4} - \frac{\omega^2}{\omega_{L_e}^2} \Delta_{n\alpha}^2 - 2J_n^2(\mathbf{kr}_E) \cdot \frac{m}{M} \Delta_{n\alpha} = 0, \quad (38.17)$$

где

$$A_\alpha = - \frac{\partial \Delta_{n\alpha}}{\partial n \omega_0} = - \frac{\partial \delta \epsilon_e(n \omega_0)}{\partial n \omega_0}. \quad (38.18)$$

Уравнение (38.17) аналогично (38.9) и при больших расстройках, когда

$$A_\alpha^{-2} \Delta_{n\alpha}^2 \gg \frac{\omega^2}{\omega_{L_e}^2} = - \frac{2 \frac{m}{M} J_n^2(\mathbf{kr}_E)}{\Delta_n}, \quad (38.19)$$

также приводит к инкременту нарастания  $\text{Im} \omega \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \omega_{L_e}$ .

С уменьшением расстройки инкремент возрастает и при условии

$$(\Delta_{n\alpha})_{\max} \approx \left( A_\alpha^2 \frac{m}{M} J_n^2(\mathbf{kr}_E) \right)^{1/3} \quad (38.20)$$

достигает максимума:

$$\frac{\omega^2}{\omega_{L_e}^2} = - \left( \frac{1}{|A_\alpha|} \cdot \frac{m}{M} J_n^2(\mathbf{kr}_E) \right)^{2/3}, \quad (38.21)$$

т. е.  $\text{Im} \omega \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/3} \omega_{L_e}$ .

В пределе слабого магнитного поля  $\mathbf{B}_0 \rightarrow 0$  две собственные частоты  $\omega_\alpha$  вырождаются в одну частоту  $\omega_{L_e}$ , величина  $A_\alpha \rightarrow 2$ , и формулы (38.15)  $\div$  (38.21) переходят в (38.6)  $\div$  (38.12). Не меняется характер параметрического взаимодействия сильного СВЧ поля с плазмой и в случае конечного магнитного поля, если  $\vartheta = 0$ , т. е. для колебаний, распространяющихся строго вдоль магнитного поля. Наконец, в пределе очень сильного магнитного поля  $\mathbf{B}_0 \rightarrow \infty$  формулы (38.15)  $\div$  (38.21) отличаются от (38.6)  $\div$  (38.12) простой заменой  $\omega_{L_e} \rightarrow \omega_{L_e} \cos \vartheta$ , а в остальном взаимодействие СВЧ поля с плазмой носит такой же характер, как и в отсутствие магнитного поля.

В заключение заметим, что параметрическая неустойчивость плазмы в СВЧ поле по своей природе аналогична гидродинамической аperiодической неустойчивости плазмы в постоянном электрическом поле в условиях, когда скорость дрейфа электронов больше их тепловой скорости (см. § 35). Параметрическая неустойчивость также обусловлена

относительным движением электронов и ионов, но это движение носит осцилляционный характер, что в свою очередь приводит к резонансной зависимости инкрементов нарастания неустойчивости от частоты СВЧ поля — неустойчивость имеет место, когда обертоны частоты СВЧ поля близки к собственным частотам продольных электронных колебаний плазмы. Наконец, так же как гидродинамическая неустойчивость плазмы с током, параметрическая неустойчивость возможна только в сильных СВЧ полях, когда скорость дрейфа (осцилляций) электронов больше их тепловой скорости, т. е.  $v_E \gg v_{Te}$ .

Параметрическая раскачка колебаний в плазме внешним сверхвысокочастотным полем может, однако, происходить и при малых напряженностях СВЧ поля, когда скорость осцилляций электронов значительно меньше их тепловой скорости. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим уравнение (38.1) в условиях малых напряженностей СВЧ полей,  $kr_E \ll 1$ . При этом в сумме по функциям Бесселя достаточно ограничиться первыми тремя слагаемыми с  $n = 0, \pm 1$ . В результате уравнение (38.1) сводится к виду

$$\frac{1 + \delta\epsilon_i(\omega, \mathbf{k}) + \delta\epsilon_e(\omega, \mathbf{k})}{\delta\epsilon_i(\omega, \mathbf{k}) [1 + \delta\epsilon_e(\omega, \mathbf{k})]} + \frac{(kr_E)^2}{4} \left[ \frac{1}{\epsilon(\omega + \omega_0, \mathbf{k})} + \frac{1}{\epsilon(\omega - \omega_0, \mathbf{k})} \right] = 0. \quad (38.22)$$

При выводе этого уравнения предполагалось, что  $\omega_{Li} \ll \omega_0$ , а  $\omega_0$  в свою очередь порядка собственных частот продольных электронных колебаний, так что  $\epsilon(\omega \pm \omega_0) \approx 1 + \delta\epsilon_e(\omega \pm \omega_0) \ll 1$ .

Анализ уравнения (38.22) начнем с бесстолкновительной немагнитной плазмы во внешнем СВЧ поле, причем рассмотрим колебания в области низких частот  $\omega \ll kv_{Ti}$ . Считая длину волны значительно больше дебаевского радиуса электронов, из уравнения (38.22) получаем

$$\frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega_{Li}^2} \left( 1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega}{kv_{Ti}} \right) + \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega_{Le}^2} \left( 1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega}{kv_{Te}} \right) + \frac{1}{2} (kr_E)^2 \left[ \frac{\omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)}{(\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)^2 - 4\omega_0^2 \omega^2} \right] = 0. \quad (38.23)$$

Учитывая малость мнимого слагаемого, обусловленного черенковской диссипацией волны на электронах плазмы, уравнение (38.23) можно свести к виду

$$\omega_0^2 \Delta^2 - 4\omega^2 - \eta \omega_0^2 \Delta \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega}{kv_{Ti}} \cdot \frac{T_i}{T_e + T_i} \right) = 0. \quad (38.24)$$

Здесь  $\eta = \frac{E_0^2 \cos^2 \vartheta}{8\pi N (T_e + T_i)}$  характеризует отношение плотностей энер-

гии СВЧ поля, вызывающего развитие неустойчивости, и внутренней энергии плазмы ( $\vartheta$  — угол между внешним высокочастотным полем и волновым вектором);  $\Delta = \omega_{Le}^2/\omega_0^2 - 1$  — расстройка частоты СВЧ поля. Выпишем приближенные корни этого уравнения в области малых частот (инкрементов):

$$\omega = \begin{cases} i \frac{\eta - \Delta}{\eta} kv_{Ti} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{T_e + T_i}{T_i} \text{ при } \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \ll \Delta^2 - \eta\Delta, \\ \pm \sqrt{\frac{\Delta^2 - \eta\Delta}{4}} \omega_0 \text{ при } \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \approx \frac{\Delta^2 - \eta\Delta}{4}. \end{cases} \quad (38.25)$$

Отсюда видно, что рассматриваемые колебания возможны только при  $\Delta > 0$ , т. е. в области частот  $\omega_0^2 < \omega_{Le}^2$ , когда плазма непрозрачна по отношению к высокочастотному полю. При этом колебания аperiodически неустойчивы, если  $\eta \geq \Delta$ , и чем меньше расстройка  $\Delta$ , тем меньше минимально необходимое значение  $\eta$ , т. е. тем меньше критическое высокочастотное поле, вызывающее параметрическую неустойчивость плазмы. Из условия применимости бесстолкновительного приближения (условия пренебрежения столкновениями в выражениях  $\delta\varepsilon(\omega \pm \omega_0)$ ) следует, что  $|\Delta| > \nu_e/\omega_0$ , где  $\nu_e$  — частота столкновений электронов с ионами, либо с нейтральными частицами. Следовательно, для развития аperiodической неустойчивости необходимо, чтобы

$$\eta = \frac{E_0^2 \cos^2 \vartheta}{8\pi N (T_e + T_i)} > 4 \frac{\nu_e}{\omega_0} \ll 1 \quad (38.26)$$

(численный коэффициент 4 находится при более точном учете столкновений частиц, см. задачу 10 к этой главе). Отношение скорости высокочастотных осцилляций электронов к их тепловой скорости при этом является малой величиной,  $v_E^2/v_{Te}^2 \sim \eta \ll 1$ .

При еще меньших напряженностях СВЧ полей возникает параметрическая неустойчивость в неизотермической плазме с  $T_e \gg T_i$ , в которой возможно существование ионно-звуковых колебаний. Именно их и возбуждает высокочастотное электрическое поле. В области частот ионно-звуковых колебаний  $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$  при  $k^2 v_{Te}^2 \ll \ll \omega_{Le}^2$  уравнение (38.22) принимает вид

$$-\frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} + \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega_{Le}^2} \left( 1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega}{kv_{Te}} \right) - \frac{(k\Gamma_E)^2}{2} \cdot \frac{\Delta}{\Delta^2 - 4\omega^2/\omega_0^2} = 0. \quad (38.27)$$

Существенно, что ионно-звуковые колебания могут параметрически возбуждаться в области прозрачности плазмы по отношению к СВЧ полю, когда  $\Delta < 0$  (т. е.  $\omega_0^2 > \omega_{Le}^2$ ). Действительно, при резонансном условии

$$\omega^2 = k^2 v_s^2 = (\omega_0 - \omega_{Le})^2, \quad (38.28)$$

или

$$\omega_0 = \omega_{Le} + kv_s, \quad (38.28a)$$

т. е. когда частота СВЧ поля равна сумме электронной ленгмюровской частоты и частоты ионно-звуковых колебаний, из уравнения (38.27) находим инкремент нарастания параметрической неустойчивости\* ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ ):

$$\delta = \frac{(\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)}{16\omega^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{(kr_E)^2}{k^2 r_{De}^2} kv_{Te}. \quad (38.29)$$

Видно, что неустойчивость имеет место в области прозрачности плазмы при  $\omega_0^2 > \omega_{Le}^2$ . Из условия пренебрежения столкновениями электронов в диэлектрической проницаемости  $\epsilon(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k})$  при этом следует, что  $\text{Im } \omega = \delta > \nu_e$ , или

$$\eta = \frac{E_0^2 \cos^2 \vartheta}{8\pi N T_e} > \sqrt{8\pi \frac{m}{M}} \cdot \frac{\nu_e}{\omega_0}. \quad (38.30)$$

Легко видеть, что порог, определяемый неравенством (38.30), значительно ниже, чем (38.26).

Исследуем влияние внешнего продольного магнитного поля на параметрические неустойчивости плазмы в слабом СВЧ поле. Прежде всего отметим еще раз, что для волн, распространяющихся вдоль магнитного поля, т. е. при  $\vartheta = 0$ , полученные формулы (38.23) ÷ (38.30) справедливы и для магнитоактивной плазмы. Для волн же, распространяющихся под углом  $\vartheta$  к магнитному полю, как и в случае аperiодической параметрической неустойчивости в сильном СВЧ поле, появляется возможность параметрического взаимодействия СВЧ поля с плазмой на верхней и нижней электронных гибридных частотах [ср. с (38.15)]:

$$\omega_0^2 \approx \omega_\alpha^2, \quad (38.31)$$

где частоты  $\omega_\alpha$  для  $\alpha = 1, 2$  определены соотношением (38.14).

Подробного анализа параметрических неустойчивостей магнитоактивной плазмы в слабом СВЧ поле здесь проводить не будем (см. задачу 11 к данной главе). Отметим лишь, что на обеих ветвях электронных колебаний возможны как аperiодическая, так и ионно-звуковая (в случае неизотермической плазмы с  $T_e \gg T_i$ ) параметрические неустойчивости, причем инкремент их нарастания и пороги возбуждения по порядку величины такие же, как и в отсутствие магнитного поля.

В заключение кратко обсудим возможность проявления параметрической неустойчивости в вырожденной плазме твердого тела. Для простоты будем считать электроны плазмы вырожденными, а ионы — невырожденными. Так как в вырожденной плазме трудно осуществ-

\* Параметрическую неустойчивость можно объяснить как распад нелинейной волны в неизотермической плазме на электронную ленгмюровскую и ионно-звуковую волны, поскольку неустойчивость сопровождается нарастанием амплитуд ленгмюровской и ионно-звуковой волн в плазме (см. также гл. XII).

вить скорость осцилляций электронов больше скорости Ферми, ограничимся рассмотрением параметрического взаимодействия слабого СВЧ поля с плазмой, считая скорость осцилляций малой. Иными словами, ограничимся анализом уравнения (38.22) для вырожденной немагнитической плазмы. Поскольку в плазме с вырожденными электронами  $v_{Fe} \gg T_e \gg T_i$ , в ней всегда возможны низкочастотные ионно-звуковые колебания. Поэтому наименьшим порогом обладает параметрическая неустойчивость, обусловленная возбуждением таких колебаний в области частот  $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Fe}$ . Если к тому же считать  $k^2 v_{Fe}^2 \ll \omega_{Le}^2$ , то в области параметрического резонанса  $\omega_0 \approx \omega_{Le} \gg \omega$  из (38.22) получаем

$$-\frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} + \frac{k^2 v_{Fe}^2}{3\omega_{Le}^2} \left(1 - i \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{kv_{Fe}}\right) - \frac{(kr_E)^2}{2} \cdot \frac{\Delta}{\Delta^2 - 4 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = 0, \quad (38.32)$$

где также  $\Delta = \omega_{Le}^2/\omega_0^2 - 1$ , причем при выводе этого уравнения предполагалось, что  $\Delta \gg v_e/\omega_0$  и  $\text{Im} \omega \gg v_e$ .

Уравнение (38.32) имеет такой же вид, как и (38.27). Поэтому, вводя  $v_s^2 = 3 \frac{m}{M} v_{Fe}^2$ , имеем такие же условия резонанса, как и для невырожденной плазмы, т. е. (38.28). По существу не меняются инкремент нарастания параметрической неустойчивости [ср. с (38.22)]:

$$\delta = \frac{\omega_0^2 - \omega_{Le}^2}{24\pi\omega^2} \cdot \frac{(kr_E)^2}{k^2 r_D^2} kv_{Fe} \quad (38.33)$$

и порог ее возникновения [ср. с (38.30)]:

$$\eta = \frac{E_0^2 \cos^2 \vartheta}{8\pi N v_{Fe}^2} > \frac{3}{4} \cdot \frac{v_e}{\omega_0}, \quad (38.34)$$

где  $v_e$  — эффективная частота столкновений электронов (обратное время релаксации импульса) в вырожденной плазме.

## Задача к главе VII

**Задача 1.** Оценить число убегающих электронов в полностью ионизованной плазме при  $E_0 < E_{кр}$ .

**Решение.** Функция распределения (34.13) в этом случае справедлива в среднем для основной массы электронов. Однако небольшая группа электронов даже при  $E_0 < E_{кр}$  непрерывно ускоряется и входит в режим убегания. Очевидно, в режим ускорения попадут электроны, начальные скорости которых вдоль электрического поля больше их тепловой скорости. Действительно, движение таких электронов в электрическом поле подчиняется уравнению

$$\frac{du}{dt} = \frac{eE_0}{m} - v_e u = \frac{eE_0}{m} - \frac{v_{ei}(T_e) v_{Te}^3}{u^3} u. \quad (1)$$

Вводя величину

$$u_{кр}^2 = \frac{v_{ei}(T_e) m}{eE_0} v_{Te}^3 = v_{Te}^2 \frac{E_{кр}}{E_0} > v_{Te}^2, \quad (2)$$



уравнение (1) запишем в виде

$$u^2 \frac{du}{dt} = \frac{eE_0}{m} (u^2 - u_{кр}^2). \quad (3)$$

Отсюда видно, что при начальной скорости  $u_0 > u_{кр}$  происходит непрерывное ускорение электронов.

Таким образом, число убегающих электронов  $N_b$  в поле  $E_0 < E_{кр}$  определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{N_b}{N_e} &= \frac{1}{(2\pi T_e m)^{3/2}} \int_{v_z > u_{кр}} dp_e \frac{-\frac{mv^2}{2T_e}}{V 2\pi m T_e} = \frac{1}{V 2\pi m T_e} \int_{u_{кр}}^{\infty} dp_z e^{-\frac{p_z^2}{2mT_e}} = \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi T_e}} \int_{u_{кр}}^{\infty} dv e^{-\frac{v^2}{2v_{Te}^2}} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{u_{кр}}{\sqrt{2} v_{Te}} \right) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$  — интеграл ошибок.

В пределе очень слабых полей, когда  $u_{кр} \gg v_{Te}$ , (т. е.  $E_0 \ll E_{кр}$ ) с хорошей степенью точности

$$\frac{N_b}{N_e} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u_{кр}^2}{2v_{Te}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{E_{кр}}{E_0}}. \quad (5)$$

С ростом поля  $E_0$  число убегающих электронов экспоненциально растет.

**Задача 2.** Исходя из уравнения (35.5) показать, что высокочастотная неустойчивость немагнитиченной плазмы в сильном электрическом поле сохраняется и при нарушении условий (35.3), но при этом она становится кинетической.

**Решение.** В сильном электрическом поле, когда скорость дрейфа электронов  $u \gg v_{Te}$  (но все же  $u^2 \ll c^2$ ), из уравнения (35.5) получаем

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\omega - \mathbf{k}u)^2} \left[ 1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{(\omega - \mathbf{k}u)^3}{k^3 v_{Te}^3} e^{-\frac{(\omega - \mathbf{k}u)^2}{2k^2 v_{Te}^2}} \right] - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} = 0. \quad (1)$$

При условии  $(\mathbf{k}u)^2 > \omega_{Le}^2$  [обратном (35.3)] отсюда находим  $(\omega \rightarrow \omega + i\delta)$

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{\omega_{Li}^2}{1 - \omega_{Le}^2 / (\mathbf{k}u)^2} \approx \omega_{Li}^2, \\ \delta &= \sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{M}{m} \cdot \frac{\omega^3}{k^3 v_{Te}^3} \mathbf{k}u e^{-\frac{(\mathbf{k}u)^2}{2k^2 v_{Te}^2}}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Видно, что инкремент нарастания рассмотренной кинетической неустойчивости всегда экспоненциально мал.

**Задача 3.** Показать, что в изотермической магнитоактивной плазме с  $T_e \sim \sim T_i$  при скоростях дрейфа электронов, меньших их тепловой скорости, возможно возбуждение ионных циклотронных колебаний.

Решение. Легко показать, что в рассматриваемых условиях возможно возбуждение коротковолновых ( $k_{\perp} \rho_{\Lambda i} \gg 1$ ) ионных циклотронных колебаний, распространяющихся почти поперек магнитного поля ( $(\omega - \Omega_i) \gg k_z v_{Ti}$ ) и подчиняющихся дисперсионному уравнению

$$1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}}{|k_z| v_{Te}} + \frac{T_e}{T_i} \left[ 1 - \frac{\omega}{\omega - \Omega_i} A_1(k_{\perp}^2 \rho_{\Lambda i}^2) \right] + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{A_1 \omega}{|k_z| v_{Ti}} \exp \left[ -\frac{(\omega - \Omega_i)^2}{2k_z^2 v_{Ti}^2} \right] = 0, \quad (1)$$

$$\text{где } A_1(k_{\perp}^2 \rho_{\Lambda i}^2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} k_{\perp} \rho_{\Lambda i}}.$$

Из (1) находим спектр колебаний ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ ):

$$\omega = \Omega_i \left[ 1 + \frac{A_1(k_{\perp}^2 \rho_{\Lambda i}^2)}{1 + T_i/T_e} \right], \quad (2)$$

$$\delta = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Omega_i A_1(k_{\perp}^2 \rho_{\Lambda i}^2)}{2 + \frac{T_i}{T_e} + \frac{T_e}{T_i}} \left[ \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}}{|k_z| v_{Te}} + \frac{T_e}{T_i} \cdot \frac{\omega A_1}{|k_z| v_{Ti}} e^{-\frac{(\omega - \Omega_i)^2}{2k_z^2 v_{Ti}^2}} \right].$$

Колебания становятся неустойчивыми ( $\delta > 0$ ) при условии

$$u > \frac{\Omega_i}{|k_z|} \left\{ 1 + \frac{T_e}{T_i} \cdot \frac{v_{Te}}{v_{Ti}} A_1(k_{\perp}^2 \rho_{\Lambda i}^2) \cdot \exp \left[ -\frac{\Omega_i^2}{2k_z^2 v_{Ti}^2} \frac{A_1^2(k_{\perp}^2 \rho_{\Lambda i}^2)}{(1 + T_i/T_e)^2} \right] \right\}. \quad (3)$$

Минимизируя это выражение по  $k_{\perp}$  и  $k_z$ , получим оценку для пороговой скорости дрейфа электронов при  $k_{\perp} \rho_{\Lambda i} \sim 1$ :

$$\frac{u_{\text{пор}}}{v_{Ti}} \approx 4 \sqrt{\pi} \left( 1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \sqrt{\ln \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \frac{M}{m}}. \quad (4)$$

Следует заметить, что рассмотренная неустойчивость возможна и в вырожденной плазме твердого тела. Так, например, в плазме с вырожденными электронами и невырожденными ионами дисперсионное уравнение записывается в виде

$$1 + i \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}}{|k_z| v_{Fe}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\mathcal{E}_{Fe}}{T_i} \left[ 1 - \frac{\omega}{\omega - \Omega_i} A_1(k_{\perp}^2 \rho_{\Lambda i}^2) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega A_1(k_{\perp}^2 \rho_{\Lambda i}^2)}{|k_z| v_{Ti}} \exp \left( -\frac{(\omega - \Omega_i)^2}{2k_z^2 v_{Ti}^2} \right) \right] = 0. \quad (5)$$

Это уравнение подобно уравнению (1) и приводит к подобным же следствиям (2) ÷ (4) с заменой  $T_e \rightarrow \mathcal{E}_{Fe}$ .

**Задача 4.** Показать, что ионно-звуковая неустойчивость может развиваться в слабоионизованной неизоэргической плазме с током также в пределе частых столкновений, когда длины свободного пробега электронов и ионов меньше длины волны ионно-звуковых колебаний.

Решение. Для простоты ограничимся анализом низкочастотных ( $\omega \ll \ll \Omega_i$ ) и длинноволновых ( $k_{\perp} v_{Ti} \ll \Omega_i$ ) колебаний, когда общее дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned}
& 1 + \sum_{\alpha=e, i} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left[ 1 - \sum_n \frac{\omega - \mathbf{k}u_\alpha + i\nu_\alpha}{\omega - \mathbf{k}u_\alpha + i\nu_\alpha - n\Omega_\alpha} A_n \left( \frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} \right) \right] \times \\
& \times J_+ \left( \frac{\omega - \mathbf{k}u_\alpha + i\nu_\alpha - n\Omega_\alpha}{k_z v_{T\alpha}} \right) \left[ 1 - \sum_n \frac{i\nu_\alpha}{\omega - \mathbf{k}u_\alpha + i\nu_\alpha - n\Omega_\alpha} \times \right. \\
& \left. \times A_n \left( \frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} \right) J_+ \left( \frac{\omega - \mathbf{k}u_\alpha + i\nu_\alpha - n\Omega_\alpha}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right]^{-1} = 0 \quad (1)
\end{aligned}$$

упрощается и принимает вид

$$1 + \sum_{\alpha=e, i} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \cdot \frac{(\omega - \mathbf{k}u_\alpha + i\nu_\alpha) \left[ \frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} - \frac{k_z^2 v_{T\alpha}^2}{(\omega + i\nu_\alpha)^2} \right]}{\omega - \mathbf{k}u_\alpha + i\nu_\alpha \left[ \frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} - \frac{k_z^2 v_{T\alpha}^2}{(\omega + i\nu_\alpha)^2} \right]} = 0. \quad (2)$$

Если скорость дрейфа электронов  $u \ll v_{Te}$ , то неустойчивые решения этого уравнения в плазме в пределе частых столкновений ( $\nu_\alpha \gg k_z v_{T\alpha}$ ) следует ожидать в области частот  $\nu_e \gg \omega \gg \nu_i$ . Тогда

$$1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left[ 1 + i \frac{(\omega - \mathbf{k}u) \nu_e}{k_z^2 v_{Te}^2} \right] - \frac{k_z^2 \omega_{Li}^2}{k^2 \omega^2} \cdot \left( 1 + i \frac{\nu_i}{\omega} \right) = 0. \quad (3)$$

При получении этого уравнения, кроме того, было принято, что  $\omega \nu_e \ll k_z^2 v_{Te}^2$ , а  $\omega \nu_i \gg k_z^2 v_{Ti}^2$ , так как только в этих условиях, соответствующих высокой электронной теплопроводности и низкой ионной теплопроводности, в слабоионизованной плазме возможно существование ионно-звуковых волн (см. гл. IV).

Из уравнения (3) находим ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ )

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \omega_{Le}^2 \frac{k_z^2}{k^2} \left[ 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \right]^{-1}, \\
\delta &= -\frac{\nu_i}{2} - i \frac{m}{M} \cdot \frac{\nu_e (\omega - \mathbf{k}u) \omega^3}{2k_z^4 v_{Te}^4}. \quad (4)
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что система может стать неустойчивой благодаря изменению знака диффузионного поглощения при  $u > \omega/k_z \approx v_s$ .

**Задача 5.** Исходя из релятивистских уравнений движения частиц (модель независимых частиц) получить выражение для тензора диэлектрической проницаемости плазмы в сильном постоянном электрическом поле в адиабатическом приближении.

**Решение.** Запишем релятивистские уравнения движения:

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} N_\alpha \mathbf{V}_\alpha = 0,$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\alpha \nabla \right) \frac{\mathbf{V}_\alpha}{\sqrt{1 - V_\alpha^2/c^2}} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_\alpha \mathbf{B}] \right\}, \quad (1)$$

где  $\alpha = e, i$ .

В невозмущенном состоянии, однородном в пространстве, в полях  $\mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{B}_0 \parallel Oz$  имеем

$$\mathbf{V}_{\alpha 0} = \mathbf{u}_\alpha = e_\alpha E_0 t \left( m_\alpha^2 + \frac{e_\alpha^2 E_0^2 t^2}{c^2} \right)^{-1/2}. \quad (2)$$

В адиабатическом приближении равновесная скорость при колебаниях плазмы считается неизменной.

Линеаризуя систему (1) по малым возмущениям  $\delta \mathbf{V}_\alpha$  и  $\delta N_\alpha$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \delta N_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} (N_{0\alpha} \delta \mathbf{V}_\alpha + u_\alpha \delta N_\alpha) &= 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + u_\alpha \nabla \right) \left[ \frac{\delta \mathbf{V}_\alpha}{\sqrt{1 - u_\alpha^2/c^2}} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{u_\alpha (\delta \mathbf{V}_\alpha \cdot u_\alpha)}{\sqrt{(1 - u_\alpha^2/c^2)^3}} \right] &= \\ = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\delta \mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{B}_0] + \frac{1}{c} [u_\alpha \cdot \mathbf{B}_0] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и считая, что все возмущенные величины зависят от времени и координат в виде  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , из (3) легко находим  $\delta \mathbf{V}_\alpha$  и  $\delta N_\alpha$ , а следовательно, плотность индуцированного тока

$$j_i = \sum_\alpha e_\alpha (\delta N_\alpha u_{\alpha i} + i V_{\alpha i} N_{0\alpha}) = \sigma_{ij} E_j. \quad (4)$$

Окончательно для компонент тензора диэлектрической проницаемости получаем:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}, \quad (5) \\ \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} &= 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2 \omega_\alpha'^2 \gamma_\alpha^{-1}}{\omega^2 (\omega_\alpha'^2 - \Omega_\alpha^2)}, \\ \epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} &= -i \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2 \omega_\alpha' \Omega_\alpha \gamma_\alpha^{-1}}{\omega^2 (\omega_\alpha'^2 - \Omega_\alpha^2)}, \\ \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} &= - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2 u_\alpha \omega_\alpha' k_\perp}{\omega^2 (\omega_\alpha'^2 - \Omega_\alpha^2)}, \quad (6) \\ \epsilon_{yz} = -\epsilon_{zy} &= i \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2 u_\alpha k_\perp \Omega_\alpha}{\omega^2 (\omega_\alpha'^2 - \Omega_\alpha^2)}, \\ \epsilon_{zz} &= 1 - \sum_\alpha \left[ \frac{\omega_{L\alpha}^2 \gamma_\alpha^{-1}}{\omega_\alpha'^2} + \frac{k_\perp^2 u_\alpha^2 \omega_{L\alpha}^2 \gamma_\alpha}{\omega^2 (\omega_\alpha'^2 - \Omega_\alpha^2)} \right], \end{aligned}$$

где  $\omega_\alpha' = \gamma_\alpha (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_\alpha)$ ,  $\gamma_\alpha = (1 - u_\alpha^2/c^2)^{-1/2}$ .

Уравнения (35.2) и (36.1) получаются подстановкой полученного выражения (6) в (35.1).

**Задача 6.** Исследовать устойчивость плазмы в сильном электрическом поле по отношению к электростатическим колебаниям в адиабатическом приближении.

**Решение.** С помощью тензора диэлектрической проницаемости, полученного в предыдущей задаче, легко вывести искомое дисперсионное уравнение электростатических колебаний:

$$\varepsilon = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij} = \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \left[ 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} - \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-1}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2 - \Omega_e^2 \gamma^2} \right] + \frac{k_z^2}{k^2} \left[ 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-3}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2} \right] = 0. \quad (1)$$

Считая ионы немагнитными,  $\omega \gg \Omega_i$ , запишем это уравнение в виде

$$\omega_{Li}^2 / \omega^2 = 1 + \delta\varepsilon_e (\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}), \quad (2)$$

где

$$\delta\varepsilon_e (\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}) = - \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-1}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2 - \Omega_e^2 \gamma^2} - \frac{k_z^2}{k^2} \cdot \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-3}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2} \quad (3)$$

— парциальный вклад электронов в продольную диэлектрическую проницаемость плазмы.

Уравнение (2) имеет неустойчивые решения в области частот  $\omega \ll \mathbf{k}\mathbf{u}$  в условиях

$$1 + \delta\varepsilon_e (\mathbf{k}\mathbf{u}) \leq 0, \quad (4)$$

причем максимальный инкремент достигается при равенстве (4), когда доплеровская частота  $\mathbf{k}\mathbf{u}$  совпадает с одной из собственных частот продольных электронов колебаний плазмы (см. § 24):

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \left[ - \frac{\omega_{Li}^2}{\frac{\partial \delta\varepsilon_e (\mathbf{k}\mathbf{u})}{\partial \mathbf{k}\mathbf{u}}} \right]^{1/3}. \quad (5)$$

В отсутствие магнитного поля ( $\Omega_e \rightarrow 0$ ) формулы (4) и (5) принимают вид

$$\omega_{Le}^2 \left( \frac{k_z^2 + k_{\perp}^2 \gamma^2}{k^2} \right) \geq (\mathbf{k}\mathbf{u})^2 \gamma^3, \quad (6)$$

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \left( \frac{m}{2M} \right)^{1/3} \mathbf{k}\mathbf{u} \gamma \left( \frac{k^2}{k_{\perp}^2 \gamma^2 + k_z^2} \right)^{1/3}. \quad (7)$$

При  $k_{\perp} = 0$  эти формулы совпадают с (35.3) и (35.4), т. е. при  $k_{\perp} = 0$  справедливо электростатическое приближение. В обратном пределе бесконечно силь-

ного магнитного поля из (4) и (5) имеем

$$\omega_{Le}^2 \geq k^2 u^2 \gamma^3, \quad (8)$$

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \left( \frac{m}{2M} \right)^{1/3} k_z u \gamma \left( \frac{k^2}{k_z^2} \right)^{1/3}, \quad (9)$$

что в точности совпадает с (36.2) и (36.3). Это означает, что в сильно замагниченной плазме колебания с  $\omega \ll k_z u$  всегда с хорошей степенью точности потенциальны.

**Задача 7.** В модели независимых частиц исследовать устойчивость плазмы в сильном электрическом поле по отношению к электростатическим (потенциальным) колебаниям в неадиабатическом приближении.

**Решение.** В системе уравнений (3) задачи № 5 полагаем

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad \mathbf{V} = 0, \quad \Delta\Phi = \sum_{\alpha} 4\pi e_{\alpha} \delta N_{\alpha}. \quad (1)$$

Возмущенные величины ищем в виде  $f(t)\exp(ikr)$  и ограничиваемся для простоты колебаниями вдоль электрического поля, так что  $k_{\perp} = 0$ . В этом случае как для изотропной, так и для замагниченной плазмы получаем

$$\frac{\partial^2 \delta N_i}{\partial t^2} + \omega_{Li}^2 \left[ 1 - \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-3}}{(\mathbf{k}u)^2} \right]^{-1} \delta N_i = 0. \quad (2)$$

При выводе этого уравнения из системы (3) задачи № 5 было использовано предположение, что время нарастания неустойчивости намного больше  $\omega_{Le}^{-1}$  (точнее  $\partial/\partial t \ll \mathbf{k}u$ ), что следует из адиабатического приближения (см. § 35 и 36). В условиях

$$(\mathbf{k}u)^2 \gg \omega_{Le}^2 \gamma^{-3} \quad (3)$$

(при заданном значении  $k$  это соответствует большим временам после наложения на плазму поля  $E_0$ ) уравнение (2) имеет осциллирующее во времени решение

$$\delta N_i = C \sin(\omega_{Li} t + \varphi). \quad (4)$$

При условии, обратном (3), имеем уравнения

$$\frac{\partial^2 \delta N_i}{\partial t^2} - \frac{m}{M} \cdot \frac{k^2 e^2 E_0^2}{m^2} t^2 \delta N_i = 0 \quad \text{при } u \ll c, \quad \gamma = 1, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \delta N_i}{\partial t^2} - \frac{m}{M} \cdot \frac{k^2 e^3 E_0^3 t^3}{cm^3} \delta N_i = 0 \quad \text{при } u \approx c, \quad \gamma \gg 1$$

с решениями вида

$$\delta N_i = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{t} \left[ C_1 I_{1/4} \left( \sqrt{\frac{m}{M}} \cdot \frac{keE_0}{m} \cdot \frac{t^2}{2} \right) + C_2 I_{1/4} \left( \sqrt{\frac{m}{M}} \times \right. \right. \\ \quad \left. \left. \times \frac{keE_0}{m} \cdot \frac{t^2}{2} \right) \right] \quad \text{при } \gamma \approx 1, \\ \\ \sqrt{t} \left[ C_1 I_{1/5} \left( \sqrt{\frac{m}{M}} \cdot \frac{k^2 e^3 E_0^3}{m^3 c} \cdot \frac{2t^{5/2}}{5} \right) + \right. \\ \quad \left. + C_2 I_{1/5} \left( \sqrt{\frac{m}{M}} \cdot \frac{k^2 e^3 E_0^3}{m^3 c} \cdot \frac{2t^{5/2}}{5} \right) \right] \quad \text{при } \gamma \gg 1. \end{array} \right. \quad (6)$$

Отсюда следует, что при малых временах (малых аргументах функций Бесселя  $ku\gamma^{3/2}t \ll 1$ ) возмущение плотности плазмы линейно растет во времени:

$$\delta N_i \approx C_1 + C_2 t. \quad (7)$$

При больших же временах ( $ku\gamma^{3/2}t \gg 1$ ) наблюдается экспоненциальный рост возмущений:

$$\delta N_i = \begin{cases} t^{-1/2} \exp \left[ \sqrt{\frac{m}{M}} \cdot \frac{keE_0}{m} \cdot \frac{t^2}{2} \right] & \text{при } \gamma \approx 1, \\ t^{-3/4} \exp \left[ \sqrt{\frac{m}{M}} \cdot \frac{k^2 e^3 E_0^3}{cm^3} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} \right] & \text{при } \gamma \gg 1. \end{cases} \quad (8)$$

**Задача 8.** Показать, что в чисто электронной плазме во внешнем СВЧ поле возможна параметрическая раскачка ленгмюровских колебаний при учете релятивистских эффектов в скорости осцилляций электронов.

**Решение.** Запишем систему релятивистских уравнений в модели независимых частиц для электронной плазмы в СВЧ электрическом поле  $E_0 \sin \omega_0 t$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div} N\mathbf{V} &= 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{\mathbf{V}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} &= \frac{e}{m} \mathbf{E} = -\frac{e}{m} \nabla \Phi, \\ \Delta \Phi &= -4\pi e (N - N_0). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь  $N_0$  — однородная фоновая плотность ионов, компенсирующая заряд электронов в равновесном состоянии, в котором под действием СВЧ поля электроны осциллируют, причем скорость их осцилляций определяется соотношением

$$\frac{\mathbf{u}(t)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = -\frac{eE_0}{m\omega_0} \cos \omega_0 t \equiv -\mathbf{u}_0 \cos \omega_0 t. \quad (2)$$

Линеаризуя систему (1) по малым отклонениям от однородного равновесного состояния, имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \delta N}{\partial t} + ik(N_0 \delta \mathbf{V} + \delta N \mathbf{u}) &= 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{k}\mathbf{u} \right) \left[ \frac{\delta \mathbf{V}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \delta \mathbf{V})}{c^2(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \right] &= -i \frac{e}{m} \mathbf{k}\Phi, \\ k^2 \Phi &= 4\pi e \delta N. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ограничиваясь колебаниями вдоль СВЧ поля,  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{u}$  и исключая из системы (3) величины  $\delta \mathbf{V}$  и  $\Phi$ , получим  $(\delta \mathbf{V} \parallel \mathbf{u} \parallel \mathbf{k})$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + iku \right) \frac{1}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + iku \right) \delta N = -\omega_{Le}^2 \delta N. \quad (4)$$

С помощью замены

$$y = \frac{1}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \delta N \exp(i \int k u dt) \quad (5)$$

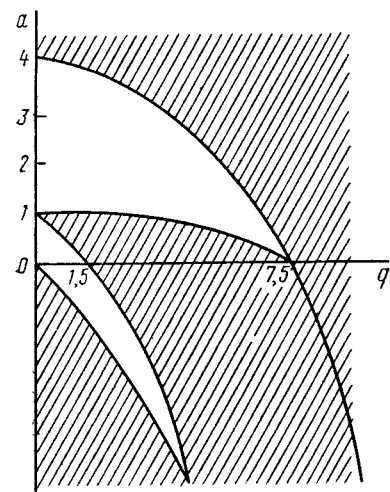


Рис. 27

уравнение (4) сводим к виду

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \omega_{Le}^2 \left[ 1 - \frac{u^2(t)}{c^2} \right]^{3/2} y = 0. \quad (6)$$

В случае слабого релятивизма с точностью до членов  $\sim u_0^2/c^2$  откуда получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \omega_{Le}^2 \left( 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{u_0^2}{c^2} \right) \times \\ & \times \left( 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{u_0^2}{c^2} \cos 2\omega_0 t \right) y = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

С помощью замены  $\tau = \omega_0 t$  это уравнение сводится к классическому уравнению Матье:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + (a - 2q \cos 2\tau) y = 0, \quad (8)$$

где

$$a = \frac{\omega_{Le}^2 \left( 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{u_0^2}{c^2} \right)}{\omega_0^2}, \quad q = \frac{3}{8} a \frac{u_0^2}{c^2}.$$

В зависимости от параметров  $a$  и  $q$  уравнение имеет как устойчивые, так и неустойчивые решения. На рис. 27 область неустойчивости заштрихована. В интересующем нас случае малых значений  $q \ll 1$  неустойчивость возникает при  $a = n^2$ , или

$$n^2 \omega_0^2 \approx \omega_{Le}^2 \left( 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{u_0^2}{c^2} \right),$$

причем временной инкремент роста  $y$  (т. е. плотности  $\delta N \sim \exp(\delta t)$ ) равен

$$\delta = \frac{3}{16} \omega_{Le} \frac{u_0^2}{c^2}.$$

Величина  $\delta$  и определяет ширину параметрического резонанса при малых значениях  $q$ , т. е. в нерелятивистском пределе.

**Задача 9.** С помощью уравнения (38.1) исследовать параметрическую кинетическую неустойчивость немагнитной неизотермической плазмы в сильном СВЧ электрическом поле, когда  $v_E \gg v_{Te}$  и длины волн возбуждаемых колебаний меньше дебаевского радиуса электронов,  $kr_{De} \gg 1$ , но  $kr_{Di} \ll 1$ .

**Решение.** Уравнение (38.1) в этих условиях можно записать в виде

$$1 + \frac{1}{\delta \varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})} = \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \sum_n J_n^2(kr_E) \left[ 1 - J_+ \left( \frac{n\omega_0 + \omega}{kv_{Te}} \right) \right]. \quad (1)$$

В области частот  $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$  откуда имеем



$$1 - \frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega^3}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}} \right) =$$

$$= i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{k^2 v_{De}^2} \sum_n J_n^2 \left( \frac{\omega + n\omega_0}{k v_{Te}} \right) e^{-\frac{(\omega + n\omega_0)^2}{2k^2 v_{Te}^2}}. \quad (2)$$

Учитывая малость мнимых слагаемых, это уравнение можно переписать в виде

$$1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega^3}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}} - \frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} + i \frac{2\omega\omega_{Le}^2}{(kV_E)^3} = 0. \quad (3)$$

Отсюда находим спектр ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ ):

$$\omega^2 \approx \omega_{Li}^2, \quad (4)$$

$$\delta = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{\omega_{Li}}{(k r_{Di})^3} \exp\left(-\frac{\omega_{Li}^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right) + \frac{\omega_{Li}^2 \omega_{Le}^2}{(kV_E)^3}.$$

Первое слагаемое в выражении для  $\delta$  обусловлено истинным поглощением волн на ионах, а второе слагаемое описывает обращенное поглощение (усиление) на электронах, причем важно, что в целом волна может усиливаться ( $\delta > 0$ ), что соответствует неустойчивости.

Следует заметить, что такая неустойчивость возможна в области прозрачности плазмы по отношению к СВЧ полю, т. е. при  $\omega_0 > \omega_{Le}$ . Однако при этом должно выполняться условие

$$\omega_0 < \sqrt{\frac{T_e}{T_i}} \omega_{Le}.$$

**Задача 10.** Исходя из уравнения (38.22) с учетом столкновений электронов получить порог аperiodической параметрической неустойчивости (38.26).

**Решение.** С учетом столкновений электронов при  $\omega_0 \approx \omega_{Le} \gg v_e$ ,  $\omega$  имеем

$$\varepsilon(\omega \pm \omega_0) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\omega \pm \omega_0 + i\nu_e)(\omega \pm \omega_0)} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_0^2} \pm \left( \frac{i\nu_e}{\omega_0} + \frac{2\omega}{\omega_0} \right). \quad (1)$$

При подстановке этого выражения в (38.22) получаем [ср. с (38.24)]

$$\Delta^2 - \left( \frac{i\nu_e}{\omega} + 2 \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - \eta\Delta \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega}{k v_{Ti}} \cdot \frac{T_i}{T_e + T_i} \right) = 0. \quad (2)$$

В области самых низких частот находим спектр

$$\omega = i \frac{\Delta^2 + \frac{\nu_e^2}{\omega_0^2} - \eta\Delta}{\eta\Delta} k v_{Ti} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{T_e + T_i}{T_i}, \quad (3)$$

который при  $\nu_e \rightarrow 0$  переходит в (38.25) (верхнее выражение).

Неустойчивость имеет место при условии

$$\eta \gg \frac{\Delta^2 + v_e^2/\omega_0^2}{\Delta}. \quad (4)$$

Минимизируя это выражение по  $\Delta$ , находим порог неустойчивости (38.26).

**Задача 11.** Исследовать параметрическую неустойчивость холодной магнитоактивной плазмы в СВЧ электрическом поле в условиях, когда частота поля  $\omega_0$  близка к суммарной частоте продольных электронных колебаний плазмы  $\omega_0 \approx \omega_1 + \omega_2$ .

Решение. Учтем, что продольную диэлектрическую проницаемость холодной электронной плазмы можно представить в виде

$$1 + \delta \varepsilon_e(\omega, \mathbf{k}) = \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}{\omega^2(\omega^2 - \Omega_e^2)}, \quad (1)$$

где  $\omega_\alpha^2$  (для  $\alpha = 1, 2$ ) определяется выражением (38.14).

Введем расстройку частоты внешнего поля по отношению к суммарной резонансной частоте:

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 + \Delta \quad (2)$$

и будем искать решение уравнения (38.22) в виде (считая для определенности  $\omega_1 > \omega_2$ )

$$\omega = \omega_1 + \delta \quad (3)$$

(в силу симметрии с таким же успехом можно искать решение  $\omega = \omega_2 + \delta$ ). В результате получаем

$$-\frac{\omega_1^2}{\omega_{Li}^2} + \frac{\omega_1(\omega_1^2 - \Omega_e^2)}{2\delta(\omega_1^2 - \omega_2^2)} + \frac{(\mathbf{k}r_E)^2}{8} \cdot \frac{\omega_2(\omega_2^2 - \Omega_e^2)}{(\delta + \Delta)(\omega_1^2 - \omega_2^2)} = 0. \quad (4)$$

При расстройках  $\Delta \gg \delta$ , удовлетворяющих условию

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_{Li}^2} \Delta = \frac{(\mathbf{k}r_E)^2}{8} \frac{\omega_2(\omega_2^2 - \Omega_e^2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, \quad (5)$$

из уравнения (4) находим соотношение для определения инкремента нарастания параметрической неустойчивости:

$$\frac{\delta^2}{\Delta^2} = \frac{4}{(\mathbf{k}r_E)^2} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_1^2 - \Omega_e^2}{\omega_2^2 - \Omega_e^2}. \quad (6)$$

Так как  $\omega_2^2 < \Omega_e^2$ , а  $\omega_1^2 > \Omega_e^2$ , то  $\delta^2 < 0$ , т. е. плазма всегда неустойчива. В действительности учет столкновений приводит к наличию порога неустойчивости, определяемого условием  $\delta > \delta_1$ , где  $\delta_1$  — декремент затухания колебаний на верхней электронной ветви, определяемый формулой (29.3) (см. гл. V). Это дает условие

$$\begin{aligned} & \frac{(\mathbf{k}r_E)^2}{4} \cdot \frac{(\omega_1^2 - \Omega_e^2)(\omega_2^2 - \Omega_e^2) \omega_{Li}^4 \omega_2 \omega_1}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 \omega_1^4} > \\ & > v_e^2 \left[ \frac{(\omega_1^2 - \Omega_e^2)^2 \cos^2 \vartheta + (\omega_1^2 + \Omega_e^2 \sin^2 \vartheta)^2}{(\omega_1^2 - \Omega_e^2)^2 \cos^2 \vartheta + \omega_1^4 \sin^2 \vartheta} \right], \quad (7) \end{aligned}$$

где  $\nu_e$  — частота столкновений электронов.

Эти громоздкие формулы сильно упрощаются в случае плотной плазмы, в которой  $\omega_{Le}^2 \gg \Omega_e^2$ . При этом для  $\vartheta = 0$  имеем:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &\approx \omega_{Le}^2, \quad \omega_2^2 = \Omega_e^2 \cos^2 \vartheta, \\ \Delta &= -\frac{m}{M} \cdot \frac{(\mathbf{k}r_E)^2}{8} \cdot \frac{\Omega_e^3 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta}{\omega_{Le}^2}, \\ \delta^2 &= -\left(\frac{m}{M}\right)^2 \cdot \frac{(\mathbf{k}r_E)^2}{16} \cdot \frac{\Omega_e^3 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta}{\omega_{Le}}, \\ (\mathbf{k}r_E)^2 &> \frac{4\nu_e^2 \omega_{Le}}{\sin^2 \vartheta \cos \vartheta \Omega_e^3} \left(\frac{M}{m}\right)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Следует отметить, что в результате развития неустойчивости происходит нарастание амплитуд продольных колебаний на верхней и нижней гибридных ветвях.

**Задача 12.** Исследовать параметрическую неустойчивость вырожденной замагниченной плазмы твердого тела на частоте, близкой к нижней гибридной частоте электронов,  $\omega_0 \approx \omega_2$ . Ионы считать невырожденными.

**Решение.** Используем запись (1) предыдущей задачи и будем искать решение в области низких ионно-звуковых частот  $\omega_0 \sim \omega_2 \gg kv_{Te} \gg \omega \gg kv_{Ti}$ . Уравнение (38.22) при этом принимает вид

$$\begin{aligned} -\frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} + \frac{k^2 v_{Fe}^2}{3\omega_{Le}^2} \left(1 - i \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{|k_z| v_{Fe}}\right) + \frac{(\mathbf{k}r_E)^2}{4} \times \\ \times \frac{\omega_2 (\omega_2^2 - \Omega_e^2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot \frac{\Delta}{\Delta^2 - \omega^2} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Delta = \omega_0 - \omega_2$  — расстройка частоты СВЧ поля.

Отсюда видно, что при выполнении условия параметрического резонанса (распада волны накачки на нижнюю гибридную и ионно-звуковую волны)

$$\omega = kv_s = \Delta, \quad (2)$$

где  $v_s^2 = 3v_{Fe}^2 \frac{m}{M}$ , в плазме происходит раскачка ионно-звуковых волн, причем инкремент нарастания неустойчивости ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ )

$$\delta = \frac{(\omega_0 - \omega_2) (\Omega_e^2 - \omega_2^2) \omega_2}{4\pi\omega^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} \cdot \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_s^2} \cdot (\mathbf{k}r_E)^2 |k_z| v_{Fe}. \quad (3)$$

Видно, что при  $\omega_0 > \omega_2$  (т. е.  $\omega_0 = \omega_2 + \omega$ ) плазма неустойчива, причем порог неустойчивости определяется требованием  $\delta > \nu_e$  и равен

$$\eta = \frac{E_0^2 \cos^3 \vartheta}{8\pi N \epsilon_{Fe}} > 12\pi \frac{\nu_e}{\omega_{Le}} \cdot \frac{\omega_2^3}{\omega_{Le}^3} \sqrt{3 \frac{M}{m}} \cdot \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\Omega_e^2 - \omega_2^2}. \quad (4)$$

В плотной плазме, в которой  $\omega_{Le}^2 \gg \Omega_e^2$ , формулы (3) и (4) значительно упрощаются (при  $\vartheta \neq 0$ ):

$$\omega_1^2 \approx \omega_{Le}^2, \quad \omega_2^2 = \Omega_e^2 \cos^2 \vartheta,$$

$$\delta = \frac{m}{M} \cdot \frac{(\omega_0 - \Omega_e \cos \vartheta) \Omega_e^3 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta}{4\pi\omega^2 k^2 v_g^2} (k r_E)^2 \cdot |k_z| v_{Fe}, \quad (5)$$

$$\eta > 12\pi \frac{v_e}{\omega_{Le}} \sqrt{3 \frac{M}{m} \cdot \frac{\Omega_e \cos^3 \vartheta}{\omega_{Le} \sin \vartheta}}. \quad (6)$$

## Глава VIII

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

#### § 39. Неоднородные среды без пространственной дисперсии. Приближение геометрической оптики

В предшествующих главах была рассмотрена пространственно однородная плазма, параметры которой не зависели от координат. В реальных условиях практически всегда приходится иметь дело с пространственно неоднородной плазмой. Реальная плазма неоднородна в пространстве уже хотя бы потому, что она ограничена. Здесь, однако, исследуем пространственно неограниченную неоднородную плазму, а методы описания и электромагнитные свойства ограниченной в пространстве плазмы рассмотрим в следующей главе. Характерными размерами неоднородности лабораторной плазмы обычно являются размеры экспериментальных установок. Так, например, в установках управляемого термоядерного синтеза и в газовом разряде концентрация заряженных частиц плазмы существенно изменяется на расстояниях порядка размеров плазменного шнура (радиуса разрядной трубки), т. е. характерный размер неоднородности плотности  $L_N$  порядка  $1 \div 10$  см, температура же заряженных частиц при этом может не зависеть от координат. В ионосферной плазме характерными размерами регулярных неоднородностей являются: для концентрации заряженных частиц  $L_N \sim 10^7$  см, для температуры  $L_T \sim 5 \cdot 10^7$  см, для неоднородности магнитного поля Земли  $L_B \sim 10^8 \div 10^9$  см. В плазме твердого тела характерный размер неоднородности часто определяется способом создания носителей заряда и по порядку величины составляет  $10^{-1} \div 1$  см.

При изучении электромагнитных свойств неоднородной плазмы прежде всего встает вопрос о едизлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ . Поскольку в неоднородной плазме ядра материальных уравнений (6.1) и (6.2) не являются разностными функциями координат  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$

[см. (6.4), (6.5)], т. е. зависят не только от  $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ , но также от  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  в отдельности, для описания ее электромагнитных свойств в общем случае нельзя пользоваться понятием тензора диэлектрической проницаемости (или проводимости) в том смысле, как оно было определено соотношениями (6.6)  $\div$  (6.9).

Исследование электромагнитных свойств неоднородной плазмы начнем с простейшей модели, когда можно пренебречь пространственной дисперсией. При этом для однородной плазмы оператор  $\hat{\epsilon}_{ij}(t-t')$  вообще не зависит от разности  $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ . Для неоднородной плазмы оператор  $\hat{\epsilon}_{ij}(t-t', \mathbf{r})$  может зависеть лишь от  $\mathbf{r}$ , поэтому можно использовать тензор

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}) = \int_0^{\infty} dt_1 \hat{\epsilon}_{ij}(t_1, \mathbf{r}) e^{i\omega t_1}, \quad (39.1)$$

т. е. по существу старые выражения для тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}(\omega, 0)$  плазмы без пространственной дисперсии  $\mathbf{k}/\omega \rightarrow 0$ , в которых, однако, соответствующие параметры (плотность, температуру и т. п.) следует считать зависящими от координат. Однако и в этом простейшем случае построение теории распространения электромагнитных волн в неоднородной плазме представляет сложную задачу, связанную с необходимостью решения уравнения поля

$$\Delta \mathbf{E} - \text{grad div } \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D} = 0, \quad (39.2)$$

где  $D_i = \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}) E_j$ .

Уравнение (39.2) является основным объектом изучения в теории распространения электромагнитных волн (света) в неоднородных средах. Для наиболее распространенного нормального падения волны на плоскостолостную среду это уравнение имеет формальное сходство со стационарным уравнением Шредингера. Действительно, считая среду изотропной с тензором  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}) = \epsilon(\omega, \mathbf{r}) \delta_{ij}$  и неоднородной вдоль оси  $ox$ , положим  $\epsilon(\omega, \mathbf{r}) = \epsilon(\omega, x)$  и  $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(\omega, x)$ . Тогда уравнение поля (39.2) для поперечной волны ( $\mathbf{E} \perp ox$ ) запишется следующим образом:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega, x) E = 0. \quad (39.3)$$

Напомним, что стационарное уравнение Шредингера для одномерного движения имеет вид

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [W - V(x)] \Psi = 0, \quad (39.4)$$

где  $\Psi$  — волновая функция,  $W$  — полная энергия частицы, а  $V(x)$  — потенциальная энергия частицы.

Сходство уравнений (39.3) и (39.4) очевидно.

Важность уравнений типа (39.3), (39.4) для физики объясняет тщательное исследование возможных способов их решения, в частности

нахождение точных решений для определенного вида зависимости  $\varepsilon(\omega, x)$ . Точные решения найдены для линейной, параболической и некоторых других конкретных зависимостей  $\varepsilon(\omega, x)$  от  $x$ . Для произвольной зависимости  $\varepsilon(x)$  в теории распространения электромагнитных волн и квантовой механике разработаны приближенные методы решения волнового уравнения. Основными из них являются метод геометрической оптики в электродинамике и аналогичный ему метод ВКБ (Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна) в квантовой механике. Ввиду чрезвычайной важности этого метода для дальнейшего изложения напомним его суть.

Метод геометрической оптики применяют тогда, когда на длине волны электромагнитных колебаний свойства среды изменяются слабо или когда длина волны  $\lambda$  много меньше характерного размера неоднородности среды  $L_0$ :

$$\lambda/L_0 \ll 1.$$

При этом распространение волны рассматривают так же, как в однородной среде с соответствующими значениями параметров.

Так, например, в однородной безграничной среде собственными решениями волновых уравнений являются плоские волны. В неоднородной среде это не так, однако, если на длине волны свойства среды меняются слабо, то волна ведет себя почти как плоская.

В приближении геометрической оптики любые величины, характеризующие волну, записывают в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t + i\Psi(\mathbf{r})}, \quad (39.5)$$

где  $\Psi(\mathbf{r})$  — величина, называемая эйконалом, которая определяет зависимость фазы волны от координат.

Эйконал является большой величиной, поскольку должен изменяться на  $2\pi$  на длине волны, а приближение геометрической оптики соответствует пределу  $\lambda \rightarrow 0$ .

В однородной среде

$$\Psi(\mathbf{r}) = \mathbf{k}\mathbf{r} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}\mathbf{r}. \quad (39.6)$$

По аналогии с этим в неоднородной среде положим

$$\nabla\Psi(\mathbf{r}) = \mathbf{k}(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}(\mathbf{r}). \quad (39.7)$$

В слабонеоднородной среде  $\mathbf{k}(\mathbf{r})$  является медленно меняющейся функцией  $\mathbf{r}$ , которая, очевидно, определяется изменением свойств среды в пространстве, в силу чего характерный размер неоднородности  $\mathbf{k}(\mathbf{r})$  совпадает с  $L_0^{-1}$ .

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{k}(\mathbf{r}) \sim \frac{k(\mathbf{r})}{L_0}.$$

Функцию  $k(\mathbf{r})$  назовем волновым вектором волны в слабо неоднородной среде,  $\lambda = (2\pi)/k$  — длиной волны, а  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  — показателем преломления. Слабая зависимость волнового вектора  $\mathbf{k}(\mathbf{r})$  [или  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ ] от координат позволяет построить метод решения электродинамических задач для слабонеоднородных сред в виде ряда последовательных приближений по параметру  $\lambda/L_0$ . В нулевом приближении волну считают плоской, т. е. полностью пренебрегают членами порядка  $\lambda/L_0$  и более высокого порядка малости, в первом приближении учитывают лишь члены первого порядка малости по  $\lambda/L_0$  и т. д. Другими словами, в нулевом приближении полностью пренебрегают пространственными производными  $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ , в первом приближении учитывают лишь первые пространственные производные и т. д. Вычисляя более высокие члены разложения, очевидно, можно найти решение уравнений поля с любой степенью точности.

Применим изложенный метод к решению уравнения (39.3), для чего представим поле  $E$  в виде

$$E(x) = E_0 e^{i\Psi(x)}. \quad (39.8)$$

Подставляя (39.8) в (39.3), получаем уравнение для  $\Psi(x)$ , называемое уравнением эйконала:

$$\Psi'^2 - i\Psi'' = \varepsilon(\omega, x) \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (39.9)$$

где штрих означает дифференцирование по координате. Поскольку выполнено условие  $\lambda/L_0 \ll 1$ , можно провести разложение решения  $\Psi(x)$  по этому малому параметру:

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2 + \dots \quad (39.10)$$

Здесь  $\Psi_0$  — величина  $\Psi$  в нулевом приближении геометрической оптики, которую находят из (39.9) при пренебрежении вторым слагаемым в левой части:

$$\Psi_0'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega, x), \quad (39.11)$$

или

$$\Psi_0(x) = \pm \frac{\omega}{c} \int^x \sqrt{\varepsilon(\omega, x')} dx'. \quad (39.12)$$

В теории распространения волн особый интерес представляет область изменения  $x$ , в которой  $\varepsilon(\omega, x) > 0$ , поскольку в этой области  $\Psi_0(x)$  — действительная функция и поле  $E(x)$  носит волновой (колебательный) характер, причем длина волны

$$\lambda \sim \frac{1}{\Psi_0'} \sim \frac{c}{\omega \sqrt{\varepsilon(\omega, x)}}.$$

На первый взгляд может показаться, что в нулевом приближении геометрической оптики вообще не нужно учитывать зависимость

$\varepsilon(\omega, x)$  от координаты  $x$ . Однако это не так, поскольку, несмотря на слабую пространственную неоднородность  $\varepsilon(\omega, x)$ , область интегрирования в (39.12) может быть достаточно большой и даже значительно превышать характерный размер неоднородности  $L_0$ . Естественно, что при этом величину  $\varepsilon(\omega, x)$  нельзя считать постоянной.

Из условия пренебрежения вторым слагаемым в уравнении (39.9) следует неравенство, определяющее область применимости нулевого приближения:

$$\frac{\Psi_0''}{(\Psi_0')^2} \sim \frac{c}{\omega} \cdot \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\omega, x)}} \right] \sim \frac{c}{\omega} \cdot \frac{1}{L_0 \sqrt{\varepsilon(\omega, x)}} \sim \frac{\lambda}{L_0} \ll 1. \quad (39.13)$$

Как и следовало ожидать, оно совпадает с условием применимости приближения геометрической оптики. Неравенство (39.13) нарушается при  $\lambda/L_0 \sim 1$ , что возможно либо при конечных значениях  $\varepsilon(\omega, x) \sim 1$  и не малых значениях  $c/(\omega L_0) = \lambda_0/L_0 \geq 1$ , либо при любых значениях  $\lambda_0/L_0 \ll 1$  вблизи точек, где  $\varepsilon(\omega, x) \approx 0$ .

Таким образом, согласно (39.12) выражение для поля  $E$  в нулевом приближении геометрической оптики можно записать в виде

$$E = C_+ \exp \left[ i \frac{\omega}{c} \int^x \sqrt{\varepsilon(\omega, x')} dx' \right] + \\ + C_- \exp \left[ -i \frac{\omega}{c} \int^x \sqrt{\varepsilon(\omega, x')} dx' \right], \quad (39.14)$$

или с учетом определения волнового вектора слабонеоднородной плазмы (39.7)

$$E = C_+ \exp \left[ i \int^x k(x') dx' \right] + C_- \exp \left[ -i \int^x k(x') dx' \right]. \quad (39.15)$$

Вычислим теперь следующий член разложения (39.10), для чего подставим в (39.9) разложение (39.10), учтем (39.11) и оставим члены первого порядка малости. В результате получим

$$2\Psi_0'\Psi_1' - i\Psi_0'' = 0. \quad (39.16)$$

Отсюда

$$\Psi_1 = \frac{i}{2} \ln \Psi_0'. \quad (39.17)$$

Учитывая эту поправку в решении (39.8), после несложных преобразований получим выражение для поля  $E(x)$  с точностью до членов первого порядка приближения геометрической оптики:

$$E(x) = \frac{C_1}{\sqrt[4]{\varepsilon(\omega, x)}} \exp \left[ i \frac{\omega}{c} \int^x \sqrt{\varepsilon(\omega, x')} dx' \right] +$$



$$+ \frac{C_2}{\sqrt[4]{\varepsilon(\omega, x)}} \exp \left[ -i \frac{\omega}{c} \int^x \sqrt{\varepsilon(\omega, x')} dx' \right]. \quad (39.18)$$

Как отмечалось, в теории распространения волн в неоднородной среде особую роль играют области, в которых функция  $\varepsilon(\omega, x)$  действительна и положительна. В этих областях электромагнитное поле (39.18) носит волновой характер, или, как говорят, возможно распространение волн. В геометрической оптике эти области называют областями прозрачности среды. В отличие от них области, в которых функция  $\varepsilon(\omega, x) < 0$ , называют областями непрозрачности среды. В этих областях поле  $E$  меняется с координатой  $x$  экспоненциально, нарастает или убывает. В квантовой механике области прозрачности соответствует область положительности функции  $U(x) = W - V(x)$  [см. уравнение (39.4)], в которой доступно классическое движение частицы. Напротив, область, в которой  $U(x) < 0$ , является недоступной для классического движения. Поэтому точку, где  $U(x) = 0$ , называют точкой поворота. По аналогии и в геометрической оптике точки деления областей прозрачности и непрозрачности, т. е. точки, в которых  $\varepsilon(\omega, x) = 0$ , принято называть точками поворота. От этих точек происходит отражение электромагнитной волны, падающей со стороны области прозрачности среды.

Поскольку вблизи точек поворота  $\varepsilon(\omega, x) = 0$  приближение геометрической оптики неприменимо, и решение (39.18) теряет смысл. Однако вблизи точки поворота функцию  $\varepsilon(\omega, x)$  можно разложить в ряд и найти точное решение уравнения (39.3), которое вдали от этой точки асимптотически должно перейти в (39.18). Пусть область классически доступных решений, или область прозрачности среды, находится между точками поворота  $a$  и  $b$ , являющимися решениями уравнения  $\varepsilon(\omega, x) = 0$ , т. е.  $\varepsilon(\omega, x) \geq 0$  при  $a \leq x \leq b$ . Тогда асимптотическое решение уравнения (39.3) слева от точки  $b$ , переходящее в затухающее решение (39.18) при  $x > b$ , может быть записано в виде

$$E = \frac{C}{\sqrt[4]{\varepsilon^-}} \sin \left( \frac{\omega}{c} \int_x^b \sqrt{\varepsilon^-} dx + \frac{\pi}{4} \right) \quad (x < b). \quad (39.19)$$

Аналогично асимптотическое решение этого уравнения справа от точки  $a$ , переходящее в затухающее решение (39.18) при  $x < a$ , записывается в виде

$$E = \frac{C'}{\sqrt[4]{\varepsilon^-}} \sin \left( \frac{\omega}{c} \int_a^x \sqrt{\varepsilon^-} dx + \frac{\pi}{4} \right) \quad (a < x). \quad (39.20)$$

Выражения (39.19) и (39.20), естественно, должны совпадать во всей области  $a \leq x \leq b$ , для чего необходимо, чтобы сумма их фаз была целым числом, кратным  $\pi$ . Легко видеть, что это возможно,

если

$$\frac{\omega}{c} \int_a^b \sqrt{\varepsilon(\omega, x)} dx = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (39.21)$$

где  $n$  — произвольные целые числа:  $n = 0, \pm 1, \pm 2$ .

При этом постоянные интегрирования  $C$  и  $C'$  связаны равенством  $C = (-1)^n C'$ .

В силу неравенства (39.13) в приближении геометрической оптики эйконал является большой величиной, поэтому  $|n| \gg 1$ . Учитывая это соотношение, (39.21) приближенно можно записать в виде

$$\frac{\omega}{c} \int_a^b \sqrt{\varepsilon(\omega, x)} dx = \int_a^b k(\omega, x) dx = \pi n, \quad (39.22)$$

где  $n \gg 1$ .

Заметим, что соотношение (39.22) можно также получить, рассматривая в решении (39.15) обход в плоскости комплексного переменного  $k$  по замкнутому контуру вокруг точек поворота, где  $\text{Re } k^2 = 0$ . При таком обходе фаза решения (39.15) приобретает добавку  $i\oint k(\omega, x) dx$  и, чтобы поле  $E$  не изменилось (условие однозначности решения), должно соблюдаться условие

$$\oint k(\omega, x) dx = 2\pi n,$$

что при наличии двух точек поворота приводит к соотношению (39.22). Соотношение (39.22) в геометрической оптике рассматривают как дисперсионное уравнение, определяющее спектр собственных значений частот  $\omega$ , либо волновых векторов  $k$  электромагнитных волн, запертых в области прозрачности среды между двумя точками поворота. Таким образом, спектр собственных значений волнового уравнения в пространственно неоднородной среде в приближении геометрической оптики при наличии двух точек поворота оказывается дискретным.

В этом состоит важное качественное отличие электромагнитных свойств неоднородной среды от однородной.

Соотношение (39.22) имеет простой физический смысл: в области прозрачности среды между точками поворота должно укладываться целое число полуволн (рис. 28). Аналогией этого являются колебания струны с закрепленными концами. Природа такой аналогии ясна, поскольку волновое уравнение (39.3) совпадает с уравнением колебаний струны со слабо-неоднородным модулем упругос-

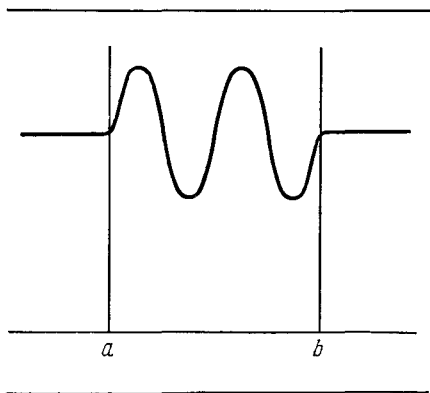


Рис. 28

ти. Точкам поворота в этом случае можно сопоставить закрепленные концы струны, так как за пределами этих точек решения волнового уравнения экспоненциально убывают. Аналогичная картина имеет место и в квантовой механике в квазиклассическом пределе, в связи с чем уравнения (39.21) и (39.22) называют часто квазиклассическими правилами квантования, а интегралы в левых частях этих соотношений — фазовыми интегралами Бора — Зоммерфельда.

Все сказанное относилось к действительной функции  $\epsilon(\omega, x)$ . Очевидно, однако, что при учете диссипации в среде (например, столкновений частиц) функция  $\epsilon(\omega, x)$  оказывается комплексной. Как неоднократно подчеркивалось в предыдущих главах, электромагнитные волны в среде как слабозатухающие могут существовать лишь в условиях, когда диссипация слаба и  $\epsilon(\omega, x)$  — почти действительная функция. Не представляет труда обобщить дисперсионное уравнение (39.22) для таких слабодиссипативных неоднородных сред. Учитывая, что  $\text{Re } k(\omega, x) \gg \text{Im } k(\omega, x)$  и поэтому электромагнитные колебания должны быть слабозатухающими ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta, \omega \gg \delta$ ), представим подынтегральную функцию в виде

$$k(\omega + i\delta, x) \approx \text{Re } k(\omega, x) + i \text{Im } k(\omega, x) + i\delta \frac{\partial \text{Re } k(\omega, x)}{\partial \omega}.$$

Подставив это разложение в уравнение (39.22) и выделив затем его действительную и мнимую части, получим

$$\int_a^b \text{Re } k(\omega, x) dx = \pi n, \tag{39.23}$$

$$\delta = - \frac{\int_a^b \text{Im } k(\omega, x) dx}{\int_a^b \frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re } k(\omega, x) dx}.$$

Здесь под точками поворота  $a$  и  $b$  следует понимать точки, в которых  $\text{Re } k^2(\omega, x) = 0$ .

Соотношения (39.23) определяют спектр частот и декремент затухания электромагнитных волн в неоднородной среде без пространственной дисперсии в приближении геометрической оптики, причем вторым соотношением следует пользоваться лишь тогда, когда частота  $\omega$ , определенная из первого соотношения, действительна.

Выше был рассмотрен простейший случай неоднородной среды с двумя точками поворота, между которыми находится область прозрачности. Электромагнитные волны в среде могут распространяться между этими точками поворота, поэтому их часто называют *запертыми колебаниями*, а соответствующие им решения уравнения поля — *фигурными*.

В реальных условиях в неоднородной среде возможны и другие ситуации, например, когда в рассматриваемой области имеется только одна точка поворота, либо, наоборот, несколько отделенных друг от друга областей прозрачности, заключенных между парами соответствующих точек поворота, либо вообще отсутствуют точки поворота и среда прозрачна во всем пространстве. Из всего этого многообразия разберем лишь наиболее часто реализуемые в плазме случаи.

#### § 40. Приближение геометрической оптики для неоднородных сред с пространственной дисперсией

С помощью изложенного в § 39 метода геометрической оптики можно достаточно просто сформулировать материальное уравнение для произвольной неоднородной среды и, в частности, ввести понятие тензора диэлектрической проницаемости неоднородной плазмы. Предположим, что плазма слабонеоднородна, т. е. длина волны значительно меньше характерных размеров неоднородности среды. При этом материальное уравнение, связывающее электрическую индукцию и напряженность электрического поля [ср. с (6.4)], удобно представить в виде

$$D_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\varepsilon}_{ij}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}', \mathbf{r}) E_j(t', \mathbf{r}'). \quad (40.1)$$

Говоря о слабой неоднородности среды, следует считать, что зависимость ядра интегрального соотношения (40.1) от  $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  является более сильной, чем от  $\mathbf{r}$ . Зависимость ядра от  $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  связана с длиной волны колебаний и при преобразовании Фурье в однородной среде приводит к зависимости  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  от  $\mathbf{k}$ , зависимость же от  $\mathbf{r}$  — определяется неоднородностью самой среды и связана с характерным размером неоднородности  $L_0$ .

Ввиду малости параметра  $\lambda/L_0$  снова можно воспользоваться приближением геометрической оптики, считая в нулевом приближении волновой вектор  $\mathbf{k}$  слабой функцией координат. Тогда в нулевом приближении материальное уравнение (40.1) можно записать в виде

$$D_i = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) E_j, \quad (40.2)$$

где

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = \int_0^{\infty} dt_1 \int d\mathbf{R} \hat{\varepsilon}_{ij}(t_1, \mathbf{R}, \mathbf{r}) e^{i\omega t_1 - i\mathbf{k}\mathbf{R}} \quad (40.3)$$

— тензор диэлектрической проницаемости слабонеоднородной среды в нулевом приближении геометрической оптики с учетом пространственной дисперсии.

Запишем уравнения Максвелла в нулевом приближении геометрической оптики:

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{kB}] &= -\frac{\omega}{c} \mathbf{D}, \quad \mathbf{kB} = 0, \\ [\mathbf{kE}] &= \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \quad \mathbf{kD} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (40.4)$$

Условие разрешимости этой системы совместно с материальным уравнением (40.2) дает уравнение

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) \right| = 0. \quad (40.5)$$

Такое уравнение можно получить также из волнового уравнения (39.2) для сред без пространственной дисперсии, если применить к нему метод геометрической оптики и ограничиться нулевым приближением.

Заметим, что в однородной среде уравнение типа (40.5) трактовалось как дисперсионное уравнение [см. (8.3)], определяющее спектр частот собственных электромагнитных колебаний  $\omega(\mathbf{k})$ . Если же уравнение (40.5) разрешить относительно  $\omega$ , то окажется, что «частота собственных колебаний» среды зависит от координат, т. е.  $\omega = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ , что является физической бессмыслицей. Уже из этого следует принципиальное различие уравнений (40.5) и (8.3), а именно, уравнение (40.5) не является дисперсионным, а просто уравнением для определения  $\mathbf{k}(\mathbf{r})$  или для определения эйконала  $\Psi(\mathbf{r})$ . Поэтому его называют уравнением эйконала. Это уравнение обобщает (39.11) в нулевом приближении геометрической оптики на слабонеоднородные среды с пространственной дисперсией.

В случае, когда электрическое поле волны в неоднородной среде можно считать потенциальным, уравнение (40.5) упрощается:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0. \quad (40.6)$$

Величина  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r})$  при этом называется продольной диэлектрической проницаемостью слабонеоднородной среды, а уравнение (40.6) — уравнением эйконала для продольных (потенциальных) волн в нулевом приближении геометрической оптики.

С помощью уравнения эйконала, как легко видеть, удобно исследовать пространственное распределение поля в среде, т. е. решать граничную задачу. Для решения же начальной задачи — вычисления спектров электромагнитных колебаний слабонеоднородной среды — одного уравнения эйконала недостаточно, необходимо знание дисперсионного уравнения типа соотношений (39.23), полученных для сред без пространственной дисперсии.

В общем случае, когда имеется трехмерная неоднородность среды, вывод дисперсионного уравнения требует нахождения спектра собственных значений для интегродифференциальных уравнений в частных производных высших порядков. Эта проблема до сих пор не имеет окончательного решения. На сегодняшний день более или менее исчерпывающий ответ на поставленный вопрос имеется только для одно-

мерно неоднородных сред. В этом случае из уравнений эйконала (40.5) и (40.6) определяют лишь проекцию волнового вектора вдоль неоднородности  $k_x(\omega, k_y, k_z, x)$ . В наиболее интересных для волн в плазме областях частот уравнения эйконала (40.5) и (40.6) имеют попарно сопряженные невырожденные корни  $\pm k_{xs}(\omega, x)$ . Каждой паре таких корней в нулевом приближении геометрической оптики можно сопоставить дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + k_{xs}^2(\omega, x) y = 0. \quad (40.7)$$

К этому уравнению уже можно применять изложенную в § 39 общую теорию, и для определения спектра частот электромагнитных колебаний по аналогии с (39.23) записать соотношения, определяющие частоту и декремент затухания ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ ):

$$\int_{x_\mu}^{x_\nu} \operatorname{Re} k_{xs}(\omega, x) dx = \pi n, \quad (40.8)$$

$$\delta = \frac{\int_{x_\mu}^{x_\nu} \operatorname{Im} k_{xs}(\omega, x) dx}{\int_{x_\mu}^{x_\nu} \frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} k_{xs}(\omega, x) dx}.$$

В этих соотношениях интегрирование ведется по области прозрачности среды для данных колебаний, причем точки поворота  $x_\mu$  и  $x_\nu$  определяются из уравнения  $\operatorname{Re} k_{xs}^2(\omega, x) = 0$ .

Таким образом, идея, положенная в основу теории распространения электромагнитных волн в слабонеоднородной среде с пространственной дисперсией, такая же, как и для сред в отсутствие дисперсии. Она заключается в следующем: из уравнения эйконала (40.5) [либо (40.6)] находят решения  $k_{xs}^2(\omega, x)$ , соответствующие  $s$ -ветвям колебаний, спектры частот и декременты затухания которых определяют с помощью правил квантования (40.8).

Наконец, отметим, что переход к однородной неограниченной среде производится формальным образом. В этом случае точки поворота отсутствуют, и вводят произвольные точки  $a$  и  $b$ , для которых записывают соотношение (39.22):

$$\int_a^b k_{xs}(\omega, x) dx = k_{xs}(\omega) (b - a) = \pi n. \quad (40.9)$$

При этом, полагая  $\frac{\pi n}{b-a} = k_{xs} = \text{const}$ , получаем уравнение, определяющее спектр собственных колебаний однородной плазмы:

$$k_{xs}(\omega) = k_{xs} = \text{const}. \quad (40.10)$$

Естественно, что корни этого уравнения  $\omega(\mathbf{k})$  совпадают с корнями уравнения (40.5), являющегося для однородной среды дисперсионным уравнением.

### § 41. Тензор диэлектрической проницаемости слабонеоднородной плазмы в приближении геометрической оптики

Перейдем к вычислению явного вида тензора диэлектрической проницаемости слабонеоднородной плазмы  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{x})$ . Рассмотрение начнем с бесстолкновительной магнитоактивной плазмы. Вычисление проведем обычным способом на основе решения кинетического уравнения с самосогласованным полем (уравнения Власова) для частиц сорта  $\alpha$ :

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} = 0. \quad (41.1)$$

Как обычно, внешнее магнитное поле  $\mathbf{B}_0$  будем считать направленным вдоль оси  $oz$ , а неоднородность плазмы — вдоль оси  $ox$ , т. е. поперек внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ .

Определим прежде всего функцию распределения  $f_{0\alpha}$  для равновесного состояния плазмы, в котором  $\mathbf{E}_0 = 0$ ,  $\mathbf{B}_0 \parallel oz$ . Для функции  $f_{0\alpha}$  в нерелятивистской плазме, в которой  $\mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}$ , из (41.1) получаем уравнение

$$v_\perp \cos \varphi \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial x} - \Omega_\alpha(x) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \varphi} = 0, \quad (41.2)$$

записанное в цилиндрической системе координат в пространстве скоростей ( $v_x = v_\perp \cos \varphi$ ,  $v_y = v_\perp \sin \varphi$ ,  $v_z$ ). В этом уравнении  $\Omega_\alpha(x) = \frac{e}{m_\alpha c} B_0(x)$  — неоднородная циклотронная частота частиц сорта  $\alpha$ .

Общим решением уравнения (41.2) является произвольная функция характеристик

$$f_{0\alpha} = f_{0\alpha}(\mathcal{E}_\alpha, C_\alpha),$$

где  $\mathcal{E}_\alpha = m_\alpha v^2/2$  — энергия, а  $C_\alpha$  определяется из характеристического уравнения

$$\frac{dx}{v_\perp \cos \varphi} = - \frac{d\varphi}{\Omega_\alpha(x)}, \quad (41.3)$$

решение которого имеет вид

$$C_\alpha = v_\perp \sin \varphi + \int^x \Omega_\alpha(x') dx'. \quad (41.4)$$

Таким образом,

$$f_{0x} = f_{0x} \left( v_y + \int^x \Omega_\alpha(x') dx', \varepsilon_\alpha \right). \quad (41.5)$$

В реальных случаях характерный размер неоднородности плазмы значительно превышает ларморовский радиус частиц. Кроме того, если ларморовский радиус соизмерим или больше размеров неоднородности, которые обычно совпадают с размерами плазмы, то магнитное поле можно вообще не учитывать. Это позволяет ввести малый параметр

$$v_{\tau\alpha} / (\Omega_\alpha L_0) \ll 1 \quad (41.6)$$

и разложить по нему решение (41.5). При этом можно записать

$$f_{0x}(\varepsilon_\alpha, C_\alpha) = \left( 1 + \frac{v_\perp \sin \varphi}{\Omega_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) F_\alpha(\varepsilon_\alpha, x), \quad (41.7)$$

где  $F_\alpha(\varepsilon_\alpha, x)$  — произвольная функция  $\varepsilon_\alpha$ , зависящая от  $x$  как от параметра.

В качестве этой функции для невырожденной плазмы естественно выбрать максвелловскую функцию распределения, но с неоднородными значениями плотности и температуры:

$$F_\alpha(\varepsilon_\alpha, x) = \frac{N_\alpha(x)}{[2\pi m_\alpha T_\alpha(x)]^{3/2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_\alpha}{T_\alpha(x)}\right). \quad (41.8)$$

Наличие неоднородности обуславливает принципиально новые свойства плазмы в равновесном состоянии, поэтому исследуем его более подробно. Вычислим плотность электрического заряда  $\rho_0$  и электрического тока  $\mathbf{j}_0$  в равновесном состоянии. Поскольку в равновесном состоянии  $\mathbf{E}_0 = 0$ , имеем

$$\rho_0 = \sum_\alpha e_\alpha \int f_{0\alpha} d\mathbf{p} = \sum_\alpha e_\alpha \int F_\alpha d\mathbf{p} = \sum_\alpha e_\alpha N_\alpha(x) = 0, \quad (41.9)$$

т. е. приходим к обычному условию квазинейтральности плазмы.

Плотность тока в равновесном состоянии

$$\mathbf{j}_0 = \sum_\alpha e_\alpha \int \mathbf{v} f_{0\alpha} d\mathbf{p}. \quad (41.10)$$

Из выражения (41.7) для  $f_{0\alpha}$  следует, что вклад в ток дает лишь второе слагаемое, пропорциональное  $v_\perp \sin \varphi = v_y$ . При этом ток в равновесном состоянии плазмы направлен вдоль оси  $Oy$ :

$$\begin{aligned} j_{0x} = j_{0z} &= 0, \\ j_{0y} &= \sum_\alpha e_\alpha \int v_y f_{0\alpha} d\mathbf{p} = \sum_\alpha e_\alpha \int \frac{v_y^2}{\Omega_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x} F_\alpha d\mathbf{p} = \end{aligned} \quad (41.11)$$



$$= \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{\Omega_{\alpha}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{T_{\alpha}}{m_{\alpha}} N_{\alpha} \right) = \frac{c}{B_0} \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} (N_{\alpha} T_{\alpha}) = \frac{c}{B_0} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial x},$$

где  $p_0 = \sum_{\alpha} N_{\alpha} T_{\alpha}$  — полное давление плазмы.

Подставляя далее выражение (41.11) для  $j_{0y}$  в уравнение поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_0 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0,$$

находим следующее условие равновесия плазмы:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{B_0^2}{8\pi} + p_0 \right) = 0. \quad (41.12)$$

Это хорошо известное магнитогидродинамическое условие равновесия плазмы, имеющее ясный физический смысл: неоднородная плазма удерживается в равновесии давлением магнитного поля, вследствие чего градиенты магнитного и гидродинамического давлений уравновешивают друг друга. Не будем детально анализировать следствия, вытекающие из этого условия, одним из которых является практически важный вывод о возможности магнитного удержания горячей плазмы в различных термоядерных устройствах. В дальнейшем понадобится только одно следствие условия равновесия (41.12), заключающееся в том, что в плазме низкого давления с

$$\beta = \frac{8\pi p_0}{B_0^2} \ll 1$$

характерный размер неоднородности магнитного поля  $L_B$  много больше характерного масштаба неоднородности кинетического давления  $L_p$  (или  $L_N, L_T$ ). Действительно, соотношение (41.12) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dx} \ln \frac{B_0^2}{8\pi} + \beta \frac{d}{dx} \ln p_0 = 0, \quad (41.13)$$

откуда и следует, что  $L_p/L_B \sim \beta$ , поскольку  $\frac{d}{dx} \ln \frac{B_0^2}{8\pi} \sim \frac{1}{L_B}$ , а  $\frac{d}{dx} \ln p_0 \sim \frac{1}{L_p}$ . Неравенство  $\beta \ll 1$  реализуется во многих практических случаях, в частности, в большинстве установок для термоядерной плазмы, в плазме газового разряда и ионосферы, а в сильных магнитных полях — и в вырожденной плазме твердого тела. Поэтому далее ограничимся рассмотрением именно такого случая, вследствие чего будем пренебрегать неоднородностью магнитного поля по сравнению с неоднородностью плотности и температуры частиц.

Перейдем к вычислению неравновесной поправки к функции распределения  $\delta f_{\alpha}$ , которую представим в виде

$$\delta f_{\alpha} = \delta f_{\alpha}(x) \exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z). \quad (41.14)$$

Тогда из (41.1) получим

$$\begin{aligned} (\omega - k_y v_y - k_z v_z) \delta f_\alpha + i v_x \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial x} - i \Omega_\alpha \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \varphi} = \\ = -i e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{[\mathbf{vB}]}{c} \right\} \frac{\partial f_{0x}}{\partial \mathbf{p}_\alpha}. \end{aligned} \quad (41.15)$$

Заметим, что характеристика этого неоднородного уравнения в частных производных совпадает с (41.4), т. е., пренебрегая неоднородностью магнитного поля (так как  $\beta \ll 1$ ), получим

$$v_\perp \sin \varphi + \Omega_\alpha x = v_\perp \sin \varphi' + \Omega_\alpha x' = C_\alpha. \quad (41.16)$$

Учитывая это соотношение, общее решение уравнения (41.15) запишем в виде [ср. с (23.7)]

$$\begin{aligned} \delta f_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha \Omega_\alpha} \int_{-\infty}^{\varphi} d\varphi' \left\{ \mathbf{E}(x') + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}(x')] \right\} \times \\ \times \frac{\partial f_{0x}(x', \varphi')}{\partial \mathbf{v}} \exp \left[ \frac{i}{\Omega_\alpha} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - k_y v_\perp \sin \varphi'' - k_z v_z) \right]. \end{aligned} \quad (41.17)$$

Здесь величина  $x'$  связана с  $x$  и  $\varphi$  уравнением характеристики (41.16).

Представим теперь функцию  $\delta f_\alpha(x)$  и поля  $\mathbf{E}(x)$  и  $\mathbf{B}(x)$  в виде  $\exp(i \int k_x(x') dx')$  и ограничимся нулевым приближением геометрической оптики, т. е. при дифференцировании будем учитывать слагаемые, пропорциональные  $k_x(x)$ , в то время как членами, пропорциональными пространственным производным  $k_x(x)$ , пренебрежем. Тогда операции дифференцирования по  $x$  в (41.17) и в уравнениях поля сведутся к умножению соответствующих величин на  $k_x$ . Исключая из (41.17) с помощью уравнения поля  $\partial \mathbf{B} / \partial t = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}$  магнитную индукцию  $\mathbf{B}(x')$ , получаем следующее выражение для  $\delta f_\alpha$ :

$$\begin{aligned} \delta f_\alpha(\mathbf{k}, x) = \frac{e_\alpha}{m_\alpha \Omega_\alpha} \int_{-\infty}^{\varphi} d\varphi' \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} \right) \delta_{ij} + \frac{k_j v_i}{\omega} \right]_{\varphi'} \times \\ \times \frac{\partial f_{0x}(x', \varphi')}{\partial v_j} E_i(\mathbf{k}, \omega) \exp \left[ \frac{i}{\Omega_\alpha} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})_{\varphi''} \right]. \end{aligned} \quad (41.18)$$

Здесь вектор  $\mathbf{k}$  имеет все три компоненты:  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ .

Учтем далее, что

$$\frac{\partial f_{0x}}{\partial p_j} = \frac{\partial f_{0x}}{\partial \mathcal{E}_\alpha} v_j + \frac{\partial f_{0x}}{\partial C_\alpha} \cdot \frac{\partial C_\alpha}{\partial p_j} = \frac{\partial f_{0x}}{\partial \mathcal{E}_\alpha} v_j + \frac{\delta_{yj}}{m_\alpha \Omega_\alpha} \cdot \frac{\partial f_{0x}}{\partial x}. \quad (41.19)$$

Подставляя это соотношение в (41.18) и производя громоздкие, но полностью аналогичные сделанным в § 23 для однородной плазмы выкладки, получаем

$$\delta f(\mathbf{k}, x) = \delta f_1(\mathbf{k}, x) + \delta f_2(\mathbf{k}, x), \quad (41.20)$$

где для неоднородной максвелловской плазмы с равновесной функцией распределения вида (41.7), (41.8) имеем

$$\delta f_1(\mathbf{k}, x) = \frac{1}{T_\#} \left( 1 - \frac{k_y v_T^2}{\omega \Omega} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) T \delta f^{(0)}(\mathbf{k}, x), \quad (41.21)$$

$$\delta f_2(\mathbf{k}, x) = -\frac{ie}{m\Omega} \cdot \frac{E_y}{\omega} \cdot \frac{\partial F(x, \mathbf{v})}{\partial x} \sum_{s, n} J_s \left( \frac{k_\perp v_\perp}{\Omega} \right) J_n \left( \frac{k_\perp v_\perp}{\Omega} \right) e^{i(n-s)(\xi-\varphi)}.$$

В приведенных выражениях для простоты опущен индекс  $\alpha$  и введены следующие обозначения:  $\xi$  — полярный угол вектора  $\mathbf{k}$ , т. е.  $\mathbf{k} = (k_x = k_\perp \cos \xi, k_y = k_\perp \sin \xi, k_z)$ ;  $\delta f^{(0)}(\mathbf{k}, x)$  — функция, по виду совпадающая с поправкой к равновесной функции распределения в однородной максвелловской плазме (23.4), с тем лишь отличием, что  $N$  и  $T$  считаются зависящими от координаты  $x$ .

Нетрудно показать, что  $\delta f_2$  не дает вклада в плотность тока, индуцированного в плазме. Вклад  $\delta f_2$  в плотность индуцированного заряда также обращается в нуль после суммирования по сортам зарядов вследствие квазинейтральности плазмы. Таким образом, плотность индуцированных в плазме заряда и тока, а следовательно, и тензор диэлектрической проницаемости полностью определяются поправкой  $\delta f_1(\mathbf{k}, x)$ . Тогда из самого вида  $\delta f_1(\mathbf{k}, x)$  с очевидностью следует искомым тензор диэлектрической проницаемости слабонеоднородной невырожденной плазмы:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, x) = & \delta_{ij} + \sum_\alpha \frac{1}{T_\alpha} \left( 1 - \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\omega \Omega_\alpha} \times \right. \\ & \left. \times \frac{\partial}{\partial x} \right) T_\alpha [\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}(\omega, \mathbf{k}, x) - \delta_{ij}], \end{aligned} \quad (41.22)$$

где  $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}(\omega, \mathbf{k}, x)$  — парциальный тензор диэлектрической проницаемости частиц сорта  $\alpha$ , по виду совпадающий с тензором диэлектрической проницаемости однородной плазмы (23.10), в котором, однако,  $N_\alpha$  и  $T_\alpha$  являются функциями координаты  $x$ .

Следует заметить, что тензор (23.10) записан в системе координат, в которой вектор  $\mathbf{k}$  ориентирован таким образом, что  $\mathbf{k} = (k_\perp, 0, k_z)$ , в то время как в (41.22) система координат для  $\mathbf{k}$  произвольна:  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ . Поэтому тензор (23.10) следует перевести в новую систему координат согласно общим правилам преобразования тензоров при вращении системы координат. Однако, как правило, в этом нет необходимости. Убедимся в этом в следующем параграфе, а пока ограничимся лишь указанием на то, что продольная диэлектрическая проницаемость является инвариантом относительно преобразования системы координат. Поэтому для вычисления продольной диэлектрической проницаемости можно пользоваться старым выражением (23.13), но

к компонентам этого тензора в случае неоднородной плазмы следует применять оператор

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{T_{\alpha}} \left( 1 - \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\omega \Omega_{\alpha}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) T_{\alpha}. \quad (41.23)$$

В результате получаем

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left\{ 1 - \sum_n \frac{\omega}{\omega - n \Omega_{\alpha}} \left[ 1 - \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\omega \Omega_{\alpha}} \left( \frac{\partial \ln N_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial T_{\alpha}} \right) \right] A_n \left( \frac{k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2} \right) J_n \left( \frac{\omega - n \Omega_{\alpha}}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right\}. \quad (41.24)$$

Здесь под  $k_{\perp}$  нужно понимать  $k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ .

Как видно из выражений (41.22) и (41.24), в неоднородной максвелловской плазме с характерным размером неоднородности  $L_0$  появляется новая характерная частота

$$\omega_{др\alpha} = k_y v_{др\alpha} \sim \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\Omega_{\alpha} L_0}. \quad (41.25)$$

называемая ларморовской дрейфовой частотой (смысл этого названия и физическая природа  $\omega_{др\alpha}$  будут выяснены позднее). При высоких частотах  $\omega \gg \omega_{др\alpha}$  членами, содержащими пространственные производные в выражениях для компонент тензора  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, x)$ , можно пренебречь, и тогда они в точности совпадут с соответствующими выражениями для компонент диэлектрической проницаемости однородной плазмы, но в которых  $N_{\alpha}$  и  $T_{\alpha}$  зависят от координаты  $x$ . Более того, из вывода выражения (41.22) следует, что в этом пределе справедливы соотношения для компонент тензора диэлектрической проницаемости с учетом столкновений частиц (см. § 27, 29), а также для продольной и поперечной диэлектрических проницаемостей изотропной плазмы в отсутствие внешних полей (см. § 17, 21, 22).

Полученную связь между тензорами диэлектрической проницаемости слабонеоднородной и однородной плазмы (41.22) нетрудно обобщить на случай вырожденной плазмы, когда функция  $F_{\alpha}(\mathcal{E}_{\alpha}, x)$  имеет вид функции распределения Ферми:

$$F_{\alpha}(\mathcal{E}_{\alpha}, x) = \begin{cases} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} & \text{при } \mathcal{E}_{\alpha} < \mathcal{E}_{F\alpha}(x), \\ 0 & \text{при } \mathcal{E}_{\alpha} > \mathcal{E}_{F\alpha}(x), \end{cases} \quad (41.26)$$

где  $\mathcal{E}_{F\alpha}(x) = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_{\alpha}} N_{\alpha}^{2/3}(x)$  — локальная энергия Ферми для частиц сорта  $\alpha$  с неоднородной плотностью  $N_{\alpha}(x)$ .

Условие равновесия (41.12) при этом сохраняет свой вид, если под  $p_0$  понимать газокинетическое давление в вырожденной плазме:

$$p_0 = \sum_{\alpha} \frac{1}{5} (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m_{\alpha}} N_{\alpha}^{5/3}. \quad (41.27)$$

Вывод выражения для тензора диэлектрической проницаемости вырожденной плазмы низкого давления с  $\beta = \frac{8\pi p_0}{B_0^2} \ll 1$  полностью аналогичен проведенному для невырожденной плазмы. При этом, однако, нужно учесть, что для функции распределения Ферми имеет место соотношение

$$\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \varepsilon_{\alpha}} + \frac{k_y}{m\Omega_{\alpha}\omega} \cdot \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial x} = \left( 1 - \frac{k_y}{m\Omega_{\alpha}\omega} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{F\alpha}}{\partial x} \right) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \varepsilon_{\alpha}}, \quad (41.28)$$

которое при подстановке в (41.18) окончательно приводит к следующему соотношению [ср. с (41.22)]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, x) = & \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \left( 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{k_y v_{F\alpha}^2}{\omega \Omega_{\alpha}} \times \right. \\ & \left. \times \frac{\partial \ln N_{\alpha}}{\partial x} \right) [\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}(\omega, \mathbf{k}, x) - \delta_{ij}], \end{aligned} \quad (41.29)$$

где  $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}(\omega, \mathbf{k}, x)$  — парциальный тензор диэлектрической проницаемости частиц сорта  $\alpha$ , по виду совпадающий с тензором диэлектрической проницаемости однородной вырожденной плазмы (23.14), в котором  $N_{\alpha}$  считается функцией координаты  $x$ .

Наконец, приведем выражение для продольной диэлектрической проницаемости, описывающей потенциальные колебания вырожденной плазмы:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = & \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, x) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{F\alpha}^2} \left[ 1 - \right. \\ & \left. - \frac{\omega}{2} \sum_n \left( 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{k_y v_{F\alpha}^2}{\omega \Omega_{\alpha}} \cdot \frac{\nu}{\partial x} \ln N_{\alpha} \right) \times \right. \\ & \left. \times \int_0^{\pi} \frac{\sin \vartheta d\vartheta J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{F\alpha}}{\Omega_{\alpha}} \sin \vartheta \right)}{\omega - k_z v_{F\alpha} \cos \vartheta - n\Omega_{\alpha}} \right]. \end{aligned} \quad (41.30)$$

Так же как в невырожденной плазме, в вырожденной неоднородной плазме появляется новая характерная частота, называемая дрейфовой частотой и равная

$$\omega_{др\alpha} = k_y v_{др\alpha} = \frac{2}{3} \cdot \frac{k_y v_{F\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}} \cdot \frac{1}{L_0}, \quad (41.31)$$

где  $L_0$  — характерный размер неоднородности плотности частиц.

При частотах  $\omega \gg \omega_{дра}$  дрейфовыми слагаемыми в (41.29) и (41.30) можно пренебречь. Тензор диэлектрической проницаемости в этом пределе имеет такой же вид, как и для однородной плазмы, но плотность частиц зависит от  $x$  как от параметра.

## § 42. Спектры высокочастотных колебаний слабеоднородной плазмы

Применим полученные в предыдущих параграфах общие результаты к исследованию высокочастотных ( $\omega \gg \omega_{дра}$ ) спектров колебаний слабеоднородной плазмы. Ограничимся рассмотрением предельных случаев, в которых удастся получить для спектров частот аналитические соотношения.

Начнем с рассмотрения поперечных колебаний изотропной плазмы. В пределе достаточно редких столкновений частиц, когда  $\omega \gg \nu_e$ , уравнение эйконала для таких колебаний при учете выражений (21.12) и (22.9), определяющих  $\varepsilon^{tr}(\omega, k, x)$ , запишется в виде

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 - \frac{\omega_{Le}^2(x)}{\omega^2} + i \frac{\nu_e \omega_{Le}^2(x)}{\omega^3} \right] = 0, \quad (42.1)$$

где  $\nu_e = \nu_{en}$  — для слабоионизованной и  $\nu_e = \nu_{эфф}$  — для полностью ионизованной плазмы.

Из этого уравнения находим

$$k_x^2(\omega, x) = -k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} + i \frac{\omega_{Le}^2 \nu_e}{\omega^3} \right). \quad (42.2)$$

Для того чтобы найти спектр частот и декремент затухания рассматриваемых колебаний согласно изложенной методике, из (42.2) следует определить  $\text{Re } k_x$  и  $\text{Im } k_x$  и подставить их в соотношения (40.8). Заметим, однако, что обычно из уравнения эйконала непосредственно определяются  $\text{Re } k_x^2$  и  $\text{Im } k_x^2$ , поэтому соотношения (40.8) с учетом  $|\text{Re } k_x| \gg |\text{Im } k_x|$  удобнее записать в виде

$$\int dx \text{Re } k_x = \int dx (\text{Re } k_x^2)^{1/2} = \pi n, \quad (42.3)$$

$$\delta = - \frac{\int \frac{dx}{\text{Re } k_x} \text{Im } k_x^2}{\int \frac{dx}{\text{Re } k_x} \cdot \frac{d}{d\omega} \text{Re } k_x^2}.$$

Подставляя сюда соответствующие выражения для действительной и мнимой частей  $k_x^2$ , получаем дисперсионные уравнения для спектров поперечных электромагнитных волн в изотропной неоднородной

плазме в приближении геометрической оптики:

$$\int dx \left( -k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{Le}^2}{c^2} \right)^{1/2} = \pi n, \quad (42.4)$$

$$\delta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \cdot \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \nu_e}{\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x}}.$$

Как видно из (42.4), частота поперечных волн в слабонеоднородной плазме всегда больше локального значения электронной плазменной частоты  $\omega^2 > \omega_{Le}^2(x)$ , а область прозрачности соответствует значениям  $\omega_{Le}^2(x)$ , меньшим его локального значения  $\omega_{Le}^2(b)$  в точке поворота  $b$ :

$$(k_y^2 + k_z^2) c^2 + \omega_{Le}^2(b) = \omega^2.$$

В большинстве реальных условий распределение плотности заряженных частиц вдоль направления неоднородности имеет максимум в некоторой точке и плавно спадает от этого максимального значения. Таково радиальное распределение плотности заряженных частиц в газовом разряде и установках для термоядерного синтеза (рис. 29), а также в ионосферной плазме (рис. 30). Нетрудно видеть, что для частот  $\omega^2 < \omega_{Le}^2(c) = \omega_{Le\max}^2$  имеются две точки поворота, между которыми лежит область непрозрачности плазмы. Для частот  $\omega^2 > \omega_{Le\max}^2$  плазма полностью прозрачна, т. е. электромагнитные волны инфинитны (колебания не являются запертыми) и их частота не квантуется. Так же инфинитны колебания в областях прозрачности, лежащих левее и правее точек поворота  $b$  и  $a$  (рис. 29) в случае, когда плазменный шнур находится в свободном пространстве или в верхней области прозрачности ионосферной плазмы. В нижней области прозрачности ионосферной плазмы решения финитны. Это связано с тем, что при  $h = 0$  ( $x = 0$ ) указанная область граничит с Землей, от поверхности которой происходит отражение электромагнитных волн практически без потерь (недиссипативная граница). Поэтому при

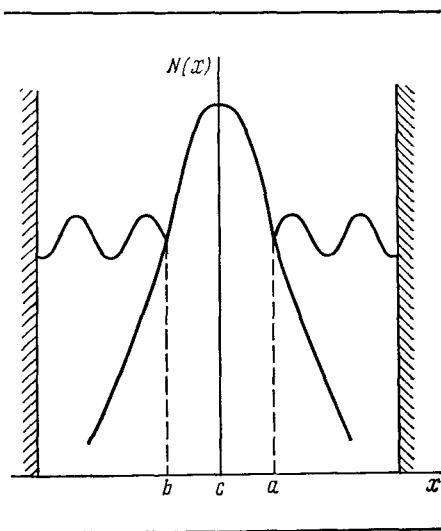


Рис. 29

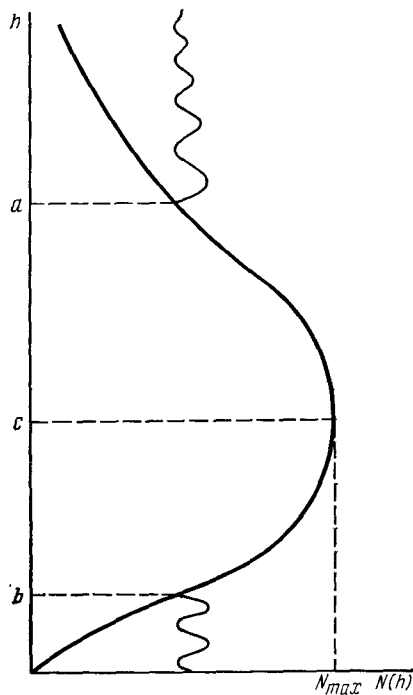


Рис. 30

этом следует пользоваться квантованными спектрами (42.4), в которых область интегрирования простирается от нуля до  $b$ . Квантованность спектров проявляется тем сильнее, чем длиннее электромагнитные волны. Правило квантования (42.4) справедливо и для лабораторной плазмы, помещенной внутри какой-либо металлической камеры, например волновода, как показано на рис. 29.

Рассмотрим теперь продольные волны, в частности высокочастотные ( $\omega \gg kv_{Te}, v_e$ ) продольные ленгмюровские колебания. Из общего уравнения эйконала (40.6) с использованием выражений (21.12) и (22.8) в рассматриваемом пределе получаем

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left( 1 + 3 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega \omega_{Le}^2}{k^3 v_{Te}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}} +$$

$$+ i \frac{\omega_{Le}^2 v_e}{\omega^3} = 0. \quad (42.5)$$

Определяя отсюда выражения для  $\text{Re } k_x^2$  и  $\text{Im } k_x^2$  и подставляя в (42.3), находим дисперсионные уравнения для высокочастотных продольных волн в неоднородной плазме:

$$\int dx \text{Re } k_x = \int dx \left( -k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2 - \omega_{Le}^2}{3v_{Te}^2} \right)^{1/2} = \pi n, \quad (42.6)$$

$$\delta = - \left( \int \frac{dx}{\text{Re } k_x} \cdot \frac{1}{v_{Te}^2} \right)^{-1} \int \frac{dx}{\text{Re } k_x} \cdot \frac{1}{v_{Te}^2} \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} v_e + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_{Le}^4}{k^3 v_{Te}^3} e^{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2k^2 r_s^2 D_e}} \right).$$

В выражении для  $\delta$  под  $k^2$  следует понимать величину  $k^2 = \text{Re } k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ . Интегрирование в этих формулах ведется по области



прозрачности плазмы, т. е. по области, в которой  $\text{Re } k_x^2 > 0$ , а значит,  $\omega^2 > \omega_{Le}^2(x)$ , аналогично тому, как это было для поперечных колебаний. Точно так же для продольных плазменных волн в случае пространственного распределения плотности типа, подобного изображенному на рис. 29, существуют две точки поворота, определяемые из уравнения  $\omega^2 = 3(k_y^2 + k_z^2)v_{Te}^2 + \omega_{Le}^2(x)$ , между которыми лежит область непрозрачности плазмы. Таким образом, и продольные плазменные волны могут существовать только в периферийных областях плазмы.

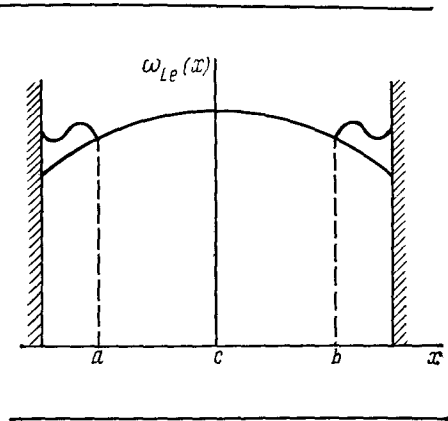


Рис. 31

Однако в отличие от поперечных волн области прозрачности для плазменных волн весьма узки, поскольку уже при небольшом отклонении  $\omega^2$  от  $\omega_{Le}^2$  наступает сильное бесстолкновительное затухание этих волн. Это приводит к тому, что область прозрачности плазменных волн ограничена с одной стороны точкой поворота, а с другой — областью сильного поглощения, вследствие чего их спектр не квантуется. Исключение составляют только частные плазменные конфигурации, в которых плотность изменяется сначала плавно, а затем резко падает вблизи границ, например, как в положительном столбе разряда низкого давления (рис. 31). В этом случае плазменные волны доходят до границ плазмы, не успев затухнуть, и испытывают там отражение. Интегрирование в (42.6) ведется по областям, лежащим между границами плазмы и точками поворота  $a$  и  $b$ , в результате чего спектр колебаний оказывается квантованным. Такие колебания резонансно возбуждаются в газоразрядных приборах внешними электрическими полями и носят название резонансов Тонкса — Даттнера.

Рассмотрим низкочастотные ионно-звуковые колебания в неоднородной изотропной плазме, в которой  $T_e \gg T_i$ . При зависимости плотности от координат, представленной на рис. 31, ионно-звуковые колебания оказываются запертыми в плазме. Уравнение эйконала (40.6) для таких волн (в области частот  $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$ , см. § 21 и 22) принимает вид

$$1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega}{kv_{Te}} \right) + i\alpha \frac{\omega_{Li}^2 v_i}{\omega^3} = 0, \quad (42.7)$$

где  $\alpha = 1$  — для слабоионизованной плазмы (при этом  $v_i = v_{in}$ ) и  $\alpha = (8/5) \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2}$  — для полностью ионизованной плазмы ( $v_i = v_{ii}$ ).

Из (42.7) получаем следующие дисперсионные уравнения для ионно-звуковых волн неоднородной плазмы:

$$\int dx \sqrt{\operatorname{Re} k_x^2} \equiv \int dx \left( -k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{v_s^2} \cdot \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Li}^2 - \omega^2} \right)^{1/2} = \pi n, \quad (42.8)$$

$$\delta = -\frac{\omega^2}{2} \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \cdot \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Li}^2 - \omega^2} \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{k v_{Te} v_s^2} + \frac{k^2 v_{ia}}{\omega^4} \right) \times$$

$$\times \left[ \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \cdot \frac{\omega_{Li}^4}{v_s^2 (\omega_{Li}^2 - \omega^2)^2} \right]^{-1}.$$

В выражении для  $\delta$  под  $k^2$  нужно понимать в соответствии с условием слабости затухания величину  $k^2 = \operatorname{Re} k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ , где  $\operatorname{Re} k_x^2$  определяется первым соотношением (42.8). Из (42.8) следует, что рассматриваемые колебания существуют в области частот  $\omega^2 < \omega_{Li}^2(x)$ , а следовательно, при колоколообразном распределении плотности (рис. 32) они заперты в плазме между точками  $a$  и  $b$ , в которых  $\omega_{Li}^2(a) = \omega_{Li}^2(b) = \omega^2$ . Точки  $a$  и  $b$ , однако, не являются точками поворота колебаний; в этих точках  $\operatorname{Re} k_x^2 \rightarrow \infty$  и условия применимости геометрической оптики не только не нарушаются, а наоборот, улучшаются, поскольку длина волны с приближением к этим точкам резко уменьшается. Указанные точки называются точками с г у щ е н и я. Вблизи этих точек происходит сильное поглощение ионно-звуковых волн, и поэтому они являются неквазованными. Квазованными эти волны оказываются в условиях, когда между точками  $a$  и  $b$  находятся стенки сосуда, ограничивающего плазму, от которых происходит отражение волн.

Заметим, что дисперсионные уравнения для поперечных волн (42.4) и электронных ленгмюровских колебаний (42.6) справедливы и в случае вырожденной плазмы с тем лишь отличием, что в (42.6)  $v_{Te}^2$  следует заменить на  $v_{Fe}^2$  и опустить экспоненциально малое слагаемое в выражении для декремента затухания  $\delta$ , соответствующее черенковскому поглощению продольных волн электронами плазмы; в вырожденной плазме такое поглощение отсутствует.

Что касается ионно-звуковых волн, то в плазме, в которой электроны вырождены, а ионы — не вырождены, вместо уравнения эйконала (42.7) имеем

$$1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} + \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} \left( 1 + i \frac{\pi}{2} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\omega}{k v_{Fe}} \right) + i \alpha \frac{\omega_{Li}^2 v_{ia}}{\omega^3} = 0. \quad (42.9)$$

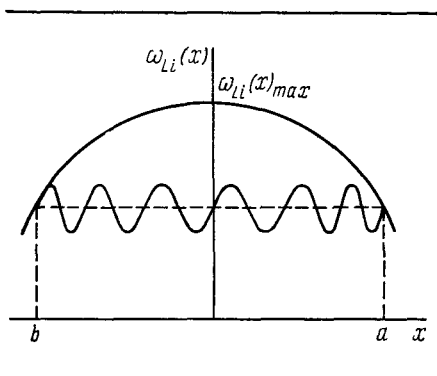


Рис. 32

В результате дисперсионные уравнения для ионно-звуковых волн (42.8) в случае такой вырожденной плазмы приобретают вид,

$$\int dx \sqrt{\operatorname{Re} k_x^2} = \int dx \left[ -k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{v_s^2} \cdot \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Li}^2 - \omega^2} \right]^{1/2} = \pi n, \quad (42.10)$$

$$\delta = -\frac{\omega^2}{2} \left[ \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \cdot \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Li}^2 - \omega^2} \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{kv_{Fe}} \cdot \frac{1}{v_s^2} + \frac{k^2 v_{ia}}{\omega^4} \right) \right] \times \\ \times \left[ \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \cdot \frac{\omega_{Li}^2}{v_s^2 (\omega_{Li}^2 - \omega^2)} \right]^{-1},$$

где  $v_s^2 = 3v_{Fe}^2 \frac{m}{M}$  — скорость ионно-звуковых волн в плазме с вырожденными электронами.

Здесь, так же как и в невырожденной плазме, колебания возможны при условии  $\omega^2 < \omega_{Li}^2(x)$ . Поэтому в плазменном слое со спадающим к поверхности распределением плотности колебания оказываются запертыми в плазме между точками сгущения  $a$  и  $b$ , в которых  $\omega^2 = \omega_{Li}^2(a) = \omega_{Li}^2(b)$ . Наконец, так же как и в невырожденной плазме, спектр ионно-звуковых волн в вырожденной плазме не квантуется из-за сильного поглощения их вблизи точек сгущения.

Перейдем к анализу спектров высокочастотных ( $\omega \gg \omega_{дрa}$ ) колебаний слабонеоднородной магнитоактивной плазмы. При этом, как отмечалось, в выражении для тензора диэлектрической проницаемости слабонеоднородной плазмы можно пренебречь членами с пространственными производными. Тогда уравнение эйконала будет иметь такой же вид, как и дисперсионное уравнение колебаний однородной плазмы с тем лишь отличием, что входящие в него компоненты тензора  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, x)$  зависят от координаты  $x$  вследствие зависимости от  $x$  плотности и температуры плазмы.

Ограничимся рассмотрением холодной магнитоактивной плазмы, когда выполнены неравенства (24.1). Поскольку в этом пределе спектры колебаний по существу не зависят от скорости теплового движения частиц, полученные ниже результаты справедливы как для невырожденной, так и для вырожденной плазмы.

Уравнение эйконала (40.5) в рассматриваемом случае удобно записать в виде

$$k_{\perp}^4 \epsilon_{xx} + k_{\perp}^2 \left[ \left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{xx} \right) (\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}) - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{xy}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon_{xx} \epsilon_{yy} - \epsilon_{xy}^2) \right] + \epsilon_{zz} \left[ \left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{xx} \right) \cdot \left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{yy} \right) + \frac{\omega^4}{c^4} \epsilon_{xy}^2 \right] = 0, \quad (42.11)$$

где  $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$ , а компоненты тензора  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, x)$  определяются выражениями (24.3), (25.7), (27.6) и (28.7). Важно, что эти компоненты

не зависят от проекции волнового вектора  $k_{\perp}$ . Поэтому уравнение (42.11) определяет два значения  $k_{x1,2}^2(\omega, x)$ , что соответствует обыкновенной и необыкновенной волнам в холодной магнитоактивной плазме. Пренебрегая малой диссипацией, обусловленной антиэрмитовской частью тензора  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, x)$ , и определяя из (42.11)  $\text{Re } k_x^2(\omega, x)$ , с помощью правил квантования (40.8) получаем следующие дисперсионные уравнения для нахождения спектров частот колебаний холодной магнитоактивной слабонеоднородной плазмы:

$$\int dx (-k_y^2 - p \pm \sqrt{p^2 - q})^{1/2} = \pi n. \quad (42.12)$$

Здесь введены обозначения:

$$p = \frac{1}{2\epsilon_{\perp}^{\circ}} \left[ \left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\perp}^{\circ} \right) (\epsilon_{\perp}^{\circ} + \epsilon_{\parallel}^{\circ}) + \frac{\omega^2}{c^2} g^{\circ 2} \right], \quad (42.13)$$

$$q = \frac{\epsilon_{\parallel}^{\circ}}{\epsilon_{\perp}^{\circ}} \left[ \left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\perp}^{\circ} \right)^2 - \frac{\omega^4}{c^4} g^{\circ 2} \right].$$

Уравнение (42.12) определяет все пять ветвей колебаний холодной магнитоактивной плазмы, проанализированных в § 24 ÷ 29. Ограничимся здесь только анализом спектров альвеновских, быстрых магнитозвуковых и спиральных волн.

Для анализа альвеновских и быстрых магнитозвуковых волн рассмотрим область низких частот  $\omega \ll \Omega_i$ . Легко показать, что дисперсионные уравнения (42.12) в этом пределе сводятся к виду

$$\int dx \text{Re } k_x = \int dx \left[ -k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + \frac{c^2}{v_A^2} \right) \right]^{1/2} = \pi n, \quad (42.14)$$

$$\int dx \text{Re } k_x = \int dx \left\{ -k_y^2 - \frac{\omega_{Le}^2}{c^2} \left[ 1 - \frac{k_z^2 v_A^2}{\omega^2 \left( 1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right)} \right] \right\}^{1/2} = \pi n. \quad (42.15)$$

В случае однородной плазмы первая из этих ветвей колебаний соответствует быстрой магнитозвуковой волне, а вторая — альвеновской волне, спектры частот которых определяются выражениями (24.16). Как следует из соотношений (42.14) и (42.15), точки поворота для быстрой магнитозвуковой волны находятся из условия  $\omega^2 = (k_z^2 + k_y^2)v_A^2(x)$ , т. е.  $\omega_{Li}^2(x) = (k_y^2 + k_z^2) \frac{c^2 \Omega_i^2}{\omega^2}$ , причем область прозрачности определяется неравенством  $\omega_{Li}^2(x) > (k_y^2 + k_z^2) \frac{c^2 \Omega_i^2}{\omega^2}$ . При колоколообразном распределении плотности плазмы в пространстве (см. рис. 29) это означает, что быстрые магнитозвуковые волны являются запертыми между точками поворота внутри плазмы, а следовательно, их спектры квантуются. Альвеновские же волны в неоднородной плазме могут существовать в области  $\omega^2 < k_z^2 v_A^2(x)$ , т. е. для них имеются две обла-

сти прозрачности, лежащие на периферии плазмы при значениях  $x$ , соответственно меньших или больших координат точек поворота, определяемых равенством  $\omega_{Li}^2(x) = k_z^2 \frac{c^2 \Omega_i^2}{\omega^2}$ . Для плазмы со свободной поверхностью эти области инфинитны, колебания не являются запертыми, а следовательно, их спектры не квантуются. В действительности в лабораторных условиях всегда есть наружные стенки, ограничивающие плазму и замыкающие внешние области прозрачности по отношению к альвеновской волне. Кроме того, при удалении от центра плазменного слоя в результате увеличения альвеновской скорости  $v_A(x)$  может нарушиться условие  $\omega^2 < k_z^2 v_A^2(x)$  и соотношение (42.15) потеряет смысл.

Учет диссипативных членов в уравнении эйконала (42.12) приводит к появлению малой мнимой части  $\text{Im } k_x(\omega, x)$ , а вместе с ней и к затуханию волн. В области частот  $\omega \ll \Omega_i$  для декрементов затухания быстрых магнитозвуковых и альвеновских волн в невырожденной плазме имеем

$$\delta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\int \frac{dx}{\text{Re } k_x} \left( \sum_a \frac{\omega_{La}^2 \nu_a}{\Omega_a^2} + 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Le}^2 k_{\perp}^2 v_{Te}}{|k_z| \Omega_e^2} e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}} \right)}{\int \frac{dx}{\text{Re } k_x} \left( 1 + \frac{c^2}{v_A^2} \right)}, \quad (42.16)$$

$$\delta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\int \frac{dx}{\text{Re } k_x} \left( \sum_a \frac{\omega_{La}^2 \nu_a}{\Omega_a^2} \cdot \frac{\omega_{Le}^2}{1 + c^2/v_A^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^4 c^2 k_{\perp}^2}{|k_z^3| v_{Te}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}} \right)}{\int \frac{dx}{\text{Re } k_x} \cdot \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \cdot \frac{k_z^2 v_A^2}{1 + v_A^2/c^2}}. \quad (42.17)$$

Эти выражения справедливы и для вырожденной плазмы, если в них пренебречь экспоненциально малыми членами, обусловленными черенковским поглощением волн электронами плазмы; в вырожденной плазме в рассматриваемых условиях такое поглощение отсутствует. В формулах (42.16), (42.17) под  $k_{\perp}^2$  следует понимать  $k_{\perp}^2 = \text{Re } k_x^2 + k_y^2$ , а  $\text{Re } k_x$  определяется соотношениями (42.14), (42.15). Для полностью ионизованной плазмы  $\nu_i = \frac{m}{M} \nu_{\text{эфф}}$  и  $\nu_e = \nu_{\text{эфф}}$ , для слабоионизованной плазмы  $\nu_a = \nu_{\text{ал}}$ .

Наконец, рассмотрим спиральные волны — геликоны в слабонеоднородной холодной плазме. Из приведенных в § 24 ÷ 29 рассуждений следует, что эти волны могут существовать лишь в достаточно плотной плазме в области промежуточных частот  $\Omega_i^2 \ll \omega^2 \ll \Omega_e^2$ . В этой области частот при условии  $\omega_{Le}^2 > \omega \Omega_e$  из уравнения эйконала (42.11) нетрудно найти  $\text{Re } k_x^2(\omega, x)$  и записать дисперсионное

уравнение для определения спектра частот спиральной волны:

$$\int dx \operatorname{Re} k_x \equiv \int dx \left( -k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega_{Le}^4 \omega^2}{c^4 k_z^2 \Omega_e^2} \right)^{1/2} = \pi n. \quad (42.18)$$

Это соотношение вытекает непосредственно из (42.12) с учетом явного вида компонент тензора диэлектрической проницаемости. Из (42.18) видно, что в неоднородной плазме спиральная волна может распространяться лишь в областях, где

$$\omega_{Le}^2(x) > [c^4 k_z^2 (k_y^2 + k_z^2) \Omega_e^2 / \omega^2]^{1/2}.$$

В случае колоколообразного распределения плотности плазмы в пространстве, как это имеет место в рассмотренных ранее примерах ионосферной и лабораторной плазмы, отсюда следует, что область прозрачности для такой волны лежит внутри плазмы между точками поворота  $a$  и  $b$ , в которых  $\omega_{Le}^2(a) = \omega_{Le}^2(b) = [c^4 k_z^2 (k_y^2 + k_z^2) \Omega_e^2 / \omega^2]^{1/2}$ . Следовательно, спиральные волны заперты в плазме, и их спектры квантуются.

Декремент затухания спиральных волн определяется выражением

$$\delta = -\frac{1}{2} \left\{ \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \left[ \nu_e (k_y^2 + k_z^2) \frac{c^2 \omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} + \frac{\pi}{2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\omega_{Le}^4 \omega^7 k_{\perp}^2}{k k_z^6 \nu_{Te}^5 |\Omega_e^3|} e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 \nu_{Te}^2}} \right] \left[ \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x} \cdot \frac{\omega_{Le}^4}{\Omega_e^2} \right]^{-1} \right\}, \quad (42.19)$$

которое справедливо для невырожденной плазмы. Однако его можно использовать и для определения декремента затухания спиральной волны в вырожденной плазме, если пренебречь малым экспоненциальным членом, описывающим черенковское поглощение волн электронами плазмы.

В заключение подчеркнем, что ценность полученных результатов заключается прежде всего в правильном количественном описании спектров колебаний неоднородной плазмы. При этом в приближении геометрической оптики сам факт квантованности спектров не существен. В этом приближении квантованность, т. е. дискретность спектров, почти не проявляется. Но это не означает, что локальные спектры, получаемые непосредственно из уравнения эйконала, будут всегда количественно правильными, особенно для длинноволновых и слабозатухающих колебаний, размер области прозрачности для которых сравним с характерным размером неоднородности плазмы.

### § 43. Дрейфовые колебания слабонеоднородной бесстолкновительной плазмы

В предыдущем параграфе было показано, что в области высоких частот колебаний, удовлетворяющих условию  $\omega \gg \gg \omega_{дра}$ , где  $\omega_{дра}$  определяется формулой (41.25), пространствен-

ная неоднородность плазмы не приводит к появлению новых спектров колебаний. В этом параграфе перейдем к рассмотрению области низких частот

$$\omega \ll \omega_{\text{дра}} \approx \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha L_0}. \quad (43.1)$$

Существование в неоднородной плазме в этой области частот новой характерной частоты — ларморовской дрейфовой частоты  $\omega_{\text{дра}}$  — наводит на мысль, что здесь возможно появление новых ветвей колебаний, в частности, на частотах, близких к  $\omega_{\text{дра}}$ .

Выясним более детально физический смысл дрейфовой частоты, для чего снова обратимся к равновесному состоянию неоднородной плазмы в магнитном поле. Как следует из формул (41.11), ток в равновесном состоянии плазмы отличен от нуля и направлен перпендикулярно как к направлению магнитного поля  $\mathbf{B}_0 \parallel Oz$ , так и к направлению неоднородности плазмы (ось  $Ox$ ), причем в общем виде для плотности тока можно записать

$$\mathbf{j}_i = \sum_\alpha \mathbf{j}_{i\alpha} = c \sum_\alpha \frac{[\mathbf{B}_0 \nabla p_{0\alpha}]_i}{B_0^2} = \frac{c [\mathbf{B}_0 \nabla p_0]_i}{B_0^2}. \quad (43.2)$$

Этому току можно сопоставить эффективную скорость дрейфа частиц сорта  $\alpha$ , параллельную оси  $Oy$ :

$$\mathbf{v}_{\text{дра}} = \frac{\mathbf{j}_\alpha}{e_\alpha N_\alpha} = \frac{c}{e_\alpha N_\alpha} \cdot \frac{[\mathbf{B}_0 \nabla p_{0\alpha}]}{B_0^2}, \quad (43.3)$$

$$v_{\text{дра}} \sim \frac{c T_\alpha}{e_\alpha B_0 L_0} \sim \frac{v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha} \cdot \frac{1}{L_0}.$$

Это хорошо известный ларморовский дрейф частиц. Видно, что заряженные частицы разного знака дрейфуют в неоднородной плазме в противоположных направлениях. Отметим, однако, что этот дрейф не связан с реальным движением центров ларморовских орбит заряженных частиц (центров окружностей, по которым происходит вращение заряженных частиц в магнитном поле). Природу такого дрейфа легко уяснить из рис. 33, на котором изображены две ларморовские круговые орбиты и соответственно два элементарных тока в неоднородной плазме. Из рисунка видно, что в плазме должен существовать результирующий ток, перпендикулярный как к направлению магнитного поля (ось  $Oz$ , перпендикулярная к плоскости чертежа), так и к направлению неоднородности плазмы (ось  $Ox$ ), причем его плотность

$$\begin{aligned} j_{y\alpha} &\sim (e_\alpha N_\alpha(x + \Delta x) v_{T\alpha}(x + \Delta x) - e_\alpha N_\alpha(x) v_{T\alpha}(x)) \sim e_\alpha \Delta x \frac{\partial}{\partial x} N_\alpha v_{T\alpha} \sim \\ &\sim e_\alpha \rho_{L\alpha} \frac{\partial}{\partial x} (N_\alpha v_{T\alpha}) \sim e_\alpha N_\alpha \frac{v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha L_0}, \end{aligned} \quad (43.4)$$

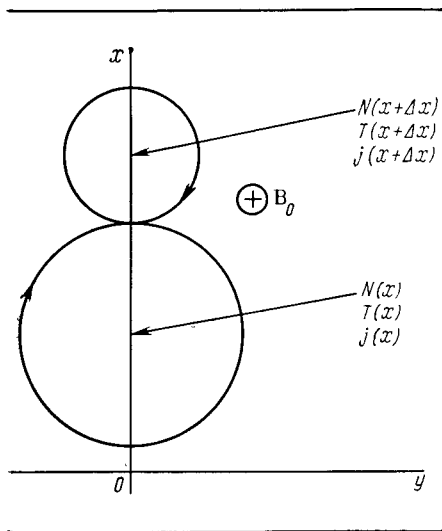


Рис. 33

что совпадает с выражением для плотности тока вида (43.2). Здесь  $\rho_{La} = v_{Ta}/\Omega_a$  — ларморовский радиус частиц сорта  $a$ . Проведенное рассмотрение показывает, что существование тока в равновесном состоянии не связано с реальным движением зарядов, а обусловлено диамагнитным эффектом в плазме. При этом  $j_{ya}$  правильнее всего интерпретировать как разностный диамагнитный ток в неоднородной плазме.

Несмотря на сказанное, наличие ларморовского дрейфа, как увидим далее, приводит к развитию в плазме специфических неустойчивостей, подобно тому как это происходит при развитии пучковой неустойчивости. Однако неустойчивости,

связанные с дрейфовыми движениями в плазме и получившие в связи с этим название дрейфовых, обладают качественно новыми свойствами, в частности, могут развиваться даже в плазме с максвелловской равновесной функцией распределения частиц по скоростям, но с неоднородной плотностью и температурой.

Из выражений (43.1)–(43.4) ясен и физический смысл величины  $\omega_{дрx}$ , которую можно рассматривать как доплеровский сдвиг частоты вследствие ларморовского дрейфа частиц. В термоядерной плазме ( $N \sim 10^{14} \div 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ,  $T \sim 10^8 \text{ К}$ ,  $L_0 \sim 10 \text{ см}$ ,  $B_0 \sim 10^5 \text{ Э}$ )  $v_{др} \sim 10^5 \text{ см/с}$ , а  $\omega_{др} \sim 10^4 \text{ с}^{-1}$  при  $k_y \sim 1/L_0$ . В лабораторной плазме газового разряда ( $N \sim 10^{10} \div 10^{12} \text{ см}^{-3}$ ,  $T \sim 10^4 \div 10^5 \text{ К}$ ,  $L_0 \sim 1 \text{ см}$  и  $B_0 \sim 10^3 \div 10^4 \text{ Э}$ )  $v_{др} \sim 10^5 \div 10^6 \text{ см/с}$ , а  $\omega_{др} \sim 10^5 \div 10^6 \text{ с}^{-1}$ . В ионосферной плазме ( $N \sim 10^7 \text{ см}^{-3}$ ,  $T \sim 10^4 \text{ К}$ ,  $L_0 \sim 10 \div 30 \text{ км}$  и  $B_0 \sim 1 \text{ Э}$ )  $v_{др} \leq 10^2 \text{ см/с}$ , а  $\omega_{др} \leq 10^4 \text{ с}^{-1}$ . Наконец, в вырожденной плазме твердого тела с энергией Ферми  $\epsilon_F \sim 0,1 \div 1 \text{ эВ}$  (что типично для полупроводников и металлов) в магнитных полях  $B_0 \sim 10^4 \text{ Э}$  и при размерах неоднородности  $L_0 \sim 1 \text{ см}$   $v_{др} \sim 10^4 \div 10^5 \text{ см/с}$ , а  $\omega_{др} \sim 10^4 \div 10^5 \text{ с}^{-1}$ . Из этих оценок следует, что дрейфовые частоты намного меньше ларморовских частот электронов и ионов, что существенно упрощает исследование дрейфовых колебаний неоднородной замагниченной плазмы.

Сделаем еще некоторые упрощающие предположения. Во-первых, ограничимся рассмотрением плазмы низкого давления  $\beta \ll 1$ . Тогда с высокой степенью точности низкочастотные дрейфовые колебания можно считать потенциальными. В этом, в частности, убеждает анализ спектров колебаний однородной магнитоактивной плазмы (см. гл. V), не говоря уже о том, что при  $\beta \ll 1$  колебания плазмы не могут зна-



чительно воздействовать на сильное внешнее магнитное поле, возмущением которого можно пренебречь. Для потенциальных колебаний плазмы уравнение эйконала записывается в виде (40.6), т. е.

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = 0, \quad (43.5)$$

где продольная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x)$  дается формулой (41.24) для невырожденной плазмы и (41.29) — для вырожденной. Во-вторых, поскольку прежде всего требуется получение качественно новых результатов, касающихся спектров и устойчивости неоднородной плазмы, ограничимся аналогом локальных спектров, определяемых непосредственно из уравнения (43.5). При этом будем иметь в виду, что точные количественные результаты могут быть легко получены с помощью правил квантования. Использование уравнения эйконала в качестве локального дисперсионного уравнения оправданно в приближении геометрической оптики для очень коротких волн (по сравнению с размером неоднородности плазмы) и соответствует приближенному анализу точных интегральных соотношений с помощью теоремы о среднем значении.

Таким образом, локальное дисперсионное уравнение для дрейфовых колебаний неоднородной невырожденной плазмы запишем в виде

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = 1 + \sum_a \frac{\omega_{La}^2}{k^2 v_{Ta}^2} \left\{ 1 - \sum_n \frac{\omega}{\omega - n\Omega_a} \left[ 1 - \frac{k_y v_{Ta}^2}{\omega \Omega_a} \left( \frac{\partial \ln N_a}{\partial x} + \frac{\partial T_a}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial T_a} \right) \right] A_n \left( \frac{k_{\perp}^2 v_{Ta}^2}{\Omega_a^2} \right) J_+ \left( \frac{\omega - n\Omega_a}{k_z v_{Ta}} \right) \right\} = 0. \quad (43.6)$$

В гл. V было показано, что анализ дисперсионного уравнения для продольных колебаний однородной магнитоактивной плазмы достаточно сложен. Естественно поэтому, что провести полный анализ уравнения (43.6) не представляется возможным. В связи с этим сделаем еще одно упрощающее предположение, а именно, будем считать, что частота дрейфовых колебаний удовлетворяет неравенству

$$\omega \ll \Omega_i. \quad (43.7)$$

Предположим также, что  $k_z v_{Ta} \ll \Omega_a$ , т. е. продольная длина волны много больше ларморовского радиуса частиц. При этих условиях в выражении (43.6) существенной оказывается только нулевая гармоника ( $n = 0$ ); вкладом высших гармоник можно пренебречь, а уравнение эйконала для потенциальных колебаний записать в виде

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = 1 + \sum_a \frac{\omega_{La}^2}{k^2 v_{Ta}^2} \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{k_y v_{Ta}^2}{\omega \Omega_a} \left( \frac{\partial \ln N_a}{\partial x} + \frac{\partial T_a}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial T_a} \right) \right] A_0 \left( \frac{k_{\perp}^2 v_{Ta}^2}{\Omega_a^2} \right) J_+ \left( \frac{\omega}{k_z v_{Ta}} \right) \right\} = 0. \quad (43.8)$$

Приступая к анализу уравнения (43.8), укажем, что при условии  $\omega \ll k_z v_{Ti}$ , как легко видеть, колебания в плазме отсутствуют; су-

существует обычное экранирование потенциального поля в плазме, что имеет наглядный физический смысл. В бесстолкновительной замагниченной плазме величина  $1/(k_z v_{Ti}) \sim \lambda_{\parallel}/v_{Ti}$  характеризует время, за которое на длине волны возмущений вследствие свободного пролета частиц происходит выравнивание плотности и температуры не только электронов, но и ионов. Поэтому условие  $\omega \ll k_z v_{Ti}$  означает, что время выравнивания плотности и температуры плазмы в возмущениях мало по сравнению с периодом колебаний. Очевидно, что в этих условиях продольные волны не могут существовать. Имеется дебаевское экранирование продольного поля в плазме. Изложенные соображения позволяют ограничиться анализом случая  $\omega \gg k_z v_{Ti}$ , при этом, в частности, можно пренебречь ионным затуханием Ландау как экспоненциально малым эффектом.

Ограничимся, кроме того, рассмотрением лишь длинноволновых дрейфовых колебаний, удовлетворяющих условию  $\lambda_{\perp} \gg \beta_{Li}$  ( $\lambda_{\perp} \sim \sim k_{\perp}^{-1}$ ), так как наиболее опасными с точки зрения создания устойчивого плазменного состояния являются именно длинноволновые колебания, поскольку возмущения плотности в них могут охватывать весьма большие области плазмы в радиальном направлении. Коротковолновые колебания менее опасны, так как они приводят к сравнительно мелкомасштабным возмущениям плазмы (коротковолновые дрейфовые колебания рассмотрены в задачах к настоящей главе).

При анализе дрейфовых колебаний важным параметром является, кроме того, отношение их фазовой скорости к тепловой скорости частиц. При этом различают быстрые  $\omega/k_z \gg v_{Te}$  и медленные  $v_{Ti} \ll \omega/k_z \ll v_{Te}$  дрейфовые колебания (волны).

Анализ начнем с быстрых длинноволновых колебаний,  $\lambda_{\perp} \gg \rho_{Li}$ , фазовые скорости которых значительно больше тепловых скоростей частиц. При этом уравнение эйконала (43.8) принимает вид

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \cdot \frac{k_z^2}{k^2} \left( 1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \cdot \frac{\partial \ln NT_e}{\partial x} \right) + \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \cdot \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2} \left( 1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \cdot \frac{\partial \ln NT_i}{\partial x} \right) = 0. \quad (43.9)$$

В области очень низких частот  $\omega \ll \omega_{дра}$  при условии  $c^2 > v_A^2 (\omega_{Li}^2 \gg \Omega_i^2)$  отсюда получаем

$$k_{\perp}^2 \frac{c^2}{v_A^2} \cdot \frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i} \cdot \frac{\partial \ln NT_i}{\partial x} - k_z^2 \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \cdot \frac{k_y v_{Te}^2}{\Omega_e} \cdot \frac{\partial \ln NT_e}{\partial x} = 0. \quad (43.10)$$

Воспользовавшись этим соотношением, как локальным дисперсионным уравнением, находим следующий локальный спектр\*:

\* Здесь и далее введена сокращенная запись, которую следует понимать как

$$\frac{\partial \ln A}{\partial \ln B} = \frac{\partial \ln A / \partial x}{\partial \ln B / \partial x} = \frac{B}{A} \cdot \frac{\partial A / \partial x}{\partial B / \partial x}.$$

$$\omega^3 = - \frac{k_z^2}{k_\perp^2} \cdot \frac{T_e}{T_i} \cdot \frac{M}{m} \Omega_i^2 \frac{\partial \ln NT_e}{\partial \ln NT_i}. \quad (43.11)$$

В формулах (43.10) и (43.11) под  $k_\perp^2$ , как обычно, нужно понимать  $k_\perp^2 = k_y^2 + \text{Re}k_x^2 \approx k_y^2 + \frac{\pi^2 n^2}{L_\perp^2}$ , где  $L_\perp$  — размер установки в направлении оси  $x$ , порядка характерного размера неоднородности плазмы  $L_0$ .

Таким образом, получена качественно новая ветвь колебаний, отсутствующая в пространственно однородной плазме. Более того, эта ветвь всегда аperiodически неустойчива, если выполнено неравенство

$$\frac{\partial \ln NT_e}{\partial \ln NT_i} > 0. \quad (43.12)$$

Условие (43.12) выполняется почти во всех реальных плазмах. Действительно, обычно давление электронов и ионов падает от центра к краям плазмы, причем температура частиц  $T$  падает медленнее плотности  $N$ . В силу этого о найденной неустойчивости говорят как об универсальной. Однако условие  $\omega^2 \ll \Omega_i^2$  приводит к тому, что для возбуждения этой неустойчивости должно выполняться неравенство

$$\frac{k_z^2}{k_\perp^2} \sim \frac{L_\perp^2}{L_\parallel^2} \ll \frac{m}{M} \cdot \frac{T_i}{T_e} \cdot \frac{\partial \ln NT_i}{\partial \ln NT_e} \sim \frac{m}{M}, \quad (43.13)$$

т. е. она может развиваться только в достаточно длинных установках, в которых продольный размер плазмы больше поперечного, по крайней мере, в  $\sqrt{M/m} \geq 40$  раз.

Рассмотренная неустойчивость является чисто гидродинамической, не связанной с черенковской диссипацией энергии. Такого рода неустойчивости неоднородной плазмы часто называют дрейфовыми, подчеркивая тем самым, что они обусловлены только ларморовским дрейфом частиц в плазме.

Значительно менее жесткими оказываются требования к продольным размерам плазмы для проявления длинноволновых дрейфовых колебаний в области фазовых скоростей  $v_{Ti} \ll \omega/k_z \ll v_{Te}$ . Уравнение эйконала (43.8) в этой области частот принимает вид

$$1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left[ 1 + \frac{k_y v_s^2}{\omega \Omega_i} \cdot \frac{\partial \ln N}{\partial x} - \frac{k_z^2 v_s^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \cdot \frac{\partial \ln NT_i}{\partial x} \right) \right] + i \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \left( 1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}} \right) = 0. \quad (43.14)$$

Если плазма изотермическая ( $T_e \sim T_i$ ), то  $\omega \gg k_z v_s$  и из уравнения (43.14) легко получить локальный спектр, пренебрегая в квад-

ратных скобках последним членом ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ ):

$$\omega_1 = - \frac{k_y v_s^2}{\Omega_i} \cdot \frac{\partial \ln N}{\partial x}, \quad (43.15)$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_1^2}{|k_z| v_{Te}} \left( k^2 r_{De}^2 + \frac{k_{\perp}^2 v_s^2}{\Omega_i^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} \right).$$

Таким образом, в неоднородной плазме возможно существование длинноволновых медленных колебаний со спектром (43.15), которые являются кинетически неустойчивыми, если

$$\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} < 2 \left( k^2 r_{De}^2 + \frac{k_{\perp}^2 v_s^2}{\Omega_i^2} \right). \quad (43.16)$$

Такие колебания неоднородной плазмы называются дрейфовыми диссипативными. Этим подчеркивается, что за раскачку колебаний ответствен черенковский механизм диссипации на электронах, который в области дрейфовых частот может изменить знак и привести к раскачке колебаний. Заметим, также, что полученные колебания имеют частоту  $\omega_1 \gg k_z v_s$ , т. е. большую звуковой. Напомним, что в однородной изотермической плазме ( $T_e \sim T_i$ ) в этой области частот колебания невозможны.

В неизотермической плазме ( $T_e \gg T_i$ ) становится существенным последний член в квадратных скобках уравнения эйконала (43.14), пропорциональный величине  $k_z^2 v_s^2 / \omega^2$ . Именно он обуславливает дрейфовые колебания в области  $\omega^2 \ll k_z^2 v_s^2$ , т. е. при частотах, меньших частоты ионно-звуковых колебаний. В этих условиях из уравнения (43.14) нетрудно получить следующий локальный спектр ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ ):

$$\omega_2 = \frac{k_z^2 \Omega_i}{k_y \frac{\partial \ln N}{\partial x}}, \quad (43.17)$$

$$\delta_2 = - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_2^2}{|k_z| v_{Te}} \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} \right).$$

Этот спектр можно рассматривать как продолжение звукового в область низких частот  $\omega \ll k_z v_s$ . Из (43.17) ясно, что черенковская диссипация на электронах может привести к раскачке рассматриваемых колебаний при условии

$$\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 2. \quad (43.18)$$

При этом неустойчивость является кинетической и естественно отнести ее к дрейфово-диссипативной.

Наконец, в области самых низких частот при условии  $\omega \ll \omega_{\text{дра}}$  из уравнения эйконала (43.14) следуют еще два гидродинамически неустойчивых спектра колебаний:

$$\omega_3^2 = -k_z^2 v_{Ti}^2 \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N}, \quad (43.19)$$

$$\omega_4^2 = -k_z^2 v_s^2 \frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i} \cdot \frac{\partial \ln T_i}{\partial x},$$

которые могут существовать при  $\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \gg 1$ , поэтому такие неустойчивости называют дрейфово-температурными.

Рассмотренные длинноволновые дрейфовые колебания в области промежуточных фазовых скоростей  $v_{Ti} \ll \omega/k_z \ll v_{Te}$ , как отмечалось, могут возбуждаться в относительно коротких плазменных установках. Из условия  $\omega \sim \omega_{\text{дра}} \gg k_z v_{Ti}$  следует, что для их проявления достаточно, чтобы  $L_{\parallel}/L_{\perp} > L_{\perp}/\rho_{Li} > 1$ . С другой стороны, пренебрежение столкновениями частиц ( $v_a \ll k_z v_{T\alpha}$ ) означает, что продольные размеры системы должны быть меньше длин свободного пробега частиц, т. е.  $L_{\parallel} < v_{T\alpha}/\nu_a \equiv l_{\alpha}$ . Таким образом, условия применимости бесстолкновительного описания длинноволновых дрейфовых колебаний можно записать в виде

$$1 < \frac{L_{\perp}}{\rho_{Li}} < \frac{L_{\parallel}}{L_{\perp}} < \frac{v_{T\alpha}}{\nu_a} \cdot \frac{1}{L_{\perp}} \sim \frac{l_{\alpha}}{L_{\perp}}. \quad (43.20)$$

В заключение заметим, что для справедливости полученных в этом параграфе формул, строго говоря, необходимо, чтобы либо частоты и инкременты нарастания дрейфовых колебаний немного превышали частоты столкновений частиц в плазме ( $|\omega| \gg \nu_a$ ), либо длины свободного пробега частиц были больше продольной длины волны дрейфовых колебаний ( $\nu_a \ll k_z v_{T\alpha}$ ). Эти требования обусловлены использованием для анализа дрейфовых неустойчивостей плазмы кинетического уравнения Власова, полностью пренебрегающего столкновениями частиц. Поскольку, как указывалось, дрейфовые частоты в реальных установках порядка  $10^4 \div 10^6 \text{ с}^{-1}$ , это ограничение может выполняться лишь в высокотемпературной невырожденной плазме при относительно малых плотностях заряженных частиц. В вырожденной плазме твердых тел оно явно не выполняется, поэтому такую плазму здесь обсуждать не будем. Однако, как будет показано в следующем параграфе, дрейфовые неустойчивости могут развиваться и в плотной плазме с большим числом столкновений частиц. Более того, столкновения частиц, особенно электронов, так же как и черенковская диссипация на электронах, в неоднородной плазме могут стать причиной развития дрейфовых неустойчивостей.

#### § 44. Влияние столкновений заряженных частиц на спектры дрейфовых колебаний слабеоднородной плазмы

Переходя к исследованию влияния столкновений частиц на спектры дрейфовых колебаний слабеоднородной плазмы, прежде всего получим выражение для ее диэлектрической проницаемости с учетом столкновений частиц. Как и в § 41, предположим, что кинетическое давление плазмы мало по сравнению с магнитным, т. е.  $\beta \ll 1$ , что позволяет пренебречь неоднородностью внешнего магнитного поля  $\mathbf{V}_0$  и ограничиться выводом уравнения лишь для продольной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x)$ , описывающей спектры продольных (потенциальных) колебаний.

**I. Слабоионизованная плазма.** Выведем сначала выражение для  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x)$  в случае слабоионизованной невырожденной плазмы, когда преобладают столкновения заряженных частиц с нейтральными. Будем исходить из кинетического уравнения с модельным интегралом БГК (см. § 15). При этом, поскольку речь идет о дрейфовых колебаниях, предположим, что  $\Omega_a > \nu_a$ . Только в этом пределе можно говорить о ларморовском вращении, а следовательно, о ларморовском дрейфе частиц.

Равновесную функцию распределения  $f_{0a}$  определим так же, как и в бесстолкновительном приближении. Пренебрегая интегралом столкновений, выражение для  $f_{0a}$  можно записать в виде (см. § 41)

$$f_{0a}(C_a, \vartheta_a) = \frac{N_a(C_a)}{[2\pi m_a T_a(C_a)]^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_a v^2}{2T_a(C_a)}\right), \quad (44.1)$$

где  $C_a = \frac{v_y}{\Omega_a} + x$  — характеристика кинетического уравнения для равновесной функции распределения.

Для определения отклонения функции распределения от равновесной

$$\delta f_a = \delta f_a(x) \exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z) \quad (44.2)$$

в нулевом приближении геометрической оптики получаем линеаризованное кинетическое уравнение

$$\begin{aligned} -i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\delta f_a - \Omega_a \frac{\partial \delta f_a}{\partial \varphi} &= -i \frac{e_a}{m_a} \mathbf{k}\Phi \times \\ &\times \frac{\partial f_{0a}}{\partial \mathbf{v}} - \nu_{a\alpha} (\delta f_a - \eta_a f_{0a}). \end{aligned} \quad (44.3)$$

Здесь

$$\eta_a = \frac{1}{N_a} \int \delta f_a d\mathbf{p}, \quad (44.4)$$

введен потенциал  $\Phi$  ( $\mathbf{E} = -ik\Phi$ ) и использована цилиндрическая сис-

тема координат в пространстве скоростей. Учитывая далее, что [см. (41.19)]

$$\frac{\partial f_{0x}}{\partial v_i} = \left( -\frac{v_i}{v_{T\alpha}^2} + \frac{\delta_{yi}}{\Omega_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) f_{0x}(x), \quad (44.5)$$

из уравнения (44.3) находим

$$\begin{aligned} \delta f_\alpha = & -\frac{1}{\Omega_\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi' \left[ \frac{ie_\alpha}{m_\alpha} \Phi \left( -\frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{v_{T\alpha}^2} + \frac{k_y}{\Omega_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) f_{0\alpha} + \right. \\ & \left. + v_{an} \eta_\alpha f_{0x} \right] \exp \left[ \frac{i}{\Omega_\alpha} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + iv_{an}) \right]. \end{aligned} \quad (44.6)$$

Дальнейшее вычисление этого интеграла аналогично случаю однодальной плазмы (см. § 24). После получения  $\delta f_\alpha$  легко найти  $\rho_\alpha$ :

$$\rho_\alpha = e_\alpha \int \delta f_\alpha d\mathbf{p} \quad (44.7)$$

и определить продольную диэлектрическую проницаемость согласно соотношениям

$$\epsilon = 1 + \sum_\alpha \delta\epsilon_\alpha = 1 - \sum_\alpha \frac{4\pi\rho_\alpha}{k^2\Phi}. \quad (44.8)$$

Проводя соответствующие выкладки, в нулевом приближении геометрической оптики окончательно получаем

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = & 1 + \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left( 1 - \sum_n \frac{iv_{an}}{\omega - n\Omega_\alpha + iv_{an}} A_n J_+ \right)^{-1} \times \\ & \times \left\{ 1 - \sum_n \frac{\omega + iv_{an}}{\omega + iv_{an} - n\Omega_\alpha} \left[ 1 - \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{(\omega + iv_{an}) \Omega_\alpha} \left( \frac{\partial \ln N_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial T_\alpha}{\partial x} \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \times \frac{\partial}{\partial T_\alpha} \right) \right] A_n \left( \frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} \right) J_+ \left( \frac{\omega + iv_{an} - n\Omega_\alpha}{|k_z| v_{T\alpha}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (44.9)$$

Аналогично вычисляем диэлектрическую проницаемость для слабоионизованной вырожденной плазмы. Единственное отличие состоит в том, что вместо соотношения (44.5) имеем]

$$\frac{\partial f_{0x}}{\partial v_i} = m v_i \frac{\partial f_{0x}}{\partial \delta_\alpha} + \frac{\delta_{yi}}{\Omega_\alpha} \cdot \frac{\partial f_{0x}}{\partial x} = \left( m v_i - \frac{\delta_{yi}}{\Omega_\alpha} \cdot \frac{\partial \delta_{F\alpha}}{\partial x} \right) \frac{\partial f_{0x}}{\partial \delta_\alpha}. \quad (44.10)$$

В результате в нулевом приближении геометрической оптики на-

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = & 1 + \sum_{\alpha} \frac{3\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{F\alpha}^2} \left[ 1 - \sum_n \frac{i}{2} v_{\alpha n} \times \right. \\ & \times \int_0^{\pi} \frac{\sin \vartheta d\vartheta J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{F\alpha}}{\Omega_{\alpha}} \sin \vartheta \right)}{\omega + i v_{\alpha n} - k_z v_{F\alpha} \cos \vartheta - n \Omega_{\alpha}} \left. \right]^{-1} \left[ 1 - \sum_n \frac{\omega + i v_{\alpha n}}{2} \cdot \left( 1 - \frac{2}{3} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \frac{k_y v_{F\alpha}^2}{\omega \Omega_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \ln N_{\alpha}}{\partial x} \right) \int_0^{\pi} \frac{J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{F\alpha}}{\Omega_{\alpha}} \sin \vartheta \right) \sin \vartheta d\vartheta}{\omega + i v_{\alpha n} - k_z v_{F\alpha} \cos \vartheta - n \Omega_{\alpha}} \right]. \quad (44.11) \end{aligned}$$

Полученные выражения (44.9) и (44.11) являются общими и позволяют провести полное исследование дрейфовых колебаний в слабоионизованной неоднородной плазме, как невырожденной, так и вырожденной. Далее, однако, ограничимся анализом только низкочастотных ( $\omega \ll \Omega_j$ ) и длинноволновых ( $\lambda_{\perp} \gg \rho_{Li}$ ) дрейфовых колебаний.

**II. Полностью ионизованная плазма.** В случае полностью ионизованной плазмы, как было показано в § 28, нельзя получить общего выражения для тензора диэлектрической проницаемости типа (44.9) и (44.11). Это связано с тем, что интеграл столкновений заряженных частиц в полностью ионизованной плазме является сложным интегральным выражением, поэтому  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x)$  удастся вычислить лишь для различных предельных случаев.

Очевидно, что равновесная функция распределения в неоднородной плазме в условиях, когда ларморовская частота частиц много больше их характерных частот столкновений, может быть записана в виде (44.1). Представляя неравновесную добавку к равновесной функции распределения в виде (44.2), можно, подобно (28.2), записать кинетическое уравнение для  $\delta f_{\alpha}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} -i(\omega - k_y v_y - k_z v_z) \delta f_{\alpha} + v_x \frac{\partial \delta f_{\alpha}}{\partial x} - \Omega_{\alpha} \frac{\partial \delta f_{\alpha}}{\partial \varphi} = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla \Phi \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v} + \\ + \sum_{\beta} \left( \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta}. \quad (44.12) \end{aligned}$$

Здесь  $\left( \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta}$  — линеаризованный интеграл столкновений заряженных частиц сорта  $\alpha$  с частицами сорта  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} = 2\pi e_{\alpha}^2 e_{\beta}^2 L \frac{\partial}{\partial p_i} \int d\mathbf{p}' \frac{u^2 \delta_{ij} - u_i u_j}{u^3} \cdot \left( f_{0\beta} \frac{\partial \delta f_{\alpha}}{\partial p_j} + \delta f_{\beta} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j} - \right. \\ \left. - f_{0\alpha} \frac{\partial \delta f_{\beta}}{\partial p_j} - \delta f_{\alpha} \frac{\partial f_{0\beta}}{\partial p_j} \right), \quad (44.13) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta}$ , а  $L$  — кулоновский логарифм.



Дальнейший анализ уравнения (44.12) будем вести отдельно для электронной функции распределения  $\delta f_e$  (соответственно  $\delta \varepsilon_e$ ) и ионной функции распределения  $\delta f_i$  (соответственно  $\delta \varepsilon_i$ ).

Рассмотрим сначала электронный вклад в диэлектрическую проницаемость  $\delta \varepsilon_e(\omega, \mathbf{k}, x)$ . Интегральное уравнение (44.12) для электронов с учетом соотношения (44.5) легко решать в приближении геометрической оптики, причем из условий  $\omega \ll \Omega_e$ ,  $k v_{Te} \ll \Omega_e$  (именно в таких условиях возможны дрейфовые колебания) вытекает возможность интегрирования кинетического уравнения по  $\phi$ . Действительно, как отмечалось в предыдущем параграфе, при этом в  $\delta f_e$  основной вклад дает нулевая гармоника, вследствие чего возмущение  $\delta f_e$  можно считать не зависящим от  $\phi$ . Тогда из (44.12) получаем

$$(\omega - k_z v_z) \delta f_e = \frac{e\Phi}{T_e} \left( k_z v_z - \frac{k_y v_{Te}^2}{\Omega_e} a_e \right) f_{0e} + i \left[ \left( \frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{st}^{ee} + \left( \frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{st}^{ei} \right], \quad (44.14)$$

$$a_e = \frac{\partial \ln N_e}{\partial x} + \frac{\partial \ln T_e}{\partial x} \left( -\frac{3}{2} + \frac{v^2}{2v_{Te}^2} \right).$$

Кроме того, если учесть малость тепловой скорости ионов по сравнению со скоростью электронов, то в выражении для интеграла электрон-ионных столкновений  $\left( \frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{st}^{ei}$  слагаемыми, содержащими возмущение ионной функции распределения  $\delta f_i$ , можно пренебречь. Тогда

$$\left( \frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{st}^{ei} = 2\pi e^2 e_i^2 L N_i \frac{\partial}{\partial p_i} \cdot \frac{v^2 \delta_{ij} - v_i v_j}{v^3} \cdot \frac{\partial \delta f_e}{\partial p_j}. \quad (44.15)$$

Интеграл же  $\left( \frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{st}^{ee}$  следует брать в виде (44.13).

При решении уравнения (44.14) ограничимся случаем частых столкновений электронов, когда  $v_e \gg \omega$ ,  $k_z v_{Te}$ . При этом столкновительный член в уравнении (44.14) становится главным, и уравнение можно решить с помощью метода Чепмена—Энскога. Для упрощения кинетического уравнения введем функцию  $F_e$ :

$$\delta f_e = -\frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \cdot \frac{e}{T_e} a_e \Phi f_{0e} + F_e. \quad (44.16)$$

Подставляя (44.16) в (44.14), получаем

$$\begin{aligned} \frac{i e}{T_e} k_z v_z \Phi f_{0e} \left[ 1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \cdot \frac{\partial \ln N T_e}{\partial x} + \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \cdot \frac{\partial \ln T_e}{\partial x} \left( \frac{5}{2} - \frac{v^2}{2v_{Te}^2} \right) \right] = \\ = \left( \frac{\partial F_e}{\partial t} \right)_{st}^{ee} + \left( \frac{\partial F_e}{\partial t} \right)_{st}^{ei}. \end{aligned} \quad (44.17)$$

Теперь разложим  $F_e$  по полиномам Сонина—Лягерра и, ограничиваясь двумя первыми членами разложения:

$$F_e = v_z f_{0e} \left[ a_0 + a_1 \left( \frac{5}{2} - \frac{v^2}{2v_{Te}^2} \right) \right], \quad (44.18)$$

получим из (44.17) систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложения  $a_0$  и  $a_1$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{e}{T_e} k_z \Phi \left( 1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \cdot \frac{\partial \ln NT_e}{\partial x} \right) &= i v_{\Phi\Phi} \left( a_0 + \frac{3}{2} a_1 \right), \\ \frac{e}{T_e} k_z \Phi \frac{5}{2} \cdot \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \cdot \frac{\partial \ln T_e}{\partial x} &= i v_{\Phi\Phi} \left( \frac{3}{2} a_0 + \frac{13+4\sqrt{2}}{4} a_1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (44.19)$$

Дальнейшее вычисление  $\delta \varepsilon_e(\omega, \mathbf{k}, x)$  заключается в следующем. Сначала с помощью найденного выражения  $F_e$  определяем обусловленный  $F_e$  ток  $\delta j_z$ . Заряд, связанный с  $F_e$ , можно найти с помощью уравнения непрерывности  $\delta \rho_e = \frac{k_z}{\omega} \delta j_z$ . Далее обычным способом получаем выражение для  $\delta \varepsilon_e(\omega, \mathbf{k}, x)$ :

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_e(\omega, \mathbf{k}, x) &= \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \left[ \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \cdot \frac{\partial \ln N}{\partial x} + i 1,96 \frac{k_z v_{Te}^2}{\omega v_{\Phi\Phi}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( 1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \cdot \frac{\partial \ln NT_e^{1,7}}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (44.20)$$

при  $v_{\Phi\Phi} \omega \gg k_z^2 v_{Te}^2$  и

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_e(\omega, \mathbf{k}, x) &= \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \left[ 1 + i 1,44 \frac{\omega v_{\Phi\Phi}}{k_z^2 v_{Te}^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( 1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \cdot \frac{\partial \ln NT_e^{-0,56}}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (44.21)$$

при  $v_{\Phi\Phi} \omega \ll k_z^2 v_{Te}^2$ .

Перейдем к рассмотрению ионного вклада в диэлектрическую проницаемость. Уравнение для определения  $\delta f_i$  имеет вид, аналогичный (44.12). Однако интегралом столкновений ионов с электронами  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{st}^{ie}$  в уравнении для ионной функции распределения, как правило, можно пренебречь, поскольку  $v_{ie} \sim v_{ii} \sqrt{\frac{m}{M}} \left( \frac{T_i}{T_e} \right)^{3/2}$  и при условии  $\frac{T_e}{T_i} > \left( \frac{m}{M} \right)^{1/3}$  (что в реальной плазме всегда соблюдается) его вклад в диссипативные процессы пренебрежимо мал. Это существенно упрощает определение  $\delta f_i$ .

Введем функцию  $F_i$ :

$$\delta f_i = \frac{e_i}{T_i} \Phi f_{0i} + F_i. \quad (44.22)$$

Тогда в нулевом приближении геометрической оптики получаем следующее уравнение для определения  $F_i$ :

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) F_i - \Omega_i \frac{\partial F_i}{\partial \varphi} = -\frac{e_i}{T_i} \left( \omega - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i} a_i \right) f_{0i} + i \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{st}^{ii}, \quad (44.23)$$

$$a_i = \frac{\partial \ln N_i}{\partial x} + \frac{\partial \ln T_i}{\partial x} \left( -\frac{3}{2} + \frac{v^2}{2v_{Ti}^2} \right).$$

В дальнейшем при решении этого уравнения ограничимся длинноволновым пределом  $k_{\perp} \rho_{\Delta i} \approx \rho_{\Delta i} / \lambda_{\perp} \ll 1$  и будем считать, что  $\Omega_i \gg \omega \gg v_i$ ,  $k_z v_{Ti}$ . При этом интеграл столкновений в (44.23) хотя и является малым членом, однако его учет необходим. Решение легко найти методом последовательных приближений, причем параметром разложения является отношение  $v_i/\omega$ . В результате довольно громоздких вычислений получаем

$$\delta \varepsilon_i(\omega, \mathbf{k}, x) = \frac{1}{k^2 v_{Di}^2} \left\{ \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \cdot \frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{k_{\perp}^2 v_{Ti}^2}{\Omega_i^2} \left( 1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \cdot \frac{\partial \ln N T_i}{\partial x} \right) + \right.$$

$$+ \frac{i}{10} \cdot \frac{v_{ii}}{\omega} v_{Ti}^4 \left[ \left( 16 \frac{k_z^4}{\omega^4} + 28 \frac{k_z^2 k_{\perp}^2}{\omega^2 \Omega_i^2} + 7 \frac{k_{\perp}^4}{\Omega_i^4} \right) \left( 1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \cdot \frac{\partial \ln N}{\partial x} \right) - \right.$$

$$\left. \left. - \left( 24 \frac{k_z^4}{\omega^4} + \frac{33}{2} \cdot \frac{k_z^2 k_{\perp}^2}{\omega^2 \Omega_i^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{k_{\perp}^4}{\Omega_i^4} \right) \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \cdot \frac{\partial \ln T_i}{\partial x} \right] \right\}. \quad (44.24)$$

Формулы (44.20), (44.21) и (44.24) позволяют исследовать дрейфовые колебания в полностью ионизованной столкновительной плазме в условиях  $v_e \gg \omega$ ,  $k_z v_{Te}$  и  $\omega \gg v_i$ ,  $k_z v_{Ti}$ . На примере таких колебаний покажем, что столкновения частиц не только не стабилизируют дрейфовые неустойчивости неоднородной плазмы, а, наоборот, могут стать причиной их развития. Этот случай наиболее близок к чисто гидродинамическому и должен особенно ярко выявлять роль столкновений. При сделанных допущениях выражения для  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x)$  как в слабоионизованной, так и в полностью ионизованной плазме упрощаются, и если, кроме того, принять  $\omega v_e \gg k_z^2 v_{Te}^2$ , то уравнение эйконала запишется в виде

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = 1 + \frac{\omega_{Li}^2 k_{\perp}^2}{\Omega_i^2 k^2} \left( 1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \cdot \frac{\partial \ln N T_i}{\partial x} \right) +$$

$$+ i \frac{k_z^2 \omega_{Le}^2}{k^2 \omega v_e} \alpha \left( 1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \cdot \frac{\partial \ln N T_e^3}{\partial x} \right) = 0. \quad (44.25)$$

Здесь  $\nu_e = \nu_{en}$ ,  $\alpha = \beta = 1$  — для слабоионизованной плазмы и  $\nu_e = \nu_{эфф}$ ,  $\alpha = 1,96$ ,  $\beta = 1,71$  — для полностью ионизованной плазмы. При написании этого уравнения для простоты учтена лишь диссипация, обусловленная столкновениями электронов; столкновениями же ионов пренебрежено. Для колебаний с длиной волны, большей дебаевского радиуса частиц, это уравнение принимает наиболее простой вид:

$$\left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \cdot \frac{\partial \ln NT_i}{\partial x}\right) + i \frac{\omega_s}{\omega} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \cdot \frac{\partial \ln NT_e^{\beta}}{\partial x}\right) = 0. \quad (44.26)$$

Здесь введено обозначение

$$\omega_s = \alpha \frac{k_z^2}{k^2} \cdot \frac{M}{m} \cdot \frac{\Omega_i^2}{\nu_e}. \quad (44.27)$$

Уравнение (44.26) является квадратным относительно  $\omega$ , и не представляет особого труда проанализировать общее его решение. Однако ограничимся здесь записью решения в предельных случаях, в которых колебания неустойчивы. Так, в пределе  $\omega_{дрe} \ll \omega_s$  из уравнения (44.26) находим локальный спектр ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ )

$$\omega_1 = \frac{k_y v_{Te}^2}{\Omega_e} \cdot \frac{\partial \ln NT_e^{\beta}}{\partial x}, \quad (44.28)$$

$$\delta_1 = \frac{\omega_1^2}{\omega_s} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \cdot \frac{\partial \ln NT_i}{\partial \ln NT_e^{\beta}}\right).$$

В пределе  $\omega_{дрi} \gg \omega_s$  имеем

$$\omega_2 = i\omega_s \frac{T_e}{T_i} \cdot \frac{\partial \ln NT_e^{\beta}}{\partial \ln NT_i}. \quad (44.29)$$

Из этих формул видно, что рассматриваемые колебания по существу всегда неустойчивы, поскольку реально всегда

$$\frac{\partial \ln NT_e^{\beta}}{\partial \ln NT_i} > 0, \quad (44.30)$$

а поэтому  $\text{Im} \omega > 0$ . Интересно отметить, что эти неустойчивости существуют в области частот  $\omega \ll \nu_e$  и, более того, с ростом частоты столкновений электронов инкременты их нарастания увеличиваются. За раскачку колебаний при этом, как можно видеть из уравнений (44.25) и (44.26), ответственно столкновительное поглощение волн электронами плазмы, которое в неоднородной плазме меняет знак.

Найденные спектры (44.28) и (44.29) характеризуют новые ветви дрейфово-диссипативных колебаний, которые не существовали в бесстолкновительной плазме. Эти колебания в отличие от рассмотренных ранее дрейфово-диссипативных неустойчивостей иногда называют

гидродинамическими дрейфово-диссипативными неустойчивостями, подчеркивая тем самым, что их раскачка связана со столкновительной диссипацией.

К гидродинамическим дрейфово-диссипативным колебаниям относят также колебания в области частот  $\nu_i \ll \omega \ll \nu_e$ , но при условии  $\omega \nu_e \ll k_z^2 v_{Te}^2$ . Естественно при этом считать, что  $|\omega + i\nu_\alpha| \gg k_z v_{T\alpha}$ . Уравнение эйконала для таких колебаний записывается в виде

$$1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left[ 1 + \frac{k_y v_s^2}{\omega \Omega_i} \cdot \frac{\partial \ln N}{\partial x} - \frac{k_z^2 v_s^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \cdot \frac{\partial \ln NT_i}{\partial x} \right) \right] + i \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \alpha_1 \frac{\omega \nu_e}{k_z^2 v_{Te}^2} \left( 1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{T_e^{\beta_1}} \right) = 0. \quad (44.31)$$

Здесь  $\nu_e = \nu_{en}$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_1 = 0$  — для слабоионизованной плазмы и  $\nu_e = \nu_{эфф}$ ,  $\alpha_1 = 1,44$ ,  $\beta_1 = 0,56$  — для полностью ионизованной плазмы. Так же как и ранее, при выводе этого уравнения для простоты полностью пренебрежено столкновениями ионов и учтено неравенство  $\omega \gg \nu_i$ .

Уравнение (44.31) подобно уравнению (43.14) и отличается от него лишь малым диссипативным членом. В уравнении (43.14) диссипативный член связан с бесстолкновительным черенковским поглощением волн электронами плазмы, в то время как в уравнении (44.31) он обусловлен электронной диффузией и теплопроводностью, т. е. столкновениями электронов. Естественно, что локальные спектры частот колебаний, определяемые из уравнения (44.31), совпадают со спектрами частот бесстолкновительной плазмы [в условиях справедливости уравнения (43.14)], т. е. частоты  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , определяемые соответственно формулами (43.15), (43.17), остаются неизменными и в случае плазмы с частыми столкновениями. Меняются лишь выражения для инкрементов нарастания, которые вместо (43.15) и (43.17) имеют вид

$$\delta_1 = \alpha_1 \frac{\omega_1^2 \nu_e}{k_z^2 v_{Te}^2} \left( k^2 r_{De}^2 + \frac{k_\perp^2 v_s^2}{\Omega_i^2} - \frac{\partial \ln T_e^{\beta_1}}{\partial \ln N} \right), \quad (44.32)$$

$$\delta_2 = -\alpha_1 \frac{\omega_2^2 \nu_e}{k_z^2 v_{Te}^2} \left( 1 - \frac{\partial \ln T_e^{\beta_1}}{\partial \ln N} \right). \quad (44.33)$$

Отсюда видно, что колебания на первой дрейфовой ветви неустойчивы, если

$$\frac{\partial \ln T_e^{\beta_1}}{\partial \ln N} < \left( k^2 r_{De}^2 + \frac{k_\perp^2 v_s^2}{\Omega_i^2} \right); \quad (44.34)$$

на второй же ветви колебаний, которая возможна лишь в неизотерми-

ческой плазме с  $T_e \gg T_i$ , неустойчивость возникает при условии

$$\frac{\partial \ln T_e^{\beta_1}}{\partial \ln N} > 1. \quad (44.35)$$

На обеих ветвях дрейфовых колебаний раскачка обусловлена столкновениями электронов.

В заключение обсудим вопрос о роли столкновений ионов при развитии дрейфовых неустойчивостей. Прежде всего заметим, что во всем предыдущем рассмотрении считалось, что  $\omega \gg \nu_i$ , и поэтому столкновениями ионов полностью пренебрегалось. Их учет не представляет труда. При  $\omega \gg \nu_i$  учет столкновений ионов приводит к малым поправкам, причем их роль в развитии дрейфовых неустойчивостей оказывается как стабилизирующей, так и дестабилизирующей. Более интересным является выяснение вопроса о существовании дрейфовых колебаний в области частот  $\omega \ll \nu_i$ . Проанализируем его на примере слабоионизованной плазмы. Для невырожденной плазмы, считая, кроме того,  $\nu_i \ll \Omega_i$ , из выражения (44.9) получаем следующее уравнение эйконала:

$$1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left[ 1 - \frac{i\nu_{\alpha}}{\omega + i\nu_{\alpha}} A_0 \left( \frac{k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2} \right) J_+ \left( \frac{\omega + i\nu_{\alpha}}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right]^{-1} \times \\ \times \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{(\omega + i\nu_{\alpha}) \Omega_{\alpha}} \left( \frac{\partial \ln N_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial T_{\alpha}} \right) \right] A_0 J_+ \right\} = 0. \quad (44.36)$$

Как и ранее, проанализируем это уравнение в области длинных волн  $k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2 \ll \Omega_{\alpha}^2$  и низких частот  $\omega \ll \nu_i$ . Можно показать, что в пределе частых столкновений, когда длины свободного пробега частиц меньше продольных длин волн  $\nu_{\alpha} \gg k_z v_{T\alpha}$ , уравнение (44.36) имеет решения лишь в условиях, когда диффузия ионов слабая,  $\omega \nu_i \gg \gg k_z^2 v_{Ti}^2$ ; диффузия электронов при этом может быть как слабой, так и сильной. Если плазма достаточно плотная и  $\omega \nu_e \gg k_z^2 v_{Te}^2$ , то из (44.36) получаем

$$1 + \frac{\omega_{Le}^2 k_{\perp}^2}{\Omega_i^2 k^2} \left( 1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \cdot \frac{\partial \ln N T_i}{\partial x} \right) + i \frac{\omega_{Le}^2 k_z^2}{\omega \nu_e k^2} \times \\ \times \left( 1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \cdot \frac{\partial \ln N T_e}{\partial x} \right) = 0. \quad (44.37)$$

Это уравнение в точности совпадает с (44.25), поэтому спектры дрейфовых колебаний (44.28), (44.29) и условие их раскачки (44.30) остаются неизменными и в пределе частых столкновений, когда  $\omega \sim \sim \omega_{др} \ll \nu_i$ . Более того, уравнение (44.37) и дрейфовые неустойчивости, следующие из него по своей физической природе, сохраняются и в вырожденной плазме. Это видно из уравнения эйконала для дрейфовых колебаний в плазме с невырожденными ионами и вырожденными электронами в области частот  $\omega \ll \nu_i$ ,  $\omega \nu_i \gg k_z^2 v_{Ti}^2$ ,  $\omega \nu_e \gg$

$\gg k_z^2 v_{Fe}^2$ , в которой оно записывается в виде

$$1 + \frac{\omega_{Li}^2 k_{\perp}^2}{\Omega_i^2 k^2} \left( 1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \cdot \frac{\partial \ln NT_i}{\partial x} \right) + i \frac{\omega_{Le}^2 k_z^2}{\omega v_e k^2} \times \\ \times \left( 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{k_y v_{Fe}^2}{\omega \Omega_e} \cdot \frac{\partial \ln N}{\partial x} \right) = 0. \quad (44.38)$$

Это уравнение имеет такую же структуру, что и (44.25), и подобно (44.28) и (44.29), можно записать спектры дрейфовых колебаний вырожденной плазмы в рассматриваемой области частот ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ )

$$\omega_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{k_y v_{Fe}^2}{\Omega_e} \cdot \frac{\partial \ln N}{\partial x}, \quad (44.39)$$

$$\delta_1 = \frac{\omega_1^2}{\omega_s} \left( 1 + \frac{M}{m} \cdot \frac{v_{Ti}^2}{v_{Fe}^2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\partial \ln NT_i}{\partial \ln N} \right)$$

при  $\omega_1 \sim \omega_{дре} \ll \omega_s = \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} \cdot \frac{M}{m} \cdot \frac{\Omega_i^2}{v_e}$  и

$$\omega_2 = \frac{2}{3} i \omega_s \frac{m}{M} \frac{v_{Fe}^2}{v_{Ti}^2} \cdot \frac{\partial \ln N}{\partial \ln NT_i} \quad (44.40)$$

при  $\omega_2 \sim \omega_s \ll \omega_{дра}$ .

Из этих формул видно, что вырожденная плазма, так же как и невырожденная, по существу всегда неустойчива, так как условие неустойчивости [ср. с (44.30)]

$$\frac{\partial \ln N}{\partial \ln NT_i} > 0 \quad (44.41)$$

выполняется в любой реальной плазме.

Из приведенного анализа влияния столкновений частиц на спектры дрейфовых колебаний пространственно неоднородной плазмы следует, что в условиях частых столкновений, когда длины свободного пробега частиц намного меньше продольных размеров плазмы ( $v_{\alpha} \gg k_z v_{T\alpha} \sim v_{T\alpha}/L_{\parallel}$ ), а дрейфовые частоты меньше частот столкновений ( $v_{\alpha} \gg \omega_{дра} \sim \omega$ ), длинноволновые дрейфовые неустойчивые колебания могут развиваться в плазме, если  $\omega_{дри} v_i \gg k_z^2 v_{Ti}^2 \sim v_{Ti}^2/L_{\parallel}^2$  или [ср. с (43.20)]

$$L_{\perp}/L_{\parallel} > \sqrt{\Omega_i/v_i} > 1. \quad (44.42)$$

В противном случае неоднородности плотности частиц в возмущениях вследствие диффузии будут выравниваться быстрее, чем успеет заметно развиваться дрейфовая неустойчивость.

## § 45. Конвективные неустойчивости неоднородной плазмы

До сих пор изучались колебательные свойства пространственно неоднородной плазмы с максвелловской функцией распределения частиц по скоростям во внешнем однородном магнитном поле  $B_0 = B_{0z}$ , силовые линии которого считались прямолинейными и направленными вдоль оси  $oz$ , перпендикулярной к направлению неоднородности плазмы (оси  $ox$ ). При этом было показано, что такая плазма неустойчива, в ней возбуждаются дрейфовые колебания, частоты и инкременты нарастания которых меньше частоты, связанной с ларморовским дрейфом частиц. Причиной неустойчивости в данном случае является пространственная неоднородность плазмы, которая хотя и находится в силовом равновесии с магнитным полем (газокинетическое давление уравнивается магнитным), но остается в термодинамически неравновесном состоянии из-за ларморовского дрейфа частиц. Здесь покажем, что при наличии в плазме наряду с пространственной неоднородностью неравновесности другой природы, например гравитационного дрейфа, обусловленного криволинейностью силовых линий магнитного поля, либо тока, создаваемого продольным электрическим полем, в ней возникают значительно более быстро нарастающие неустойчивости. Уже при очень малых неравновесностях такого типа инкременты нарастания неустойчивостей оказываются существенно больше самих дрейфовых частот.

Исследование устойчивости подобной плазмы начнем со случая, когда силовые линии магнитного поля обладают сильной кривизной, т. е. наряду с продольным полем  $B_{0z}$  существует малая неоднородная компонента магнитного поля  $B_{0x}$ , параллельная направлению неоднородности плазмы. Подобная картина характерна для многих экспериментальных термоядерных установок. Например, в системах с магнитными зеркалами, или пробкотронах, магнитное поле имеет вид, изображенный на рис. 34. В бесстолкновительной плазме низкого давления заряженные частицы как бы наклеены на силовые линии

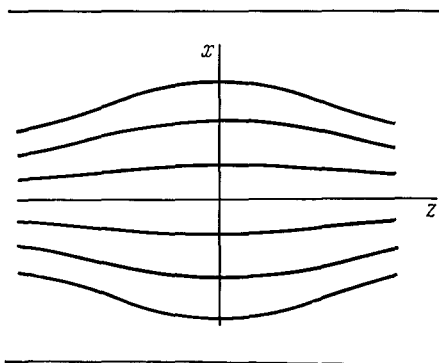


Рис. 34

магнитного поля, т. е. могут свободно перемещаться только в направлении силовых линий и вращаться вокруг них. При этом на частицу сорта  $\alpha$  действует средняя поперечная сила (см. задачу 8 к гл. III)

$$F_{\alpha} = \mathbf{n} \frac{m_{\alpha}}{R} \left( v_{\parallel \alpha}^2 + \frac{v_{\perp \alpha}^2}{2} \right), \quad (45.1)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный от центра кривизны к частице;  $R$  — радиус кривизны силовых линий магнитного поля.



Учитывая, что частицы плазмы в основном движутся с тепловыми скоростями, в дальнейшем заменим  $m_\alpha v_{\parallel\alpha}^2$  и  $m_\alpha v_{\perp\alpha}^2/2$  на  $T_\alpha$  и поперечную силу (45.1) приближенно представим в виде

$$F_\alpha \approx \frac{m_\alpha v_{T\alpha}^2}{R} = \frac{T_\alpha}{R}. \quad (45.2)$$

Более того, для простоты эту силу будем считать постоянной, не зависящей от координаты  $x$ . Строго говоря, при этом температура частиц плазмы предполагается не зависящей от  $x$ .

Итак, искривленность силовых линий магнитного поля можно учесть введением эффективного поля тяжести  $g_\alpha = v_{T\alpha}^2/R$ , разного для разного сорта частиц и направленного в сторону внешней нормали к силовым линиям магнитного поля. Рассмотрим поведение плазмы в таком поле, заметив предварительно, что в случае, когда магнитное поле имеет вид, изображенный на рис. 34, а плотность плазмы убывает к периферии, сила тяжести  $m_\alpha g_\alpha$  направлена независимо от знака заряда частицы противоположно градиенту плотности плазмы. На рис. 35 изображен слой неоднородной плазмы в искривленном магнитном поле, причем  $n \rightarrow N$ .

Равновесная функция распределения частиц в неоднородной плазме при наличии поля тяжести  $g_\alpha$ , параллельного оси  $ox$ , является решением уравнения

$$v_x \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial x} + g_\alpha \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_x} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha c} [\mathbf{vB}_0] \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v} = 0. \quad (45.3)$$

Ограничимся далее случаем, когда поля  $\mathbf{B}_0$  и  $g_\alpha$  однородны (это условие практически всегда выполнено, поскольку обычно  $\beta \ll 1$ ). При этом легко записать решение уравнения (45.3):

$$f_{0\alpha}(\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha) = \left[ 1 - \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha)_y}{\Omega_\alpha} \left( \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial N_\alpha} + \frac{\partial T_\alpha}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial T_\alpha} \right) \right] \times \\ \times \frac{N_\alpha}{(2\pi m_\alpha T_\alpha)^{3/2}} \exp \left( - \frac{m_\alpha (\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha)^2}{2T_\alpha} \right), \quad (45.4)$$

где

$$\mathbf{u}_\alpha = \frac{[\mathbf{g}_\alpha \mathbf{h}]}{\Omega_\alpha} = \left( 0, - \frac{g_\alpha}{\Omega_\alpha}, 0 \right) \quad (45.5)$$

— скорость гравитационного дрейфа, возникающего в скрещенных полях  $\mathbf{B}_0$  и  $g_\alpha$ ,  $\mathbf{h}$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{B}_0$ .

Этот дрейф является реальным дрейфом частиц в отличие от рассмотренного в § 41 ларморовского дрейфа. Именно поэтому он и входит

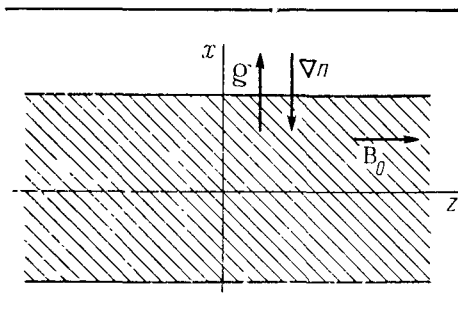


Рис. 35

в функцию распределения (45.4) в виде реальной скорости движения частиц  $u_a$ .

Итак, в равновесном состоянии заряженные частицы плазмы совершают направленное движение. В этих условиях (см. гл. VI, VII) в плазме могут развиваться неустойчивости типа пучковых или токовых. Перейдем к анализу подобных неустойчивостей, сделав предварительно одно замечание. Как видно из рис. 35, аналогичная картина может возникнуть и в обычной сжимаемой жидкости, находящейся в поле тяжести (см. задачу 6 к гл. VIII). В некоторых случаях такое состояние жидкости оказывается неустойчивым, причем развитие неустойчивости связано с конвекцией. В связи с этим неустойчивости, которые будут рассмотрены далее, носят общее название **к о н в е к т и в н ы х**.

Теперь для исследования спектров колебаний необходимо вычислить диэлектрическую проницаемость. Это можно сделать сразу. Действительно, из вида функции распределения  $f_{0a}$  (45.4) следует, что вычисления удобно проводить в системе координат, движущейся вместе с частицами данного сорта со скоростью их гравитационного дрейфа. В этой системе координат все вычисления будут аналогичны проведенным в § 41. В результате в приближении геометрической оптики для продольной диэлектрической проницаемости получим выражение вида (41.24):

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = 1 + \sum_a \frac{\omega_{La}^2}{k^2 v_{Tza}^2} \left[ 1 - \sum_n \frac{\omega'}{\omega' - n\Omega_a} \left( 1 - \frac{k_y v_{Tza}^2}{\omega' \Omega_a} \cdot \frac{\partial^0}{\partial x} \right) \times \right. \\ \left. \times A_n \left( \frac{k_{\perp}^2 v_{Tza}^2}{\Omega_a^2} \right) J_+ \left( \frac{\omega' - n\Omega_a}{|k_z| v_{Tza}} \right) \right], \quad (45.6)$$

в котором только произведена замена  $\omega \rightarrow \omega' = \omega - \mathbf{k}u_a = \omega + k_y \frac{g_a}{\Omega_a}$ , где  $\omega'$  — частота с учетом доплеровского сдвига из-за гравитационного дрейфа.

Для сокращения записи введено обозначение

$$\frac{\partial^0}{\partial x} = \frac{\partial N_a}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial N_a} + \frac{\partial T_a}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial T_a}. \quad (45.7)$$

Естественно, что при  $g_a = 0$  выражение (45.6) в точности совпадает с (41.24).

Не будем подробно анализировать спектры колебаний неоднородной плазмы в поле тяжести, поскольку, как нетрудно догадаться, их многообразие еще больше, чем спектров дрейфовых колебаний. Рассмотрим лишь некоторые новые качественные эффекты, связанные с наличием поля тяжести  $g_a$ .

Исследуем область низких частот  $\omega' \ll \Omega_a$ . При этом в выражении (45.6) можно ограничиться членами с  $n = 0$ . Предположим далее, что волны длинные ( $k_{\perp}^2 v_{Tza}^2 \ll \Omega_a^2$ ), их фазовые скорости велики ( $\omega' \gg$

»  $k_z v_{Ta}$ ), а интересующие частоты намного больше дрейфовых:

$$\omega' \gg \omega_{дра} \sim \frac{k_y v_{Ta}^2}{\Omega_a L_0}, \quad (45.8)$$

где  $L_0$  — характерный размер неоднородности плотности плазмы.

При указанных условиях из (45.6) получаем следующее уравнение эйконала:

$$\varepsilon(\omega, k, x) = 1 - \frac{1}{k^2} \sum_a \left( k_z^2 \frac{\omega_{La}^2}{\omega'^2} - k_\perp^2 \frac{\omega_{La}^2}{\Omega_a^2} - \frac{k_y}{\omega'} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\omega_{La}^2}{\Omega_a} \right) = 0. \quad (45.9)$$

В это уравнение не входят тепловые скорости частиц, поэтому его можно получить в модели независимых частиц или, что то же самое, исходя из уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики холодной плазмы.

Если температуры электронов и ионов в плазме незначительно отличаются друг от друга, то из (45.5) следует, что скорости гравитационного дрейфа для электронов и ионов одного порядка. Это позволяет упростить уравнение (45.9) и привести его к виду

$$1 - \frac{k_z^2 \omega_{Le}^2}{k^2 \omega'^2} + \frac{k_\perp^2 \omega_{Li}^2}{k^2 \Omega_i^2} + \frac{k_y k (u_e - u_i)}{k^2 (\omega - k u_e) (\omega - k u_i)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i} = 0. \quad (45.10)$$

Наконец, заметим, что обычно в плазме выполняется условие  $R \gg L_0$ , поэтому из (45.5) и (45.8) следует, что  $\omega \gg k u_a$ . Учитывая это, из (45.10) получаем

$$1 - \frac{k_z^2}{k^2} \cdot \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} + \frac{k_\perp^2 \omega_{Li}^2}{k^2 \Omega_i^2} - \frac{k_y^2}{k^2} \cdot \frac{g_{\Phi\Phi} \omega_{Li}^2}{\omega^2 \Omega_i} \cdot \frac{\partial \ln N}{\partial x} = 0, \quad (45.11)$$

где введено обозначение

$$g_{\Phi\Phi} = \frac{v_{Ti}^2 + v_s^2}{R} \quad (45.12)$$

Решение этого уравнения приводит с точностью до членов порядка  $m/M$  к локальному спектру колебаний плазмы

$$\omega^2 = \frac{k_y^2 g_{\Phi\Phi} \frac{\partial \ln N}{\partial x} + k_z^2 \frac{v_A^2}{c^2} \omega_{Le}^2}{k^2 (1 + v_A^2/c^2)}. \quad (45.13)$$

Первое слагаемое в числителе этого выражения всегда отрицательное (так как  $\partial \ln N / \partial x < 0$ ), а второе — положительно. Однако для мод с  $k_z = 0$  второе слагаемое обращается в нуль, и в результате имеем

спектр

$$\omega^2 = \frac{k_y^2}{k^2} \cdot \frac{g_{\Phi\Phi} \frac{\partial \ln N}{\partial x}}{1 + v_A^2/c^2} < 0, \quad (45.14)$$

соответствующий гидродинамической неустойчивости плазмы. Это известная в физике плазмы желобковая неустойчивость. Действительно, при  $k_z = 0$  возмущения однородны вдоль силовых линий магнитного поля и имеют вид желобка. Часто ее называют так же перестановочной, поскольку при развитии этой неустойчивости происходит перемещение плазмы поперек магнитного поля по всей длине силовой линии, как бы перестановка местами плазмы и магнитного поля.

Необходимо отметить, что время развития желобковой неустойчивости в установках для термоядерного синтеза весьма мало и составляет  $(\Gamma\omega)^{-1} \approx \sqrt{L_0/g_{\Phi\Phi}} \sim 10^{-5} \div 10^{-6}$  с. Однако такая неустойчивость может развиваться лишь при достаточно больших продольных размерах плазмы:

$$\frac{L_{\parallel}}{L_{\perp}} > \sqrt{\frac{M}{m}} \sqrt{\frac{L_0 R}{\rho_{Ai}^2}}. \quad (45.15)$$

Заметим, что с помощью выражения для диэлектрической проницаемости (45.6) можно описывать свойства неоднородной плазмы не только при наличии поля тяжести и связанного с ним гравитационного дрейфа частиц, но и во всех других случаях, когда имеется реальный дрейф частиц. Оно дает возможность правильно описывать поведение плазмы, в которой имеются пучки заряженных частиц, в частности плазму с током.

Рассмотрим неоднородную плазму с током ( $\mathbf{u}_e = \mathbf{u} \parallel \mathbf{oz}$ ,  $\mathbf{u}_i = 0$ ) во внешнем сильном продольном магнитном поле. Полем тяжести, связанным с кривизной силовых линий магнитного поля, для простоты пренебрежем. Ограничимся низкочастотными колебаниями в холодной плазме (гидродинамический предел), считая

$$\frac{k_{\perp}^2 v_{Te}^2}{\Omega_e^2} \ll 1; \quad \Omega_e \gg \omega' \gg k_z v_{Te}, \quad \omega_{dpe}; \quad \omega, k_z v_{Ti} \ll \Omega_i, \quad (45.16)$$

где  $\omega' = \omega - \mathbf{k}\mathbf{u}$ , а  $\mathbf{u}$  — скорость токового дрейфа электронов.

При этих условиях из (45.6) нетрудно получить следующее уравнение эйконала:

$$k_{\perp}^2 \left( 1 + \frac{c^2}{v_A^2} \right) - \frac{k_y \omega_{Li}^2}{\omega \Omega_i} \cdot \frac{\mathbf{k}\mathbf{u}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \ln N}{\partial x} + \\ + k_z^2 \left[ 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2} \right] = 0, \quad (45.17)$$

схожее с (45.10). Поэтому в пределе  $\omega \gg \mathbf{k}\mathbf{u}$  получаем из него локальный спектр, схожий с (45.13):

$$\omega^2 = \frac{-k_y \mathbf{k} u \Omega_i \frac{\partial \ln N}{\partial x} + k_z^2 \omega_{Le}^2 \frac{v_A^2}{c^2}}{(1 + v_A^2/c^2) k^2}. \quad (45.18)$$

Здесь также в числителе первое слагаемое может быть отрицательным и приводить к неустойчивости, второе же слагаемое всегда положительно и играет стабилизирующую роль. Легко показать, что неустойчивость возможна при выполнении неравенства

$$\frac{u}{\Omega_e L_0} > \left| \frac{k_z}{k_y} \right| \sim \frac{L_\perp}{L_\parallel}, \quad (45.19)$$

т. е. при достаточно больших скоростях дрейфа электронов, либо при больших продольных размерах плазмы.

Из неравенства (45.19) видно, что условия развития неустойчивости облегчаются с уменьшением магнитного поля. Это действительно так, но только до некоторого предела. Из условия  $\omega^2 \ll \Omega_i^2$  следует, что эта неустойчивость может возникнуть лишь при полях, превышающих некоторое критическое поле, величина которого определяется неравенством

$$\frac{L_\perp}{L_\parallel} \sim \left| \frac{k_z}{k_y} \right| < \frac{\Omega_i L_0}{u}. \quad (45.20)$$

Чем больше  $L_\parallel$ , тем меньше критическое поле. Из неравенств (45.19) и (45.20) следует, что для развития неустойчивости продольный размер плазмы должен быть достаточно большим:  $L_\parallel/L_\perp > \sqrt{M/m}$ . Однако время развития неустойчивости составляет  $\text{Im } \omega \sim \sqrt{\Omega_i u/L_\parallel}$ , и чем короче система, тем оно меньше.

Рассмотренная неустойчивость получила в литературе название токово-конвективной.

Рассмотрим кратко вопрос о влиянии столкновений частиц на конвективные неустойчивости плазмы. Для этого прежде всего запишем выражение для тензора диэлектрической проницаемости столкновительной плазмы при наличии гравитационного или токового дрейфа частиц. Ограничимся для простоты случаем невырожденной слабоионизованной плазмы. Тогда искомое выражение для  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x)$  получается из формулы (44.9), в которой, однако, следует произвести замену  $\omega \rightarrow \omega' = \omega - k_y u_{y\alpha}$ , где  $u_\alpha$  — скорость гравитационного дрейфа частиц сорта  $\alpha$ , либо  $\omega \rightarrow \omega' = \omega - k_z u_\alpha$ , где  $u_\alpha$  — токовая скорость. В итоге получаем уравнение эйконала

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = 1 + \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left[ 1 - \sum_n \frac{i\nu_{\alpha n}}{\omega' - n\Omega_\alpha + i\nu_{\alpha n}} \right] \times \\ \times A_n \left( \frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} \right) J_+ \left( \frac{\omega' + i\nu_{\alpha n} - n\Omega_\alpha}{|k_z| v_{T\alpha}} \right) \Big]^{-1} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \sum_n \frac{\omega' + i\nu_{an}}{\omega' + i\nu_{an} - n\Omega_a} \left[ 1 - \frac{k_y v_{Ta}^2}{(\omega' + i\nu_{an}) \Omega_a} \left( \frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{\partial T_a}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial T_a} \right) \right] A_n \left( \frac{k_{\perp}^2 v_{Ta}^2}{\Omega_a^2} \right) J_+ \left( \frac{\omega' + i\nu_{an} - n\Omega_a}{|k_z| v_{Ta}} \right) \right\} = 0. \quad (45.21)$$

Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим наиболее близкий к гидродинамическому случай, когда выполнены неравенства  $\omega \gg \omega_{дра}$ ,  $|\omega' + i\nu_a| \gg k_z v_{Ta}$ ,  $(k_{\perp} v_{Ta})/\Omega_a \ll 1$  и  $\nu_e \gg \omega' \gg ku$ ,  $\nu_i$ . При этом уравнение (45.21) после несложных, но громоздких вычислений можно привести к виду

$$\left( 1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right) k_{\perp}^2 \frac{\omega^2}{4\pi\sigma} + i\omega \frac{k_z^2 v_A^2}{c^2} + \frac{ku k_y \Omega_i}{4\pi\sigma} \cdot \frac{\partial \ln N}{\partial x} = 0, \quad (45.22)$$

где  $\sigma = \frac{\omega_{Le}^2}{4\pi\nu_e}$  — низкочастотная (статическая) проводимость плазмы.

Из (45.22) следует, что для желобковых мод, т. е. при малых значениях  $k_z$ , когда  $k_{\perp}^2/k_{\perp}^2 \ll \omega/\sigma$ , вторым слагаемым в этом уравнении можно пренебречь. В результате получаем локальный спектр, не зависящий от проводимости плазмы:

$$\omega^2 = -\frac{ku}{k_{\perp}^2} \cdot \frac{k_y \Omega_i}{1 + v_A^2/c^2} \cdot \frac{\partial \ln N}{\partial x} \approx \begin{cases} g_{\Phi\Phi} \frac{\partial \ln N}{\partial x}, \\ -\frac{k_y k_z u}{k_{\perp}^2} \Omega_i \frac{\partial \ln N}{\partial x}. \end{cases} \quad (45.23)$$

Верхний из этих спектров соответствует неустойчивым желобковым колебаниям плазмы в поле тяжести, когда  $u_i = -\frac{g_{\Phi\Phi}}{\Omega_i} \delta_{yi}$ , а нижний — токово-конвективным колебаниям, когда  $u_i = u \delta_{zi}$ . Легко видеть, что спектр (45.23) очень похож на спектры желобковой и токово-конвективной неустойчивостей бесстолкновительной плазмы (45.14) и (45.18). Его можно считать продолжением этих спектров в область частот  $\omega < \nu_e$ .

Уравнение (45.22) имеет неустойчивые решения не только в случае сильно вытянутых вдоль магнитного поля возмущений желобкового типа, но также в пределе коротковолновых возмущений, когда  $k_z^2/k_{\perp}^2 \gg \omega/\sigma$ . При этом из (45.22) находим следующий локальный спектр:

$$\omega = \frac{i\Omega_i}{4\pi\sigma} \cdot \frac{c^2}{v_A^2} \cdot \frac{ku k_y}{k_z^2} \cdot \frac{\partial \ln N}{\partial x} = \begin{cases} -i \frac{c^2}{v_A^2} \cdot \frac{1}{4\pi\sigma} \cdot \frac{k_y^2}{k_z^2} g_{\Phi\Phi} \frac{\partial \ln N}{\partial x}, \\ i \frac{c^2}{v_A^2} \cdot \frac{\Omega_i}{4\pi\sigma} \cdot \frac{k_y}{k_z} u \frac{\partial \ln N}{x}. \end{cases} \quad (45.24)$$

Здесь также верхний из спектров соответствует неустойчивым колебаниям плазмы в эффективном поле тяжести, а нижний — коротковолновой ветви токово-конвективной неустойчивости в столкновительной плазме. Эту неустойчивость в литературе называют также в и н т о в о й неустойчивостью замагниченной плазмы с током.

### Задачи к главе VIII

**Задача 1.** В приближении геометрической оптики получить квазиклассические правила квантования для дифференциальных уравнений четвертого порядка при наличии точек ветвления.

**Решение.** В общем виде уравнение четвертого порядка, возникающее при изучении малых колебаний слабонеоднородной плазмы без учета диссипативных эффектов в первом приближении геометрической оптики, можно записать в виде

$$y^{IV} + 2p(\omega, x)y'' + 2\varepsilon(\omega, x)y' + q(\omega, x)y = 0. \quad (1)$$

Здесь  $p(\omega, x)$  и  $q(\omega, x)$  — медленно меняющиеся действительные функции  $x$ , так что

$$\eta \sim \frac{p'}{p^{3/2}} \sim \frac{q'}{q^{5/4}} \ll 1, \quad (2)$$

а действительная функция  $\varepsilon(\omega, x)$  сама имеет первый порядок малости по  $\eta$ .

Решения уравнения (1) запишем в виде

$$y = C \exp \left( i \int^x k(\omega, x) dx \right). \quad (3)$$

Тогда в нулевом приближении геометрической оптики (т. е. по  $\eta$ ) для  $k(\omega, x)$  получаем

$$k_{1,2}^2(x) = p \pm \sqrt{p^2 - q}. \quad (4)$$

В первом приближении по  $\eta$  находим поправку

$$\delta k_{1,2} = \frac{i}{2} \left\{ \left[ \ln k_{1,2}^2(p^2 - q) \right]' + \frac{p' - \varepsilon}{k_{1,2}^2 - p} \right\}. \quad (5)$$

Видно, что приближение геометрической оптики нарушается (поправка  $\delta k$  неограниченно растет) вблизи точек

$$k_{1,2}(\omega, x) = 0 \quad \text{и} \quad p^2(\omega, x) = q(\omega, x). \quad (6)$$

Первая из этих точек называется точкой поворота, а вторая — точкой ветвления. Поведение решений вблизи точек поворота было изучено в § 39. Здесь рассмотрим поведение решений вблизи точек ветвления. В этих точках  $k_{1,2}^2$  совпадают и происходит трансформация различных собственных решений друг в друга, что приводит к зацеплению  $k_1$  и  $k_2$  в правилах квантования уже в нулевом приближении геометрической оптики.

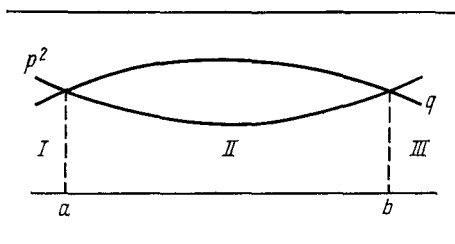


Рис. 36

Действительно, рассмотрим случай, когда имеются только две точки ветвления  $a$  и  $b$  и между ними нет других особых точек (рис. 3б), причем  $p(x) > 0$ . При этом в области  $II$  (область прозрачности) вдали от точек ветвления общее решение уравнения (1) с точностью до членов первого порядка малости по  $\eta$  запишется в виде

$$\begin{aligned}
 y^{II} = & \frac{C_1}{\sqrt[4]{k_1^2(p^2 - q)}} \exp \left( i \int^x k_1 dx - \frac{1}{2} \int^x \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{p^2 - q}} dx \right) + \\
 & + \frac{C_2}{\sqrt[4]{k_1^2(p^2 - q)}} \exp \left( -i \int^x k_1 dx - \frac{1}{2} \int^x \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{p^2 - q}} dx \right) + \\
 & + \frac{C_3}{\sqrt[4]{k_2^2(p^2 - q)}} \exp \left( i \int^x k_2 dx + \frac{1}{2} \int^x \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{p^2 - q}} dx \right) + \\
 & + \frac{C_4}{\sqrt[4]{k_2^2(p^2 - q)}} \exp \left( -i \int^x k_2 dx + \frac{1}{2} \int^x \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{p^2 - q}} dx \right). \quad (7)
 \end{aligned}$$

В областях  $I$  и  $III$  (области непрозрачности) в соответствии с финитностью решений при  $x \rightarrow \pm\infty$  должны быть отброшены нарастающие решения. При этом имеем

$$\begin{aligned}
 y^I = & \frac{C'_1}{\sqrt[4]{\bar{k}_1^2(q - p^2)}} \exp \left( i \int_a^x \bar{k}_1 dx + \frac{i}{2} \int_a^x \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{q - p^2}} dx \right) + \\
 & + \frac{C'_4}{\sqrt[4]{\bar{k}_2^2(q - p^2)}} \exp \left( -i \int_a^x \bar{k}_2 dx - \frac{i}{2} \int_a^x \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{q - p^2}} dx \right), \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y^{III} = & \frac{C'_2}{\sqrt[4]{\bar{k}_1^2(q - p^2)}} \exp \left( i \int_x^b \bar{k}_1 dx + \frac{i}{2} \int_x^b \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{q - p^2}} dx \right) + \\
 & + \frac{C'_3}{\sqrt[4]{\bar{k}_2^2(q - p^2)}} \exp \left( -i \int_x^b \bar{k}_2 dx - \frac{i}{2} \int_x^b \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{q - p^2}} dx \right), \quad (9)
 \end{aligned}$$

где

$$\bar{k}_{1,2}^2 = p \pm i \sqrt{q - p^2}.$$

Сшивая эти решения путем обхода вокруг точек  $a$  и  $b$  в комплексной плоскости  $x$ , найдем связь между коэффициентами  $C_i$  и  $C'_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). При этом каждое из двух линейно независимых решений в областях непрозрачности разлагается по двум независимым решениям в области прозрачности. Из требования однозначности решения в области прозрачности получаем искомые правила квантования, определяющие спектр собственных значений  $\omega$ :

$$\int_a^b (k_1 - k_2) dx \pm i \int_a^b \frac{p' - \varepsilon}{\sqrt{p^2 - q}} = 2\pi \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (10)$$

где  $n$  — целые числа.



Наличие мнимых слагаемых в правилах квантования соответствует возможности перекачки энергии из одной ветви колебаний во вторую в точках ветвления, где  $k_1^2$  и  $k_2^2$  совпадают.

Если в области изменения  $x$  имеется лишь одна точка ветвления  $a$ , на второй границе области прозрачности  $b$  заданы недиссипативные граничные условия  $y(b) = y'(b) = 0$ , то правило квантования запишется в виде

$$\int_a^b (k_2 - k_1) dx = \pi n. \quad (11)$$

Здесь опущены малые действительные слагаемые порядка  $\eta$  как несущественные.

**Задача 2.** С помощью дисперсионного уравнения (42.18) найти спектр частот спиральных волн при  $N = N_0 \sqrt{1 - x^2/x_0^2}$  и сравнить его с локальным спектром.

**Решение.** Локальный спектр спиральных волн записывается в виде [ср. с (24.17)]

$$\omega = \frac{k^2 c^2 \Omega_e}{\omega_{Le}^2} \cdot \frac{|k_z|}{k}, \quad (1)$$

где  $k^2 = k_y^2 + k_z^2 + k_x^2$ , а  $\omega_{Le}$  — некоторая усредненная ленгмюровская частота электронов.

Из соотношения же (42.18) получаем

$$\int_0^{x_1} \sqrt{1 - \frac{(k_y^2 + k_z^2) c^4 k_z^2 \Omega_e^2}{\omega_{L0}^4 \omega^2} - \frac{x^2}{x_0^2}} dx = \frac{\pi n c^2 |k_z| \Omega_e}{2 \omega \omega_{L0}^2}, \quad (2)$$

где  $\omega_{L0}$  — ленгмюровская частота электронов в точке  $x = 0$ , а  $x_1 < x_0$  — точка поворота:

$$\frac{x_1^2}{x_0^2} = 1 - \frac{(k_y^2 + k_z^2) c^4 k_z^2 \Omega_e^2}{\omega_{L0}^4 \omega^2}. \quad (3)$$

Интегрирование (2) дает

$$1 - \frac{(k_y^2 + k_z^2) c^4 k_z^2 \Omega_e^2}{\omega^2 \omega_{L0}^4} = \frac{2n}{x_0} \cdot \frac{c^2 |k_z| \Omega_e}{\omega \omega_{L0}^2}. \quad (4)$$

Отсюда находим спектр частот колебаний ( $\omega > 0$ )

$$\omega = \frac{c^2 |k_z| \Omega_e}{\omega_{L0}^2} \left( \frac{n}{x_0} + \sqrt{k_y^2 + k_z^2 + \frac{n^2}{x_0^2}} \right). \quad (5)$$

Сравнение (1) и (5) показывает, что локальный спектр близок к точному при  $k_y^2 + k_z^2 \gg n^2/x_0^2 \approx k_x^2$ .

**Задача 3.** Исходя из уравнения (43.8) исследовать низкочастотные коротковолновые дрейфовые колебания бесстолкновительной неоднородной плазмы.

**Решение.** Коротковолновыми называются колебания с длиной волны меньше ларморовского радиуса ионов, т. е.  $k_{\perp} \rho_{Li} \gg 1$ . Будем при этом считать, что  $k_{\perp} \rho_{Le} \ll 1$  и  $v_{Ti} \ll \omega/k_z \ll v_{Te}$ . В однородной плазме в этих

условиях колебания невозможны. В неоднородной же плазме из (43.8) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon = & 1 + \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \left( 1 + \frac{k_y v_{Ti}}{\sqrt{2\pi} k_{\perp} \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_i}} \right) + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \times \\ & \times \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{k_y v_s^2}{|k_z| v_{Te} \Omega_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Учитывая малость мнимого слагаемого, обусловленного черенковской диссипацией на электронах, находим спектр ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ )

$$\begin{aligned} \omega = & - \frac{T_e k_y v_{Ti}}{T_e + T_i (1 + k^2 r_{De}^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} k_{\perp}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}}, \\ \delta = & \frac{T_e^2}{T_e + T_i (1 + k^2 r_{De}^2)^2} \cdot \frac{k_y^2 v_{Ti}^3}{2 |k_z| \kappa_{\perp} v_{Te} \Omega_i} \left( \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_i}} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, частота коротковолновых дрейфовых колебаний меньше дрейфовой частоты:  $\omega \sim \omega_{др} \frac{\Delta_{\perp}}{\rho_{\Lambda i}} \ll \omega_{др}$ , а инкремент нарастания положителен и соответствует нарастающим колебаниям при условии

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \ln N / \sqrt{T_e}}{\partial \ln N / \sqrt{T_i}} > 0, \quad (3)$$

которое выполняется практически всегда. Поэтому коротковолновая дрейфовая неустойчивость носит универсальный характер; к тому же она развивается также в коротких системах, продольные размеры которых превышают лишь ларморовский радиус ионов.

**Задача 4.** Показать, что коротковолновые дрейфовые колебания простираются вплоть до ионных циклотронных частот; исследовать спектр их частот и условия раскачки для бесстолкнувительной неоднородной плазмы.

**Решение.** Дрейфовые колебания в области ионных циклотронных частот, т. е.  $\omega \approx \omega_{др} \approx n\Omega_i$ , всегда коротковолновые,  $k_{\perp} \rho_{\Lambda i} \gg 1$ . Считая при этом  $k_{\perp} \rho_{\Lambda e} \ll 1$  и  $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$ , из общего уравнения (43.6) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon = & 1 + \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} k_{\perp} \rho_{\Lambda i}} \cdot \frac{\omega}{\omega - n\Omega_i} \left( 1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_i}} \right) \right] + \\ & + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{k_y v_s^2}{\Omega_i} \cdot \frac{1}{|k_z| v_{Te}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Отсюда находим следующий спектр дрейфовых ионно-циклотронных колебаний:

$$\omega = n\Omega_i + \Delta,$$

$$\text{Re } \Delta = \frac{T_e}{T_e + T_i (1 + k^2 r_{De}^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} k_{\perp} \rho_{\Lambda i}} \left( n\Omega_i - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_i}} \right), \quad (2)$$

$$\operatorname{Im} \Delta = \delta = - \frac{T_i}{T_e} \cdot \frac{\pi k_{\perp} \rho_A}{n \Delta_i - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_i}}} \times \\ \times \frac{\operatorname{Re} \Delta^2}{|k_z| v_{Te}} \left( n \Omega_i + \frac{k_y v_s^2}{\Omega_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}} \right).$$

Видно, что при  $\omega \approx n \Omega_i \gg \omega_{др}$  колебания устойчивы, в то время как при  $\omega_{др} \gg n \Omega_i$  колебания всегда неустойчивы; в этом смысле неустойчивость носит универсальный характер.

**Задача 5.** Показать, что дрейфовые неустойчивости неоднородной плазмы можно стабилизировать перекрещенностью силовых линий магнитного поля (shear-м), обусловленной сильно неоднородной поперечной компонентой магнитного поля  $B_{0y}(x) \ll B_{0z}$ .

**Решение.** При наличии полей  $B_{0y}$  и  $B_{0z}$  следует ввести общее поле  $\mathbf{B}_0$ , причем

$$k_{\parallel}(x) = k_z \frac{B_{0z}}{B_0} + k_y \frac{B_{0y}}{B_0} \approx k_z + k_y \frac{B_{0y}}{B_0} = k_z + k_y \theta(x). \quad (1)$$

В нулевом приближении геометрической оптики тензор диэлектрической проницаемости неоднородной плазмы при наличии shear-а, очевидно, имеет такой вид, как и в его отсутствие, если вместо  $k_z$  подставить  $k_{\parallel}(x)$ . Учитывая сильную неоднородность  $\theta(x)$ , можно заметить, что  $k_{\parallel \min} \approx k_y \theta(x)$ . Отсюда сразу находим условие стабилизации дрейфовых колебаний shear-м.

В бесстолкновительной плазме дрейфовая неустойчивость возможна, если

$$\omega \approx \omega_{др} \approx \frac{k_y}{\Omega_i} \cdot \frac{T_e + T_i}{M} \cdot \frac{1}{L_0} > k_{\parallel} v_{Ti} \geq k_y \theta v_{Ti}. \quad (2)$$

При нарушении этих условий неустойчивость стабилизируется. Поэтому условие стабилизации дрейфовой неустойчивости бесстолкновительной плазмы shear-м запишется в виде

$$\theta > \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \frac{\rho_{Li}}{L_0}. \quad (3)$$

В обратном пределе частых столкновений дрейфовые неустойчивости возможны, если

$$\omega v_i \approx \omega_{др} v_i \approx \frac{k_y}{\Omega_i} \cdot \frac{T_e + T_i}{M} \cdot \frac{v_i}{L_0} > k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2 \geq k_y^2 \theta^2 v_{Ti}^2. \quad (4)$$

Следовательно, дрейфовая неустойчивость в столкновительной плазме стабилизируется shear-м при условии

$$\theta > \sqrt{\left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \frac{v_i}{\Omega_i}}. \quad (5)$$

**Задача 6.** Исследовать конвективную неустойчивость неоднородной плазмы в пределе частых столкновений при наличии кривизны и перекрещенности силовых линий удерживающего плазму магнитного поля.

**Решение.** Согласно предыдущей задаче вводим  $k_{\parallel}(x)$  по формуле (1) и записываем уравнение эйконала для конвективных колебаний в виде (см. § 45)

$$\left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right) \frac{\eta}{4\pi} k_{\perp}^2 \omega^2 + i\omega k_{\parallel}^2 v_A^2 - \frac{\eta}{4\pi} k_y^2 g_{\Phi\Phi} \frac{\partial \ln N}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где  $\eta = c^2/\sigma$ ,  $\sigma = \alpha \omega_{Le}^2/4\pi\nu_e$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\nu_e = \nu_{en}$  — для слабоионизованной плазмы и  $\alpha = 1,96$ ,  $\nu_e = \nu_{\Phi\Phi}$  — для полностью ионизованной плазмы. Введем обозначения  $\theta(x) = sx$  и новую переменную  $\xi = x + (k_z/k_y)s$ . Используя правило квантования, при этом получаем дисперсионное уравнение

$$\int d\xi \left[ -k_y^2 - \frac{4\pi}{\eta\omega^2} \cdot \frac{k_y^2}{1 + v_A^2/c^2} \left( \frac{\eta}{4\pi} g_{\Phi\Phi} \frac{\partial \ln N}{\partial x} - i\omega\xi^2 s^2 v_A^2 \right) \right]^{1/2} = \pi n. \quad (2)$$

Здесь интегрирование ведется по области прозрачности, в которой подынтегральное выражение положительно.

Пренебрегая неоднородностью плотности плазмы по сравнению с неоднородностью перекрещенности силовых линий и считая  $s = \text{const}$ , из (2) получаем

$$k_y^2 \left( 1 - \frac{g_{\Phi\Phi} \frac{\partial \ln N}{\partial x}}{\omega^2 (1 + v_A^2/c^2)} \right) + 2n \sqrt{\frac{k_y^2 s^2 4\pi v_A^2}{i\omega (1 + v_A^2/c^2)}} = 0. \quad (3)$$

В случае слабой перекрещенности силовых линий магнитного поля ( $s \rightarrow 0$ ) отсюда находим известный спектр неустойчивых желобковых (конвективных) колебаний (см. § 45). В обратном же пределе большого shear-а появляется новая ветвь неустойчивых конвективных колебаний в области частот  $\omega^2 < \left| g_{\Phi\Phi} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \right|$  со спектром

$$\omega = i \left[ \frac{\eta k_y^2 g_{\Phi\Phi}}{(4\pi)^2 n^2 s^2 v_A^2 (1 + v_A^2/c^2)} \left( \frac{\partial \ln N}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/3}. \quad (4)$$

Таким образом, конвективная неустойчивость неоднородной плазмы в криволинейном магнитном поле shear-м не стабилизируется, хотя инкремент ее нарастания падает с ростом  $s$ .

**Задача 7.** В рамках приближения геометрической оптики исследовать устойчивость замагниченного электронного пучка с неоднородным профилем направленной скорости.

**Решение.** Считая скорость пучка  $u(x)$  малой по сравнению со скоростью света, ограничимся анализом продольных колебаний и запишем уравнение эйконала в нулевом приближении геометрической оптики:

$$k_{\perp}^2 \left( 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \right) + k_z^2 \left( 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\omega - k_z u)^2} \right) + k_y \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e (\omega - k_z u)} = 0. \quad (1)$$

Для определения локального спектра отсюда получаем

$$\left[ k_{\perp}^2 \left( 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \right) + k_z^2 \right] \omega'^2 + k_y \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \ln \frac{N}{B_0} \right) \omega' - k_z^2 \omega_{Le}^2 \left( 1 - \frac{k_y}{k_z} \cdot \frac{u}{\Omega_e} \cdot \frac{\partial \ln u}{\partial x} \right) = 0, \quad (2)$$

где  $\omega' = \omega - k_z u(x)$ .

Видно, что при условии

$$\frac{k_y}{k_z} \cdot \frac{u}{\Omega_e} \cdot \frac{\partial \ln u}{\partial x} > 1 \quad (3)$$

электронный пучок может стать неустойчивым. Неоднородность плотности и магнитного поля при этом играет стабилизирующую роль. Условие стабилизации пучка записывается в виде

$$\frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{B} \right)^2 > 4k_z^2 \left( 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \right) \left| 1 - \frac{k_y u}{k_z \Omega_e} \cdot \frac{\partial \ln u}{\partial x} \right|. \quad (4)$$

В противном случае пучок неустойчив. Эта неустойчивость получила название *slipping*-неустойчивости, поскольку она обусловлена проскальзыванием различных слоев пучка относительно друг друга.

**Задача 8.** Показать, что в сильно замагниченном холодном электронном пучке, имеющем неоднородный профиль направленной скорости, симметричные моды колебаний при  $k_y = 0$  затухают из-за резонансного взаимодействия колебаний с электронным пучком (аналог затухания Ландау).

**Решение.** Уравнение эйконала для таких мод продольных колебаний запишем в виде

$$k_x^2 \left( 1 + \frac{\omega_{Le}^2(x)}{\Omega_e^2} \right) + k_z^2 \left( 1 - \frac{\omega_{Le}^2(x)}{(\omega - k_z u(x))^2} \right) = 0. \quad (1)$$

Считая для простоты  $\Omega_e^2 \gg \omega_{Le}^2$ , из (1) в области частот  $(\omega - k_z u)^2 \ll \ll \omega_{Le}^2$  получаем дисперсионное уравнение

$$\int \frac{\omega_{Le}(x)}{\omega - k_z u(x)} dx = \frac{\pi n}{|k_z|}, \quad (2)$$

где  $n$  — целые числа, а интегрирование ведется по области прозрачности, которая определяется условием  $(\omega - k_z u)^2 \ll \omega_{Le}^2$ .

Пусть это условие выполняется во всей области, занятой плазмой,  $|x| \ll a$ , причем на границе плазмы заданы недиссипативные граничные условия. Тогда в (2) интегрирование ведется по области  $-a \leq x \leq a$ . При интегрировании следует учитывать полюс  $u(x)k_z = \omega$ , соответствующий резонансному взаимодействию волны с неоднородным электронным пучком в точках, где скорость пучка совпадает с фазовой скоростью волны. Следствием подобного взаимодействия может оказаться поглощение волны в резонансных точках пучка.

Для пучка с однородной плотностью  $N = \text{const}$  и неоднородной скоростью  $u(x) = u_0 x/a$  из (2) получаем

$$\frac{\omega_{Le} a}{u_0} \left[ \ln \left| \frac{\omega + k_z u_0}{\omega - k_z u_0} \right| - \frac{i\pi}{2} \left( 1 + \frac{k_z u_0 - \omega}{|k_z u_0 - \omega|} \right) \right] = \pi n. \quad (3)$$

Отсюда находим условие применимости геометрической оптики

$$\omega_{Le} a \gg u_0. \quad (4)$$

Из уравнения (3) следует, что в рассматриваемых условиях колебания возможны лишь в области частот  $\omega > k_z u_0$ , когда мнимое слагаемое тождественно равно нулю и поглощение волны отсутствует. При этом спектр колебаний

$$\omega = k_z u_0 \operatorname{cth} \frac{\pi n u_0}{2\omega_{Le} a}. \quad (5)$$

В области частот  $\omega < k_z u_0$  вследствие сильного поглощения в резонансных точках колебания оказываются невозможными.

Иное положение имеет место, если неоднородна также плотность пучка.

Пусть  $N = N_0 \exp(-x^2/L_0^2)$  и  $L_0^2 \ll a^2$ . Тогда из (2) получаем

$$1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega_{Le}(0) |k_z| L_0}{a n} J_+ \left( \frac{\omega a}{k_z u_0 L_0} \right) = 0. \quad (6)$$

Легко видеть, что в пределе  $\omega < k_z u_0 L_0/a$  из-за сильного поглощения в резонансных точках колебания в пучке невозможны. В области же частот  $\omega \gg \gg k_z u_0 L_0/a$  уравнение (6) приводит к следующему спектру слабозатухающих колебаний ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ ):

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega_{Le}(0) |k_z|}{n} L_0, \quad (7)$$

$$\frac{\delta}{\omega} = - \frac{\omega_{Le}(0) a}{n u_0} \exp \left( - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\omega_{Le}^2(0) a^2}{n^2 u_0^2} \right).$$

Рассмотренный механизм поглощения аналогичен черенковскому механизму поглощения волн, обусловленного тепловым движением частиц в плазме и приводящего к затуханию Ландау. В данном случае, однако, это поглощение существенно зависит от вида функции  $u(x)$ .

## Глава IX

### ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕННО ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

#### § 46. Поверхностные электромагнитные волны в полуограниченной плазме

В предыдущей главе речь шла о коротковолновых электромагнитных колебаниях пространственно неоднородной плазмы, длина волны которых во много раз меньше характерного размера неоднородности плазмы. Для описания таких колебаний плазму можно было считать практически неограниченной и воспользоваться приближением геометрической оптики. Рассмотрим обратный предельный случай, когда размеры неоднородности плазмы малы по сравнению с длиной волны или когда неоднородность плазмы является достаточно резкой по сравнению с длиной волны. Из всех возможных задач электродинамики плазмы с резкими неоднородностями исследуем лишь простейшие, а именно поверхностные электромагнитные волны в полуограниченной плазме, граничащей с вакуумом. Поверхностные волны представляют собой качественно новый тип электромагнитных колебаний ограниченной среды — волны, бегущие вдоль поверхности среды и затухающие в направлении, перпендикулярном к ней.

Очевидно, что характер поверхностных волн существенно зависит от свойств поверхности плазмы, точнее, от граничных условий, которыми должны быть дополнены уравнения поля и о которых уже шла речь в § 5 гл. II. Из большого многообразия различных моделей

поверхности плазмы ограничимся только двумя, противоположными по своей физической природе. Первая из этих моделей обсуждается в настоящем параграфе и предполагает наличие у плазмы достаточно резкой поверхности, так что все величины размерности длины в плазме (длина волны, дебаевские и ларморовские радиусы частиц, длины их свободного пробега и т. п.) значительно превышают размер области изменения плотности у поверхности плазмы. Подобная ситуация имеет место, например, в газовой плазме, удерживаемой в стеклянном сосуде, электромагнитные свойства которого несущественно отличаются от свойств вакуума, либо в плазме твердого тела, структура поверхности которой определяется кристаллической решеткой. Вторая же модель предполагает, что плазма удерживается сильным внешним магнитным полем, и поэтому поверхность ее представляет собой размытый слой толщиной порядка ларморовского радиуса частиц. Для поверхностных волн длиной, намного большей ларморовского радиуса частиц, такую размытую поверхность можно считать резкой. Эта ситуация характерна для высокотемпературной плазмы в установках для управляемого термоядерного синтеза, где с помощью магнитного поля осуществляется изоляция плазмы от металлических стенок установки, и плазма оказывается пространственно ограниченной, граничащей с вакуумом. Эта модель поверхности плазмы будет изучена в следующем параграфе.

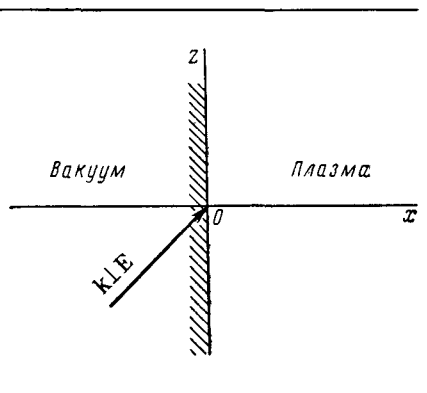


Рис. 37

Анализ поверхностных волн в плазме с резкой границей ограничим случаем изотропной бесстолкновительной полуограниченной плазмы в отсутствие внешних электрического и магнитного полей, причем в качестве невозмущенной функции распределения частиц сорта  $\alpha$  ( $\alpha = e, i$ ) примем либо функцию распределения Максвелла

$$f_{0\alpha} = \frac{N_{0\alpha}}{(2\pi m_{\alpha} T_{\alpha})^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_{\alpha} v^2}{2T_{\alpha}}\right), \quad (46.1)$$

если плазма невырождена, либо функцию распределения Ферми

$$f_{0\alpha} = \begin{cases} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} & \text{при } p < p_F = (3\pi^2)^{1/3} \hbar N_{0\alpha}^{1/3}, \\ 0 & \text{при } p > p_F, \end{cases} \quad (46.2)$$

если плазма вырождена. Здесь  $N_{0\alpha} = \text{const}$  при  $x > 0$  (плазма, рис. 37) и  $N_{0\alpha} = 0$  при  $x < 0$  (вакуум). При этом решение кинети-

ческого уравнения для возмущения функции распределения

$$\frac{\partial \delta f_a}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \delta f_a + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E} \frac{\partial f_{0a}}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (46.3)$$

без ограничения общности можно искать в виде

$$\delta f_a = \delta f_a(x) \exp(-i\omega t + ik_z z), \quad (46.4)$$

направив ось  $Oz$  вдоль составляющей волнового вектора, параллельной поверхности плазмы. В результате из (46.3) получаем

$$-i\omega \delta f_a + ik_z v_z \delta f_a + v_x \frac{\partial \delta f_a}{\partial x} + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E} \frac{\partial f_{0a}}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (46.5)$$

Для решения уравнения (46.5) необходимо задание граничного условия для  $\delta f_a(x)$  при  $x=0$ , т. е. на поверхности плазмы. Именно это условие должно содержать всю информацию о характере взаимодействия заряженных частиц с поверхностью, ограничивающей плазму. Далее будем считать, что заряженные частицы, падая на эту поверхность, отражаются от нее зеркально. Это означает, что при  $x=0$  выполняется условие

$$\delta f_a(0, v_x > 0) = \delta f_a(0, v_x < 0). \quad (46.6)$$

Кроме того, интересуясь поверхностными волнами плазмы (либо проникновением поля в плазму), будем считать, что электромагнитное поле  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  затухает при удалении от поверхности плазмы, а поэтому стремится к нулю и  $\delta f_a^{\pm}(x, v_x)$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Для решения уравнения (46.5) удобно представить

$$\delta f_a(x, v_x) = \delta f_a^+(x, v_x) + \delta f_a^-(x, v_x), \quad (46.7)$$

$$\delta f_a(x, v_x) = \begin{cases} \delta f_a^+(x, v_x > 0), \\ \delta f_a^-(x, v_x < 0). \end{cases}$$

Очевидно, что каждое из слагаемых  $\delta f_a^{\pm}$  также удовлетворяет уравнению (46.5). Поэтому, учитывая, что  $\delta f_a^-(x, v_x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ , находим

$$\delta f_a^-(x, v_x) = \frac{e_a}{m_a} \cdot \frac{\partial f_{0a}}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{1}{v_x} \int_x^{\infty} dx' \mathbf{E}(x') \exp \left[ -\frac{(x-x')}{v_x} \times \right. \\ \left. \times (-i\omega + ik_z v_z) \right]. \quad (46.8)$$

Определим теперь  $\delta f_a^+(x, v_x)$ . Для этого перепишем условие (46.6) в виде

$$\delta f_a^+(0, v_x) = \delta f_a^-(0, -v_x). \quad (46.6a)$$



В результате из уравнения (46.5) находим

$$\begin{aligned} \delta f_{\alpha}^{+}(x, v_x) = & -\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v} \cdot \frac{1}{v_x} \int_0^x dx' \mathbf{E}(x') \exp \left[ -\frac{(x-x')}{v_x} \times \right. \\ & \times (-i\omega + ik_z v_z) \left. \right] - \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v} \cdot \frac{1}{v_x} \int_0^{\infty} dx' \mathbf{E}(x') \times \\ & \times \exp \left[ -\frac{(x+x')}{v_x} (-i\omega + ik_z v_z) \right]. \end{aligned} \quad (46.9)$$

Подставляя далее (46.8) и (46.9) в формулу для плотности тока

$$\mathbf{j}(x) = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int d\mathbf{p} v \delta f_{\alpha}(v) = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \left( \int_{v_x > 0} d\mathbf{p} v \delta f_{\alpha}^{+} + \int_{v_x < 0} d\mathbf{p} v \delta f_{\alpha}^{-} \right), \quad (46.10)$$

после несложных преобразований получаем

$$j_i(x) = \int_0^{\infty} dx' [k_{ij}(|x-x'|) + k_{ij}(|x+x'|)] E_j(x'). \quad (46.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} k_{ij}(|x|) = & -\sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_{v_x > 0} d\mathbf{p} \frac{v_i}{v_x} \cdot \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_j} \exp \left[ -\frac{|x|}{v_x} (-i\omega + \right. \\ & \left. + ik_z v_z) \right]. \end{aligned} \quad (46.12)$$

Теперь можно приступить к решению уравнений поля, которые в выбранной геометрии записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}(x) &= \begin{pmatrix} -ik_z E_y(x) \\ ik_z E_x(x) - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{pmatrix}, \\ -\frac{i\omega}{c} \mathbf{E}(x) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(x) &= \begin{pmatrix} -ik_z B_y(x) \\ ik_z B_x(x) - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (46.13)$$

Эта система уравнений справедлива не только при  $x \geq 0$  (плазма), но и при  $x < 0$  (вакуум), если положить  $\mathbf{j}(x) = 0$ , что следует из (46.11) и (46.12) при учете зависимости плотности плазмы от  $x$ .

Учитывая симметрию тензора  $k_{ij}(|x|)$ , легко показать, что система уравнений (46.13) распадается на две независимые подсистемы для

компонент полей  $E_x, E_z, B_y$  и  $B_x, B_z, E_y$  соответственно. Последняя не допускает решений в виде поверхностных волн. Поэтому ограничимся здесь анализом уравнений для компонент полей  $E_x, E_z$  и  $B_y$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial x} - ik_z E_x + i \frac{\omega}{c} B_y &= 0, \\ ik_z B_y - i \frac{\omega}{c} E_x + \frac{4\pi}{c} j_x &= 0, \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} + i \frac{\omega}{c} E_z - \frac{4\pi}{c} j_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (46.14)$$

Граничные условия к системе (46.14), связывающие поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  в вакууме и плазме, находим путем интегрирования уравнений (46.14) по бесконечно узкому переходному слою вблизи границы раздела плазма — вакуум. Как следствие ограниченности полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  и плотности тока  $\mathbf{j}$  получаем обычные электродинамические граничные условия — непрерывность тангенциальных компонент полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  при  $x = 0$ :

$$\{E_z\}_{x=0} = \{B_y\}_{x=0} = 0, \quad (46.15)$$

где введено обозначение  $\{A\}_{x=0} = A(x \rightarrow +0) - A(x \rightarrow -0)$ .

Для решения сформулированной граничной задачи воспользуемся следующим математическим приемом: распространим уравнения (46.13) в область  $x < 0$ , приняв  $N_{0\alpha}(-x) = N_{0\alpha}(x)$ :

$$\left. \begin{aligned} E_x(x) &= -E_x(-x), & B_x(x) &= B_x(-x), \\ E_{y,z}(x) &= E_{y,z}(-x), & B_{y,z}(x) &= -B_{y,z}(-x). \end{aligned} \right\} \quad (46.16)$$

При этом во всей области  $-\infty \leq x \leq +\infty$  имеем

$$j_i(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \hat{\sigma}_{ij}^{\wedge}(|x-x'|) E_j(x'), \quad (46.17)$$

где

$$\hat{\sigma}_{ij}^{\wedge}(|x|) = - \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int dp \frac{v_i}{v_x} \cdot \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_j} \exp\left[-\frac{|x|}{v_x} (-i\omega + ik_z v_z)\right] \quad (46.18)$$

представляет собой тензор, связывающий  $\mathbf{j}(x)$  и  $\mathbf{E}(x)$  в пространственно неограниченной изотропной плазме, а его Фурье-образ

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \hat{\sigma}_{ij}^{\wedge}(|x|) e^{-ik_x x} = \\ &= -i \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int dp \frac{v_i \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_j}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (46.19)$$

совпадает с тензором проводимости изотропной плазмы (17.8).

Таким образом, материальное уравнение

$$j_i(\mathbf{k}) = \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\mathbf{k}), \quad (46.20)$$

связывающее Фурье-компоненты плотности тока и напряженности электрического поля, для полуограниченной плазмы в случае зеркального отражения частиц от ее поверхности имеет тот же вид, как и для пространственно неограниченной изотропной плазмы. Это и понятно, поскольку при зеркальном отражении частиц от поверхности плазмы характер движения частиц такой же, как в неограниченной плазме, а поэтому возмущение, возникающее в системе под действием электромагнитного поля, не зависит от наличия поверхности. Более того, можно показать, что при зеркальном отражении частиц от поверхности плазмы соотношение (46.20) остается справедливым и для анизотропной плазмы во внешнем постоянном магнитном поле.

Следует отметить, что при использовании продолжения (46.16) компоненты  $E_x$ ,  $B_y$  и  $B_z$  (нечетно продолженные) претерпевают скачок при  $x = 0$ . В этом легко убедиться, подставив (46.17) в систему (46.13) и проинтегрировав по узкому слою вблизи  $x = 0$ . В то же время, если исходить из выражения (46.11) и считать  $j(x) = 0$  при  $x < 0$ , то интегрирование системы (46.17) по переходному слою вблизи поверхности плазмы приводит к условию непрерывности тангенциальных компонент полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  при  $x = 0$ , что отражено в граничных условиях (46.15). Этот факт вполне естественный, поскольку системы (46.14) и (46.17) справедливы только в области плазмы при  $x \geq 0$ , а используемое продолжение — лишь математический прием для решения этой задачи. С другой стороны, отмеченный факт нужно учитывать при решении уравнений поля (46.14), которые при подстановке выражений для плотности тока (46.17) представляют собой систему интегродифференциальных уравнений с разностным ядром. Такую систему следует решать с помощью преобразования Фурье

$$A(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} A(k_x), \quad (46.21)$$

$$A(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ik_x x} A(x),$$

учитывая возможные скачки величин  $E_x$ ,  $B_y$  и  $B_z$  при  $x = 0$ .

Произведя преобразование Фурье в системе (46.14), учитывая при этом непрерывность функции  $E_z(x)$  и разрывность функции  $B_y(x)$  в точке  $x = 0$ , получим алгебраические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} ik_x E_z(k_x) - ik_z E_x(k_x) + i \frac{\omega}{c} B_y(k_x) &= 0, \\ ik_z B_y(k_x) - i \frac{\omega}{c} E_x(k_x) + \frac{4\pi}{c} j_x(k_x) &= 0, \\ ik_x B_y(k_x) - 2B_y(x=0) + i \frac{\omega}{c} E_z(k_x) - \frac{4\pi}{c} j_z(k_x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (46.22)$$

Отсюда находим

$$E_z(k_x) = -\frac{i}{\pi} B_y(0) \frac{c}{\omega k^2} \left\{ \frac{k_z^2}{\varepsilon^l(\omega, k)} - \frac{k_x^2 \omega^2}{c^2 \left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, k) \right]} \right\}. \quad (46.23)$$

Здесь  $k^2 = k_x^2 + k_z^2$ , а  $\varepsilon^l(\omega, k)$  и  $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$  — соответственно продольная и поперечная диэлектрические проницаемости изотропной плазмы, определяемые выражениями (17.14).

Подставляя (46.23) в формулу для преобразования Фурье (46.21), определим так называемый поверхностный импеданс полуограниченной изотропной плазмы:

$$Z_{\text{пл}} = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{E_z(0)}{B_y(0)} = -i \frac{8\omega}{c^2} \int_0^\infty \frac{dk_x}{k^2} \left( \frac{k_z^2 c^2}{\omega^2 \varepsilon^l} - \frac{k_x^2 c^2}{k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^{tr}} \right). \quad (46.24)$$

Аналогично можно решить систему уравнений (46.14) для вакуума, т. е. при  $\mathbf{j}(x) = 0$ . Здесь только следует продолжать поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  по формулам (46.16) в область  $x > 0$ . В результате находим поверхностный импеданс вакуумного полупространства:

$$Z_{\text{вак}} = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{E_z(0)}{B_y(0)} = \frac{4\pi i}{c} \sqrt{\frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} - 1}. \quad (46.25)$$

Эту формулу можно также получить из (46.24), положив  $\varepsilon^l = \varepsilon^{tr} = 1$ .

Теперь можно воспользоваться граничными условиями (46.15) и приравнять  $Z_{\text{пл}} = Z_{\text{вак}}$ . Это равенство и представляет собой искомое дисперсионное уравнение для поверхностных волн в полуограниченной изотропной плазме:

$$\sqrt{\frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} - 1} + \frac{2\omega}{\pi c} \int_0^\infty \frac{dk_x}{k^2} \left( \frac{k_z^2 c^2}{\omega^2 \varepsilon^l} - \frac{k_x^2 c^2}{k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^{tr}} \right) = 0. \quad (46.26)$$

В пределе  $c \rightarrow \infty$  из (46.26) получаем дисперсионное уравнение для продольных (потенциальных) поверхностных волн в полуограниченной плазме:

$$1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk_x |k_z|}{k^2 \varepsilon^l(\omega, k)} = 0. \quad (46.27)$$

Перейдем к анализу спектров частот поверхностных электромагнитных волн в полуограниченной плазме. Начнем с холодной плазмы, полностью пренебрегая тепловым движением частиц. Учитывая, что при этом

$$\varepsilon^l = \varepsilon^{tr} = \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}, \quad (46.28)$$

из общего дисперсионного уравнения (46.26) получаем

$$\sqrt{k_z^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega)} + \varepsilon(\omega) \sqrt{k_z^2 c^2 - \omega^2} = \sqrt{k_z^2 c^2 + \omega_{Le}^2 - \omega^2} + \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right) \sqrt{k_z^2 c^2 - \omega^2} = 0. \quad (46.29)$$

Отсюда видно, что поверхностные волны в полуограниченной холодной изотропной плазме существуют лишь в области частот  $\omega < \omega_{Le}$ , причем их фазовая скорость всегда меньше скорости света,  $\omega < k_z c$ . Общее решение уравнения (46.29) представлено графически на рис. 38. Аналитическое решение легко записать в предельных случаях длинных и коротких волн:

$$\omega^2 = \begin{cases} k_z^2 c^2 & \text{при } k_z^2 c^2 \ll \omega_{Le}^2, \\ \omega_{Le}^2 / 2 & \text{при } k_z^2 c^2 \gg \omega_{Le}^2. \end{cases} \quad (46.30)$$

В длинноволновом пределе фазовая скорость поверхностных волн близка к скорости света и колебания с хорошей степенью точности поперечны, в то время как в коротковолновом пределе их фазовая скорость мала по сравнению со скоростью света и колебания почти продольны (потенциальны). Потенциальность коротких (медленных) поверхностных волн в холодной плазме подтверждается и решением уравнения (46.27), которое в этом пределе принимает вид

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} = -1 \quad (46.31)$$

и имеет решение, тождественно совпадающее со вторым решением (46.30).

Ранее полностью пренебрегалось тепловым движением частиц, а вместе с тем и бесстолкновительным черенковским затуханием поверхностных волн. Очевидно, что наиболее сильно затухают медленные волны, являющиеся с хорошей степенью точности продольными. Поэтому для определения бесстолкновительного затухания поверхностных волн ограничимся анализом уравнения (46.27). Точно это уравнение удастся проанализировать только путем численного интегрирования. Однако проанализируем его приближенно, представив в области  $\omega \gg k_z v_{Te}$  в виде

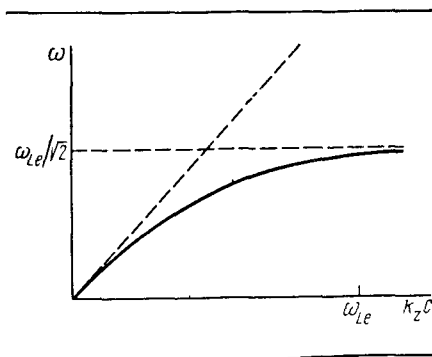


Рис. 38

$$2 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} + i \sqrt{\frac{2}{\pi}} |k_z| \int_0^{\infty} \frac{dk_x \omega_{Le}^2 \omega}{k^5 v_{Te}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}\right) = 0. \quad (46.32)$$

При получении этого соотношения была учтена малость мнимых слагаемых в (46.27), обусловленных черенковским поглощением поверхностных волн электронами плазмы. Если теперь учесть, что при  $\omega \gg k_z v_{Te}$  основной вклад в интеграл (46.32) дает область больших значений  $k_x$ , то с хорошей степенью точности под интегралом можно заменить  $k$  на  $k_x$  (т. е. положить  $k_z = 0$ ). В результате интегрирование проводится до конца и из уравнения (46.32) получаем

$$2 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left(1 - 2i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{|k_z| v_{Te}}{\omega}\right) = 0. \quad (46.33)$$

Отсюда для декремента затухания ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ ) находим\*

$$\delta = - \sqrt{\frac{2}{\pi}} |k_z| v_{Te}. \quad (46.34)$$

Следует обратить внимание на то, что затухание высокочастотных продольных поверхностных волн в отличие от объемных ленгмюровских волн не экспоненциально мало, хотя их фазовая скорость намного больше тепловой скорости электронов. Указанное обстоятельство является следствием того, что в области частот  $\omega \gg k_z v_{Te}$  резонансное взаимодействие частиц с волной имеет место при  $\omega = k_x v_{Te}$ , а поскольку для поверхностных волн согласно (46.27)  $k_x$  принимает сколь угодно большие значения (в частности,  $k_x > \omega/v_{Te}$ ), в их поглощении принимает участие основная масса электронов, а не только экспоненциально малая доля частиц, как в случае объемных ленгмюровских волн в пространственно неограниченной плазме.

Не представляет труда учесть бесстолкновительную черенковскую диссипацию высокочастотных продольных поверхностных волн и в вырожденной электронной плазме. Для этого необходимо исходить из выражения для продольной диэлектрической проницаемости вырожденной плазмы (19.1), подставив его в уравнение (46.27). В результате в области частот  $\omega \gg k_z v_{Fe}$  получаем [ср. с (46.32)]

$$2 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left(1 + i \frac{3}{4} \frac{|k_z| v_{Fe}}{\omega}\right) = 0. \quad (46.35)$$

Отсюда для декремента затухания ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ ) находим

$$\delta = - \frac{3}{8} |k_z| v_{Fe}. \quad (46.36)$$

Здесь еще более выраженным является отличие характера бесстолкновительного поглощения поверхностных волн от поглощения объемных

---

\* Точное численное решение уравнения (46.27) приводит в декремента затухания поверхностных волн к коэффициенту 0,125 вместо  $\sqrt{2/\pi} \approx 0,8$ .

волн. Дело в том, что, как было показано в § 19, высокочастотные объемные волны в вырожденной плазме в бесстолкновительном пределе вообще не затухают, поскольку их фазовая скорость больше скорости Ферми и электроны не могут взаимодействовать с ними.

Перейдем далее к изучению поверхностных ионно-звуковых волн в полуограниченной изотропной плазме. Как было показано в § 18, объемные ионно-звуковые волны в неограниченной плазме существуют лишь в случае сильной неизотермичности, когда  $T_e \gg T_i$ . Это требование сохраняется и для поверхностных волн. Так же как и объемные, поверхностные ионно-звуковые волны являются продольными и описываются дисперсионным уравнением (46.27), причем для невырожденной плазмы (см. § 18)

$$\varepsilon^t = 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega}{k v_{Te}} \right). \quad (46.37)$$

Поскольку  $k v_{Te} \gg \omega \gg k v_{Ti}$ , можно ограничиться учетом лишь черенковской диссипации на электронах плазмы, полностью пренебрегая тепловым движением ионов.

Уравнение (46.27) при подстановке выражения (46.37) и интегрирования по  $k_x$  окончательно сводится к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon_i + \left( 1 + \frac{\omega_{Li}^2}{k_z^2 v_s^2 \varepsilon_i} \right)^{-1/2} - i \sqrt{\frac{2m}{\pi M}} \cdot \frac{\omega_{Li}^2 \omega}{|k_z|^3 v_s^3} \times \\ \times \frac{1}{\varepsilon_i} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1} (x^2 + 1 + \omega_{Li}^2 / k_z^2 v_s^2 \varepsilon_i)^2} = 0. \end{aligned} \quad (46.38)$$

где  $v_s = \sqrt{T_e/M}$ , а  $\varepsilon_i = 1 - \omega_{Li}^2/\omega^2$ .

Хотя входящий в уравнение (46.38) интеграл и вычисляется в элементарных функциях, для дальнейшего анализа спектров поверхностных ионно-звуковых волн его удобнее оставить в таком виде.

Мнимое слагаемое в уравнении (46.38), обусловленное черенковской диссипацией волн на электронах плазмы, мало по сравнению с действительным. Поэтому в первом приближении им можно пренебречь. При этом сразу же заключаем, что поверхностные ионно-звуковые волны возможны лишь в области частот, в которой

$$\varepsilon_i = 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} < - \frac{\omega_{Li}^2}{k_z^2 v_s^2}, \quad (46.39)$$

т. е.  $\omega^2 < \omega_{Li}^2$ . Из действительной части уравнения (46.38) находим спектр частот колебаний, а при учете мнимого слагаемого — декремент их затухания. В общем случае формулы для  $\omega$  и  $\delta$  (напомним, что  $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ ) довольно громоздки, но принимают простой вид в предельных случаях длинных ( $k_z^2 v_s^2 \ll \omega_{Li}^2$ ) и коротких ( $k_z^2 v_s^2 \gg \omega_{Li}^2$ )

поверхностных волн:

$$\omega^2 = \begin{cases} k_z^2 v_s^2 & \text{при } k_z^2 v_s^2 \ll \omega_{Li}^2, \\ \omega_{Li}^2/2 & \text{при } k_z^2 v_s^2 \gg \omega_{Li}^2, \end{cases} \quad (46.40)$$

$$\delta = \begin{cases} -\sqrt{\frac{\pi}{8} \cdot \frac{m}{M}} \omega & \text{при } k_z^2 v_s^2 \ll \omega_{Li}^2, \\ -\frac{1}{6} \sqrt{\frac{m}{M\pi}} \cdot \frac{\omega_{Li}^3}{k_z^3 v_s^3} \omega & \text{при } k_z^2 v_s^2 \gg \omega_{Li}^2. \end{cases}$$

Зависимость частоты  $\omega$  от  $k_z v_s$  для поверхностных ионно-звуковых волн в полуограниченной изотропной плазме представлена на рис. 39.

В заключение заметим, что описанная картина распространения поверхностных ионно-звуковых волн в неизотермической газовой плазме качественно сохраняется и в вырожденной плазме в области частот  $k v_{Ti} \ll \omega \ll k v_{Fe}$ . Действительно, в этих условиях для продольной диэлектрической проницаемости справедливо выражение (см. § 19)

$$\epsilon^l = 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} + \frac{3\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Fe}^2} \left( 1 + i \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{k v_{Fe}} \right). \quad (46.41)$$

Это соотношение подобно (46.37). Поэтому сохраняют свой вид и соотношения (46.38), (46.40), если только под  $v_s^2$  понимать  $v_s^2 = v_{Fe}^2 \frac{m}{M}$ , а мнимые слагаемые в них (в частности,  $\delta$ ) домножить на

$\sqrt{\pi/2}$ . Логически теперь следовало бы исследовать поверхностные волны в замагниченной плазме с резкой границей, с характерным размером неоднородности границы, меньшим ларморовских радиусов частиц. При условии зеркального отражения частиц от поверхности плазмы общее дисперсионное уравнение для поверхностных волн замагниченной плазмы подобно полученному для плазмы в отсутствие магнитного поля. Однако вывод его

довольно громоздок и связан с нахождением обратного тензора диэлектрической проницаемости. Поэтому не будем анализировать общий случай, а ограничимся рассмотрением только квазипродольных волн, электрическое поле которых с хорошей степенью точности является потенциальным. Это рассмотрение перенесем в следующий параграф, где исследуется устойчивость поверхностных волн в плазме, удерживаемой сильным магнитным полем.

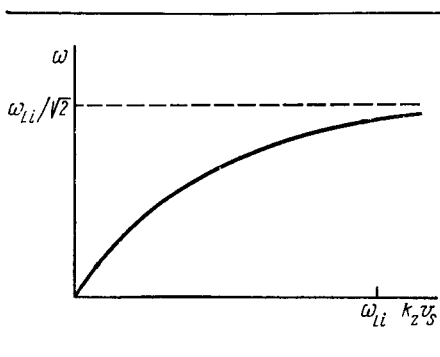


Рис. 39



## § 47. Неустойчивость границы плазмы, удерживаемой магнитным полем

Исследуем полуограниченную плазму, удерживаемую сильным магнитным полем, параллельным поверхности плазмы и направленным вдоль оси  $Oz$ . Неоднородность границы плазмы, удерживаемой магнитным полем, обладает характерным размером, намного превышающим ларморовские радиусы частиц. Эту границу будем считать расположенной вблизи плоскости  $x = 0$  (рис. 40). Для простоты столкновениями заряженных частиц в плазме пренебрежем, предполагая выполненными неравенства  $\Omega_\alpha \gg \nu_\alpha$ , где  $\alpha = e, i$ . Не возмущенную электромагнитным полем колебаний функцию распределения частиц сорта  $\alpha$  при этом находим так же, как это было сделано в § 41:

$$f_{0\alpha} = \left( 1 + \frac{v_\perp \sin \varphi}{\Omega_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) F_{0\alpha}(\mathcal{E}, x), \quad (47.1)$$

где  $F_{0\alpha}(\mathcal{E}, x)$  определяется либо функцией распределения Максвелла (46.1), либо функцией распределения Ферми (46.2), но с зависящими от  $x$  температурой и плотностью частиц.

В отличие от гл. VIII, где плазма считалась плавно неоднородной, здесь плазма неоднородна в узком слое вблизи плоскости  $x = 0$  (поверхность плазмы). В этом слое и проявляется отличие функции распределения (47.1) от максвелловской, и именно здесь локализованы диамагнитные токи, обусловленные ларморовским вращением частиц в пространственно неоднородной плазме. Как было показано в § 43, диамагнитные токи могут стать причиной возбуждения в области неоднородности плазмы коротковолновых (по сравнению с размером неоднородности) дрейфовых колебаний, описываемых в рамках приближения геометрической оптики. В дальнейшем будет показано, что диамагнитные токи могут возбуждать также колебания с длиной волны, значительно большей размера неоднородности границы плазмы. Это поверхностные волны, затухающие в глубь плазмы.

Для поверхностных волн границу плазмы можно считать бесконечно тонкой и диамагнитные токи рассматривать как граничные условия к уравнениям электромагнитного поля. Задачей исследования, таким образом, является вывод уравнений поля и граничных условий к ним, учитывающих неоднородность поверхностного слоя плазмы и возникающие в нем диамагнитные токи. Сформулированную задачу будем решать на приме-

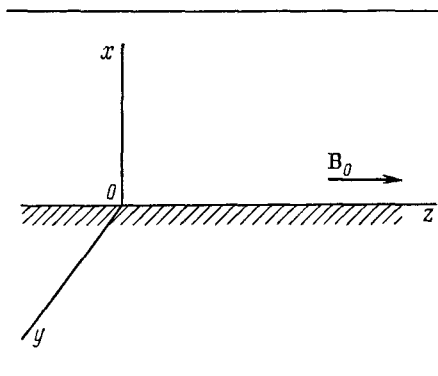


Рис. 40

ре продольных (потенциальных) волн, поскольку в случае удержания плазмы магнитным полем магнитное давление намного превышает газодинамическое, и колебания плазмы с хорошей степенью точности можно считать потенциальными. По этой же причине, как и в гл. VIII, будем пренебрегать неоднородностью магнитного поля по сравнению с неоднородностью плазмы.

При указанных ограничениях кинетическое уравнение для неравновесной добавки к функции распределения (47.1), зависящей от времени и координат как

$$\delta f_\alpha = \delta f_\alpha(x) \exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z), \quad (47.2)$$

записывается в виде

$$(\omega - k_y v_y - k_z v_z) \delta f_\alpha + i v_x \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial x} - i \Omega_\alpha \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \varphi} = -e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p}. \quad (47.3)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  — потенциальное поле возмущений  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ .

Решение уравнения (47.3) находим путем интегрирования по характеристике (см. § 41)

$$v_\perp \sin \varphi + \Omega_\alpha x = \text{const}. \quad (47.4)$$

При этом

$$\begin{aligned} \delta f_\alpha(x) = & -\frac{e_\alpha}{m_\alpha \Omega_\alpha} \int_{-\infty}^x d\varphi' \nabla\Phi(x') \frac{\partial f_{0\alpha}(x')}{\partial v} \times \\ & \times \exp\left[\frac{i}{\Omega_\alpha} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - k_\perp v_\perp \sin \varphi'' - k_z v_z)\right]. \end{aligned} \quad (47.5)$$

Здесь  $x'$  и  $x$ ,  $\varphi'$  и  $\varphi$  связаны между собой соотношением характеристики (47.4).

Подставляя решение (47.5) в формулу для плотности заряда

$$\rho(x) = \sum_\alpha e_\alpha \int \delta f_\alpha d\mathbf{p} \quad (47.6)$$

и используя уравнение Пуассона

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho(x), \quad (47.7)$$

после довольно громоздких вычислений (подобных проведенным в § 41) окончательно получаем в случае невырожденной плазмы следующее уравнение для потенциала поля колебаний:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = & \sum_\alpha \int dk_x \Phi(k_x) e^{ik_x x} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{v_{T\alpha}^2} \left\{ 1 - \sum_s \frac{\omega}{\omega - s\Omega_\alpha} \times \right. \\ & \times \left[ 1 - \frac{k_y v_{1z}^2}{\omega \Omega_\alpha} \cdot \frac{\partial^0}{\partial x} \left( 1 - \frac{s}{z_\alpha} \cdot \frac{\omega}{\Omega_\alpha} \right) - i \frac{k_x v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} \cdot \frac{\partial^0}{\partial x} \cdot \frac{A'_s(z_\alpha)}{A_s(z_\alpha)} \right] \times \end{aligned}$$

$$\times A_s(z_\alpha) J_+ \left( \frac{\omega - s\Omega_\alpha}{|k_z| v_{T\alpha}} \right) \Bigg\}, \quad (47.8)$$

где

$$z_\alpha = \frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2}, \quad \frac{\partial^0}{\partial x} = \frac{\partial \ln N_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial T_\alpha}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial T_\alpha}.$$

Оператор  $\partial^0/\partial x$  действует на все стоящие справа от него величины.

Следует отметить, что уравнение (47.8) пригодно во всем пространстве как в плазме (область  $x \geq 0$ ), так и в вакууме (область  $x < 0$ ). Поэтому оно не требует задания специальных граничных условий, их можно получить путем интегрирования самого уравнения (47.8) по физически бесконечно узкому переходному слою вблизи поверхности плазмы, малому по сравнению с длиной волны поверхностных волн.

Анализ уравнения (47.8) начнем с холодной плазмы, когда диамагнитными токами в поверхностном слое можно полностью пренебречь. Другими словами, рассмотрим колебания с фазовой скоростью, намного большей тепловых скоростей частиц, и с длиной волны, значительно превышающей их ларморовские радиусы. В уравнении (47.8) при этом следует перейти к пределу  $T \rightarrow 0$ . В результате получим

$$\begin{aligned} & \left( 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_\alpha^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y^2 \right) \Phi - \left( 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2} \right) k_z^2 \Phi + \\ & + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_\alpha^2} \right) + k_y \Phi \frac{\partial}{\partial x} \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2 \Omega_\alpha}{\omega(\omega^2 - \Omega_\alpha^2)} = 0. \end{aligned} \quad (47.9)$$

Это уравнение не зависит от вида функции распределения частиц и поэтому справедливо как для невырожденной, так и для вырожденной плазмы. Кроме того, в указанном приближении холодной плазмы, как отмечалось, полностью пренебрегается диамагнитными токами в поверхностном слое, не говоря уже о том, что сам поверхностный слой вместе с ларморовским радиусом частиц стремится к нулю. Поэтому уравнение (47.9) пригодно для описания колебаний плазмы со сколь угодно резкой границей, в частности, для плазмы, удерживаемой стенками реального диэлектрического сосуда (стекла).

В объеме плазмы (при  $x \geq 0$ ), где плотность можно считать однородной, из уравнения (47.9) имеем

$$\left( 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_\alpha^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y^2 \right) \Phi_1 - \left( 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2} \right) k_z^2 \Phi_1 = 0. \quad (47.10)$$

В вакууме (при  $x < 0$ ) уравнение (47.9) сводится к уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi_2 = 0. \quad (47.11)$$

Наконец, граничные условия, связывающие  $\Phi_1(x)$  и  $\Phi_2(x)$  на поверхности раздела плазма — вакуум, т. е. при  $x = 0$ , получаемые путем интегрирования уравнения (47.9), записываются в виде

$$\{\Phi\}_{x=0} = 0,$$

$$\left\{ \left( 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + k_y \Phi \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha} \omega_{L\alpha}^2}{\omega (\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2)} \right\}_{x=0} = 0. \quad (47.12)$$

Теперь, когда известны уравнения поля в областях  $x \geq 0$  и  $x < 0$  и граничные условия к ним, можно решить эти уравнения и сшить полученные решения. В результате имеем:

$$\Phi_1(x) = C_1 \exp \left( -\sqrt{k_y^2 + k_z^2 \frac{\epsilon_{\parallel}}{\epsilon_{\perp}}} x \right) \text{ при } x \geq 0, \quad (47.13)$$

$$\Phi_2(x) = C_2 \exp \left( \sqrt{k_y^2 + k_z^2} x \right) \text{ при } x < 0,$$

где

$$\epsilon_{\parallel} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2}, \quad \epsilon_{\perp} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2}. \quad (47.14)$$

Подставив решения (47.13) в граничные условия (47.12), получим систему однородных алгебраических уравнений для постоянных  $C_1$  и  $C_2$ , условие разрешимости которой представляет собой искомого дисперсионное уравнение для поверхностных волн в полугораниченной плазме с резкой границей:

$$\epsilon_{\perp} \sqrt{k_y^2 + k_z^2 \frac{\epsilon_{\parallel}}{\epsilon_{\perp}}} + k_y g + \sqrt{k_y^2 + k_z^2} = 0. \quad (47.15)$$

Здесь

$$g = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2 \Omega_{\alpha}}{\omega (\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2)}. \quad (47.16)$$

В отсутствие магнитного поля, когда  $\Omega_{\alpha} \rightarrow 0$ , из (47.15) находим дисперсионное уравнение для продольных поверхностных волн в полугораниченной изотропной плазме (46.31), спектр частот которых определяется вторым выражением (46.30).

Внешнее магнитное поле, параллельное поверхности плазмы, существенно меняет найденный спектр частот, если  $\Omega_e \geq \omega = \omega_{Le}/\sqrt{2}$ . Так, для мод с  $k_y = 0$  в чисто электронной плазме поверхностные волны согласно (47.15) существуют лишь при  $\omega_{Le}^2 > \Omega_e^2$  и в области частот  $\omega_{Le}^2 > \omega^2 > \Omega_e^2$ . Спектр частот поверхностных волн при этом определяется соотношением

$$\omega^2 = \frac{1}{2} (\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2). \quad (47.17)$$

При  $k_y \neq 0$  оказывается возможным существование поверхностных волн и в области частот  $\omega < \Omega_e$ . Так, например, для желобковых мод с  $k_z = 0$  в случае чисто электронной плазмы из уравнения (47.15) находим

$$\omega = \frac{k_y}{2|k_y|} \Omega_e \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Omega_e^2 + 2\omega_{Le}^2}. \quad (47.18)$$

Отсюда видно, что низкочастотные поверхностные волны возможны в сильных магнитных полях, когда  $\Omega_e^2 \gg \omega_{Le}^2$ , причем  $\omega \sim \omega_{Le}^2/\Omega_e$ .

Не представляет большого труда проанализировать уравнение (47.15) и в области низких частот  $\omega \ll \omega_{Li}$ , когда существенным становится учет движения ионов. Прежде всего отметим, что в области самых низких частот  $\omega \ll \Omega_i$  сильно замагничены как электроны, так и ионы плазмы, при этом  $g \rightarrow 0$ , а  $\epsilon_{\perp} > 0$ . В результате уравнение (47.15) решений не имеет, т. е. поверхностные волны в холодной сильно замагниченной плазме с резкой границей в области частот  $\omega \ll \Omega_i$  не существуют; они возможны лишь в области частот  $\omega \geq \Omega_i$ . Действительно, в низкочастотной области  $\epsilon_{\parallel} \gg \epsilon_{\perp}$  из уравнения (47.15) для волн, распространяющихся не строго поперек магнитного поля ( $k_z \neq 0$ ), находим

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 + \Omega_i^2. \quad (47.19)$$

При  $k_z = 0$  (желобковые моды) спектр низкочастотных волн определяется соотношением

$$\omega = \frac{k_y}{|k_y|} \left( \Omega_i + \frac{\omega_{Li}^2}{2\Omega_i} \right). \quad (47.20)$$

Из проведенного анализа видно, что в холодной бесстолкновительной замагниченной плазме в условиях полного пренебрежения тепловым движением частиц поверхностные волны плазмы с резкой границей всегда устойчивы. Более того, учет столкновений частиц приводит к их затуханию (см. задачу 3 к данной главе). В этом нет ничего удивительного, поскольку в рассматриваемом приближении полностью пренебрегается диамагнитными токами в неоднородном поверхностном слое плазмы, которые могут привести к раскачке колебаний.

Картина качественно меняется при учете конечной температуры плазмы, а вместе с ней и конечного ларморовского радиуса частиц. При этом, кроме того, что вступают в силу диссипативные эффекты, обусловленные бесстолкновительным черенковским поглощением и излучением волн частицами плазмы, существенными становятся диамагнитные токи в неоднородном поверхностном слое плазмы, которые могут оказаться причиной неустойчивости поверхностных волн плазмы. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим уравнение (47.8) в области низкочастотных ( $\omega \ll \Omega_{\alpha}$ ) и длинноволновых ( $k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2 \ll \Omega_{\alpha}^2$ ) колебаний. Разлагая функции  $A_s(z_{\alpha})$  по степеням  $z_{\alpha}$  и ограничиваясь в сумме

по циклотронным гармоникам членом с  $s = 0$ , из интегродифференциального уравнения (47.8) получаем дифференциальное уравнение второго порядка\*:

$$\Delta\Phi = \sum_a \frac{\omega_{L_a}^2}{v_{T_a}^2} \left\{ \left[ 1 - J_+ \left( \frac{\omega}{k_z v_{T_a}} \right) + \frac{k_y v_{T_a}^2}{\omega \Omega_a} \cdot \frac{\partial}{\partial x} J_+ \left( \frac{\omega}{k_z v_{T_a}} \right) \right] \Phi + \right. \\ \left. + \frac{v_{T_a}^2}{\Omega_a^2} J_+ \left( \frac{\omega}{k_z v_{T_a}} \right) \left( k_y^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{1}{\Omega_a^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} v_{T_a}^2 J_+ \left( \frac{\omega}{k_z v_{T_a}} \right) \right\}. \quad (47.21)$$

При выводе этого уравнения было принято еще одно упрощающее допущение, а именно  $\omega^2 k_{\perp}^2 \ll k_z^2 \Omega_i^2$ .

Граничные условия для потенциала  $\Phi$  получают путем интегрирования уравнения (47.21) по переходному слою вблизи границы плазмы так же, как это было сделано ранее. В результате имеем

$$\{\Phi\}_{x=0} = 0, \\ \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_a \frac{\omega_{L_a}^2}{\Omega_a^2} J_+ \left( \frac{\omega}{k_z v_{T_a}} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\Omega_a}{\omega} k_y \Phi \right) \right\}_{x=0} = 0. \quad (47.22)$$

Теперь, когда получены граничные условия, можно записать уравнение (47.21) в следующем виде:

для плазмы ( $x \geq 0$ ,  $\Phi = \Phi_1$ )

$$\Delta\Phi_1 = \sum_a \frac{\omega_{L_a}^2}{v_{T_a}^2} \left[ 1 - J_+ \left( \frac{\omega}{k_z v_{T_a}} \right) \Phi_1 + \right. \\ \left. + \frac{v_{T_a}^2}{\Omega_a^2} J_+ \left( \frac{\omega}{k_z v_{T_a}} \right) \left( k_y^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi_1 \right], \quad (47.23)$$

для вакуума ( $x < 0$ ,  $\Phi = \Phi_2$ )

$$\Delta\Phi_2 = 0. \quad (47.24)$$

Решения этих уравнений, затухающие при  $x \rightarrow \pm \infty$ , соответственно имеют вид

$$\Phi_1(x) = C_1 e^{-\lambda x}, \quad \Phi_2 = C_2 e^{-\sqrt{k_y^2 + k_z^2} x}, \quad (47.25)$$

---

\* Следует отметить, что в приближении геометрической оптики из уравнения (47.8) получаем уравнение эйконала (43.5) для бесстолкновительной плазмы, т. е. с  $v(\omega, \mathbf{k}, x)$  вида (43.6), которое в низкочастотном пределе сводится к (43.8).

где

$$x^2 = k_y^2 + \frac{k_z^2 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{v_{T\alpha}^2} \left[ 1 - J_+ \left( \frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right]}{1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2} J_+ \left( \frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right)}. \quad (47.26)$$

Подставив решения (47.25) в граничные условия (47.22), получим систему однородных алгебраических уравнений для постоянных  $C_1$  и  $C_2$ , условие разрешимости которой представляет искомое дисперсионное уравнение для поверхностных волн в полуграниченной плазме с учетом диамагнитных токов на ее поверхности:

$$\left[ 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2} J_+ \left( \frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right] x + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega \Omega_{\alpha}} k_y J_+ \left( \frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) + \sqrt{k_y^2 + k_z^2} = 0. \quad (47.27)$$

Приступая к анализу дисперсионного уравнения (47.27), прежде всего заметим, что поверхностные волны возможны лишь в области частот, где  $x^2 > 0$ ; при этом в области частот  $\omega \gg k_z v_{Te}$  тепловым движением частиц можно пренебречь, и уравнение (47.27) переходит в (47.15). В этом пределе пренебрегается также диамагнитными токами на поверхности плазмы и, как следует ожидать, колебания не нарастают во времени. Как подчеркивалось, учет диамагнитных токов может привести к раскачке поверхностных колебаний. Чтобы убедиться в этом, исследуем решения уравнения (47.27) в области частот  $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$ , в которой существуют эффекты, обусловленные тепловым движением электронов. Из уравнения (47.27) в этой области частот получаем

$$\left( 1 + \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2} \right) x + \frac{\omega_{Li}^2 k_y}{\omega \Omega_i} \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right) + \sqrt{k_y^2 + k_z^2} = 0, \quad (47.28)$$

причем

$$x^2 = k_y^2 + \frac{k_z^2 \left( 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \right) + \frac{\omega_{Li}^2}{v_s^2} \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right)}{1 + \omega_{Li}^2 / \Omega_i^2} \quad (47.29)$$

( $v_s = \sqrt{T_e/M}$  — скорость ионного звука).

Для мод с  $k_y^2 \gg k_z^2$  при условии  $\omega_{Li}^2 \gg \Omega_i^2$  (которое, как правило, с большим запасом выполнено в реальной плазме, удерживаемой магнитным полем) из уравнения (47.28) находим следующий спектр слабонарастающих колебаний ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ ):

$$\omega = k_y v_s, \quad \delta = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{\omega^2}{|k_z| v_{Te}}. \quad (47.30)$$

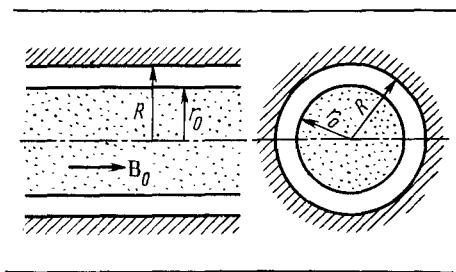


Рис. 41

$v_s/\Omega_i$ . В сильно неизотермической плазме с  $T_e \gg T_i$  этот масштаб во много раз превышает ларморовский радиус ионов и размер неоднородности плазмы.

В заключение заметим, что неустойчивости поверхностных волн для проблемы магнитного удержания могут оказаться более опасными, чем дрейфовые неустойчивости, поскольку последние приводят к возбуждению в плазме коротковолновых колебаний, локализованных в неоднородном слое вблизи поверхности плазмы, в то время как неустойчивые поверхностные волны могут охватывать значительно более глубокие слои плазмы.

Это особенно ярко проявляется при наличии тока в плазме, либо гравитационного дрейфа, обусловленного кривизной силовых линий удерживающего магнитного поля (см. следующий параграф и задачу 6 к данной главе).

## § 48. Плазменный волновод

Если ранее речь шла о полуограниченной плазме, то здесь рассмотрим пример ограниченной в пространстве плазмы, а именно плазменный цилиндр радиуса  $r_0$ , окруженный металлическим кожухом радиуса  $R > r_0$  (рис. 41). Всю систему поместим в продольное магнитное поле  $B_0$ , вдоль которого и направим ось  $Oz$ . Плазму будем считать однородной с резкой границей, т. е. распределение частиц по скоростям примем в виде функции распределения Максвелла (46.1), либо функции распределения Ферми (46.2), в которых

$$N_\alpha(r) = \begin{cases} N_{0\alpha} = \text{const} & \text{при } r \leq r_0, \\ 0 & \text{при } r > r_0. \end{cases} \quad (48.1)$$

Такой равновесной функцией распределения, однако, как отмечалось, можно пользоваться лишь в условиях, когда плазма удерживается твердой непроницаемой для частиц стенкой. Если же удержание плазмы обеспечивается продольным магнитным полем, то для определения равновесной функции распределения частиц следует решать кинети-

Отсюда следует, что в полуограниченной плазме, удерживаемой магнитным полем, под действием диамагнитных токов в неоднородном поверхностном слое происходит раскачка поверхностных ионно-звуковых волн, распространяющихся вдоль границы плазмы под большим углом к магнитному полю и убывающих в глубь плазмы с характерным пространственным масштабом порядка



ческое уравнение, считая плазму неоднородной по радиусу и сильно замагниченной,  $\Omega_\alpha \gg v_\alpha$  :

$$\cos(\varphi - \psi) v_\perp \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial r} - \Omega_\alpha \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \varphi} + \sin(\varphi - \psi) \frac{v_\perp}{r} \cdot \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \psi} = 0. \quad (48.2)$$

Здесь использована цилиндрическая система координат как по скоростям,  $\mathbf{v} = (v_\perp, \varphi, v_z)$ , так и по пространственным координатам,  $\mathbf{r} = (r, \psi, z)$ .

Общее решение уравнения (48.2) является произвольной функцией его характеристик, в частности,

$$C_\alpha = r v_\perp \sin(\varphi - \psi) + \int^r r dr \Omega_\alpha(r). \quad (48.3)$$

Записав решение в виде  $f_{0\alpha}(\mathcal{E}, C_\alpha)$  и полагая характерный размер неоднородности плазмы большим по сравнению с ларморовским радиусом частиц, находим [ср. с (47.1)]

$$f_{0\alpha}(\mathcal{E}, C_\alpha) = \left( 1 + \frac{v_\perp \sin(\varphi - \psi)}{\Omega_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) F_{0\alpha}(\mathcal{E}, r). \quad (48.4)$$

Здесь в качестве  $F_{0\alpha}(\mathcal{E}, r)$  можно взять функцию распределения Максвелла, либо Ферми, но с неоднородной плотностью и температурой частиц.

Найденная равновесная функция распределения (48.4) позволяет исследовать малые колебания плазменного цилиндра, не полностью заполняющего мегаллический волновод. Для изучения таких колебаний примем все неравновесные величины зависящими от времени и координат в виде

$$A = A(r) \exp(-i\omega t + il\psi + ik_z z). \quad (48.5)$$

Тогда для малой неравновесной добавки к функции распределения (48.4) в бесстолкновительной плазме имеем

$$\begin{aligned} & -i \left( \omega - k_z v_z - \frac{l}{r} \sin \chi \right) \delta f_\alpha + v_\perp \cos \chi \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial r} - \\ & - \left( \Omega_\alpha + \frac{v_\perp \sin \chi}{r} \right) \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \chi} = - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{v}}, \end{aligned} \quad (48.6)$$

где  $\mathbf{E}(r)$  и  $\mathbf{B}(r)$  — электрическое и магнитное поля колебаний, а  $\chi = \varphi - \psi$ .

Характеристика уравнения (48.6), как и уравнения (48.2), дается соотношением (48.3). Поэтому общее решение, принимая магнитное поле для простоты однородным по сечению плазмы, можно записать в виде

$$\delta f_{\alpha}(r) = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \int_{\infty}^{\chi} d\chi' \frac{\left\{ \mathbf{E}(r') + \frac{1}{c} [\mathbf{v}' \mathbf{B}(r')] \right\} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v(\chi')}}{1 + \frac{v_{\perp} \sin \chi'}{r' \Omega_{\alpha}}} \times$$

$$\times \exp \left( \frac{i}{\Omega_{\alpha}} \int_{\chi}^{\chi'} d\chi'' \frac{\left( \omega - k_z v_z - \frac{iv_{\perp}}{r''} \sin \chi'' \right)}{1 + \frac{v_{\perp} \sin \chi''}{\Omega_{\alpha} r''}} \right). \quad (48.7)$$

Величины  $r'$ ,  $r''$  и  $\chi'$  в этой формуле связаны с  $r$ ,  $\chi$  и  $\chi''$  уравнением характеристики (48.3).

Подставляя выражение (48.7) в формулу для плотности тока

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int d\mathbf{p} \mathbf{v} \delta f_{\alpha}, \quad (48.8)$$

получим материальное уравнение, связывающее  $\mathbf{j}(r)$  с электрическим полем  $\mathbf{E}(r)$  интегральным соотношением. В нулевом приближении геометрической оптики это материальное уравнение определяет тензор проводимости, а следовательно, и тензор диэлектрической проницаемости, аналогичный (41.22) (для невырожденной плазмы) и (41.29) (для вырожденной плазмы) с заменой

$$k_y \rightarrow l/r, \quad (48.9)$$

учитывающей цилиндрическую геометрию. Естественно, все выводы о дрейфовых колебаниях неоднородной бесстолкновительной плазмы, полученные в предыдущей главе, с учетом замены (48.9) сохраняются и в случае плазменного цилиндра.

Появление качественно новых эффектов, отличающих цилиндрическую геометрию от плоской, следует ожидать лишь в пределе длинных волн, не описываемых в рамках приближения геометрической оптики. Поэтому далее будем рассматривать именно этот предел. Кроме того, для простоты ограничимся анализом только высокочастотных волн, с фазовыми скоростями, намного превышающими тепловые скорости частиц в плазме. Для таких волн в первом приближении тепловым движением частиц можно полностью пренебречь. При этом независимо от вида равновесной функции распределения (т. е. как для невырожденной, так и для вырожденной плазмы) указанное материальное уравнение оказывается локальным, причём

$$D_i(\omega, k_z, l, r) = \epsilon_{ij}(r) E_j(\omega, k_z, l, r), \quad (48.10)$$

где  $\epsilon_{ij}(r)$  — тензор диэлектрической проницаемости плазмы:

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{rr} & \epsilon_{r\varphi} & 0 \\ \epsilon_{\varphi r} & \epsilon_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (48.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\perp} &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2(r)}{\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2}, \\ \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi r} = ig &= -i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2(r) \Omega_{\alpha}}{\omega(\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2)}, \\ \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\parallel} &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2(r)}{\omega^2}.\end{aligned}\quad (48.12)$$

Легко понять, что этот тензор можно получить для холодной неоднородной бесстолкновительной плазмы в модели независимых частиц (см. задачу 7 к данной главе).

Запишем теперь уравнения поля с учетом материального уравнения (48.10):

$$\left. \begin{aligned}i \frac{l}{r} E_z - ik_z E_{\varphi} &= \frac{i\omega}{c} B_r, \quad i \frac{l}{r} B_z - ik_z B_{\varphi} = -\frac{i\omega}{c} (\varepsilon_{\perp} E_r + \\ &\quad + ig E_{\varphi}), \\ ik_z E_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} &= \frac{i\omega}{c} B_{\varphi}, \quad ik_z B_r - \frac{\partial B_z}{\partial r} = \\ &= -\frac{i\omega}{c} (-ig E_r + \varepsilon_{\perp} E_{\varphi}), \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r E_{\varphi} - i \frac{l}{r} E_r &= \frac{i\omega}{c} E_z, \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r B_{\varphi} - i \frac{l}{r} B_r = \\ &= -\frac{i\omega}{c} \varepsilon_{\parallel} E_z.\end{aligned}\right\} \quad (48.13)$$

Эта система уравнений пригодна при любой степени неоднородности плазмы. Это означает, что она справедлива как в плазме ( $r \leq r_0$ ), так и в вакууме ( $r_0 \leq r \leq R$ ). Поэтому граничные условия можно получить непосредственно из этих уравнений путем их интегрирования по бесконечно тонкому переходному слою плазма — вакуум. В результате имеем

$$\{E_z\}_{r=r_0} = \{E_{\varphi}\}_{r=r_0} = \{B_z\}_{r=r_0} = \{B_{\varphi}\}_{r=r_0} = 0. \quad (48.14)$$

Наконец, на поверхности металлического волновода должны выполняться условия

$$E_z|_{r=R} = E_{\varphi}|_{r=R} = 0. \quad (48.15)$$

Система уравнений (48.13) с граничными условиями (48.14) и (48.15) полностью определяет спектр собственных электромагнитных колебаний в плазменном волноводе в пределе холодной плазмы, когда фазовые скорости волн намного превышают тепловые скорости частиц и последними можно полностью пренебречь; величины  $\varepsilon_{\perp}$ ,  $g$  и  $\varepsilon_{\parallel}$  при этом определяются выражениями (48.12).

Сформулированную граничную задачу проанализируем для чисто электронной плазмы, пренебрегая движением ионов. Кроме того, ограничимся двумя противоположными предельными случаями: а)  $r_0 = R$ , и плазма полностью заполняет волновод; б)  $R \rightarrow \infty$ , и имеем плазменный цилиндр со свободной поверхностью.

**I. Изотропная плазма.** Анализ задачи начнем с изотропной электронной плазмы, положив в формулах (48.12)  $\Omega_a \rightarrow 0$  (т. е.  $\mathbf{B}_0 \rightarrow 0$ ). Исключив из системы (48.13) компоненты  $E_r$ ,  $B_r$ ,  $E_\varphi$  и  $B_\varphi$  с помощью соотношений

$$\begin{aligned} E_r &= \kappa^{-2} \left( -ik_z \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega}{c} \cdot \frac{l}{r} B_z \right), \\ E_\varphi &= \kappa^{-2} \left( k_z \frac{l}{r} E_z + i \frac{\omega}{c} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial r} \right), \\ B_r &= -\kappa^{-2} \left( \frac{\omega}{c} \cdot \frac{l}{r} \varepsilon E_z + ik_z \frac{\partial B_z}{\partial r} \right), \\ B_\varphi &= \kappa^{-2} \left( -i \frac{\omega}{c} \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + k_z \frac{l}{r} B_z \right), \end{aligned} \quad (48.16)$$

где

$$\kappa^2 = k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon, \quad \varepsilon = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}, \quad (48.17)$$

для  $E_z$  и  $B_z$  получаем два независимых уравнения:

$$\varepsilon \left( \Delta E_z + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon E_z \right) = 0, \quad \Delta B_z + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon B_z = 0. \quad (48.18)$$

Колебания при  $B_z = 0$ ,  $E_z \neq 0$  называют волнами  $E$ -типа, а при  $B_z \neq 0$ ,  $E_z = 0$  — волнами  $B$ -типа.

Прежде всего отметим, что согласно первому уравнению (48.18) независимо от степени заполнения волновода плазмой в отсутствие внешнего магнитного поля всегда существуют чисто продольные (потенциальные) ленгмюровские колебания, для которых

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} = 0, \quad \omega^2 = \omega_{Le}^2. \quad (48.19)$$

Эти колебания являются объемными и локализованы внутри плазменного цилиндра.

Наряду с продольными колебаниями в изотропной плазме в области частот, где  $\varepsilon(\omega) \neq 0$ , могут существовать поперечные (непотенциальные) волны  $E$ - и  $B$ -типов. Согласно (48.18) для таких волн при  $r \ll r_0$  имеем

$$E_z(r) = E_{z0} J_l(ixr), \quad B_z = B_{z0} J_l(ixr). \quad (48.20)$$

Если плазма полностью заполняет волновод ( $r_0 = R$ ), то подстановка решений (48.20) в граничные условия (48.15) с учетом соотношений (48.16) приводит к следующим спектрам колебаний для волн

*E*- и *B*-типов соответственно:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= k_z^2 c^2 + \frac{\mu_{ln}^2 c^2}{R^2} + \omega_{Le}^2, \\ \omega^2 &= k_z^2 c^2 + \frac{\mu'_{ln}{}^2 c^2}{R^2} + \omega_{Le}^2,\end{aligned}\quad (48.21)$$

где  $\mu_{ln}$  и  $\mu'_{ln}$  — соответственно корни функции Бесселя и ее производной, т. е.  $J_l(\mu_{ln}) = 0$  и  $J'_l(\mu'_{ln}) = 0$ .

Из формул (48.19) и (48.21) следует, что фазовые скорости поперечных электромагнитных волн в волноводе, полностью заполненном изотропной плазмой, всегда больше скорости света, в то время как фазовые скорости продольных волн могут быть как больше, так и меньше скорости света.

Рассмотрим электромагнитные волны в плазменном цилиндре со свободной поверхностью. Решения уравнений (48.18), ограниченные на оси волновода и при  $r \rightarrow \infty$ , в этом случае записываются в виде

$$E_{zI} = E_{zI0} I_l(x_I r), \quad B_{zI} = B_{zI0} I_l(x_I r) \quad \text{при } r \leq r_0, \quad (48.22)$$

$$E_{zII} = E_{zII0} K_l(x_{II} r), \quad B_{zII} = B_{zII0} K_l(x_{II} r) \quad \text{при } r > r_0,$$

где

$$x_I^2 = k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon, \quad x_{II}^2 = k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \geq 0. \quad (48.23)$$

Подстановка этих решений в граничные условия (48.14) приводит к следующему дисперсионному уравнению для поверхностных электромагнитных волн в плазменном цилиндре со свободной поверхностью:

$$\begin{aligned}& \left[ \frac{1}{x_{II}} I_l(x_I r_0) K'_l(x_{II} r_0) - \frac{1}{x_I} I'_l(x_I r_0) K_l(x_{II} r_0) \right] \times \\ & \times \left[ \frac{1}{x_{II}} I_l(x_I r_0) K'_l(x_{II} r_0) - \frac{\epsilon}{x_I} I'_l(x_I r_0) K_l(x_{II} r_0) \right] - \\ & - \frac{c^2 k_z^2 l^2}{\omega^2 r_0^2} I_l^2(x_I r_0) K_l^2(x_{II} r_0) \left( \frac{1}{x_I^2} - \frac{1}{x_{II}^2} \right)^2 = 0.\end{aligned}\quad (48.24)$$

Здесь ограничимся анализом уравнения (48.24) только для симметричных мод с  $l = 0$ . В коротковолновом пределе, т. е. при  $x_{I,II}^2 r_0^2 \gg 1$ , из уравнения (48.24) получаем

$$\frac{1}{x_{II}} + \frac{\epsilon}{x_I} = 0, \quad (48.25)$$

или в явном виде

$$\sqrt{k_z^2 c^2 + \omega_{Le}^2 - \omega^2} + \left( 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \right) \sqrt{k_z^2 c^2 - \omega^2} = 0. \quad (48.26)$$

Как и следовало ожидать, это уравнение в точности совпадает с (46.29), полученным для полуограниченной плазмы; в коротковолновом пределе геометрия поверхности плазмы не играет роли. Из ус-

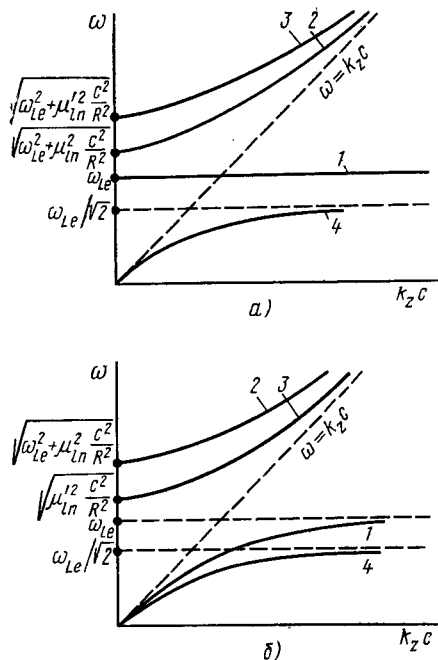


Рис. 42

большой степенью точности потенциальны и спектр их определяется соотношением

$$\omega^2 \approx k_z^2 c^2 \frac{\omega_{Le}^2 r_0^2}{2c^2} \ln \frac{1}{|k_z| r_0}. \quad (48.28)$$

В общем случае решение уравнения (48.27) графически представлено на рис. 42,а (кривая 4). Здесь же приведены спектры объемных волн, описываемые формулами (48.19) и (48.21) (кривые 1—3).

II. Замагниченная плазма. Исследуем электромагнитные волны в плазменном цилиндре при наличии внешнего продольного магнитного поля, причем для простоты ограничимся случаем бесконечно сильного поля, когда  $B_0 \rightarrow \infty$  и тензор (48.11) принимает вид

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}. \quad (48.29)$$

Из соотношений (48.13) при этом получаем:

ловий  $\chi_{1,II}^2 r_0^2 \gg 1$  при этом, однако, следует, что в плазменном цилиндре такие коротковолновые поверхностные колебания существуют только в случае достаточно плотной плазмы, когда  $\omega_{Le}^2 r_0^2 \gg c^2$  и  $k_z^2 r_0^2 \gg 1$ .

В редкой же плазме, в которой  $\omega_{Le}^2 r_0^2 \ll c^2$ , возможны только длинноволновые поверхностные колебания с  $\chi_{1,II}^2 r_0^2 \ll 1$ . Дисперсионное уравнение (48.24) для аксиально симметричных мод ( $l=0$ ) длинноволновых колебаний записывается в виде

$$\left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right) \ln r_0 \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} - \frac{2}{\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) r_0^2} = 0. \quad (48.27)$$

Видно, что длинноволновые колебания, так же как и коротковолновые, существуют только в области частот  $\omega < k_z c$ ,  $\omega_{Le}$ , причем при выполнении сильных неравенств колебания с

$$\begin{aligned}
 E_r &= \kappa^{-2} \left( i k_z \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega}{c} \cdot \frac{l}{r} B_z \right), \\
 E_\varphi &= \kappa^{-2} \left( k_z \frac{l}{r} E_z + i \frac{\omega}{c} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial r} \right), \\
 B_z &= -\kappa^{-2} \left( \frac{\omega}{c} \cdot \frac{l}{r} E_z + i k_z \frac{\partial B_z}{\partial r} \right), \\
 B_\varphi &= \kappa^{-2} \left( -i \frac{\omega}{c} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{l}{r} k_z B_z \right),
 \end{aligned} \tag{48.30}$$

где

$$\kappa^2 = k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \varepsilon = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}. \tag{48.31}$$

Компоненты же  $E_z$  и  $B_z$  удовлетворяют независимым уравнениям

$$\Delta_\perp E_z - \kappa^2 \varepsilon E_z = 0, \quad \Delta_\perp B_z + \frac{\omega^2}{c^2} B_z = 0, \tag{48.32}$$

где  $\Delta_\perp = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - l^2/r^2$ .

Здесь также различают волны  $E$ -типа ( $B_z = 0, E_z \neq 0$ ) и  $B$ -типа ( $B_z \neq 0, E_z = 0$ ).

Сравнивая уравнения (48.32) с (48.18), видим, что в пределе сильного магнитного поля не существует строго продольных колебаний, как это имело место в изотропной плазме [см. спектр (48.19)]. Более того, для волн  $B$ -типа плазма вообще не играет никакой роли и закон дисперсии для них такой же, как и для вакуумного волновода. Поэтому здесь рассмотрим только волны  $E$ -типа.

Решение первого уравнения (48.32) в области  $r \ll r_0$  запишем в виде

$$E_z = E_{z0} J_l(i \sqrt{\kappa^2 \varepsilon} r_0). \tag{48.33}$$

Если плазма полностью заполняет волновод ( $r_0 = R$ ), то подстановка этого решения в граничные условия (48.15) приводит к следующему дисперсионному уравнению для определения спектра объемных волн  $E$ -типа:

$$\left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \varepsilon + \frac{\mu_{ln}^2}{R^2} = 0, \tag{48.34}$$

где  $\mu_{ln}$  — корни функции Бесселя, т. е.  $J_l(\mu_{ln}) = 0$ .

Отсюда находим спектр частот колебаний

$$\begin{aligned}
 \omega_{1,2}^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \omega_{Le}^2 + \left( k_z^2 + \frac{\mu_{ln}^2}{R^2} \right) c^2 \pm \right. \\
 &\left. \pm \left[ \left( \omega_{Le}^2 + k_z^2 c^2 + \frac{\mu_{ln}^2 c^2}{R^2} \right)^2 + 4k_z^2 c^2 \omega_{Le}^2 \right]^{1/2} \right\}. \tag{48.35}
 \end{aligned}$$

Видно, что в магнитоактивной плазме в отличие от изотропной существуют две ветви объемных волн  $E$ -типа: верхняя высокочастот-

ная и нижняя низкочастотная, причем на верхней ветви фазовая скорость волн всегда больше скорости света, колебания поперечны с большой степенью точности; на нижней же ветви  $v_{\phi} = \omega/k_z < c$ , и поле волн содержит также значительную продольную компоненту.

В плазменном цилиндре со свободной поверхностью ( $R \rightarrow \infty$ ) в сильном магнитном поле наряду с объемными волнами возможны также поверхностные волны, убывающие вне плазменного цилиндра. Действительно, запишем решения уравнения (48.32) для симметричных мод ( $s \ l = 0$ ) поверхностной волны  $E$ -типа:

$$\left. \begin{aligned} E_{zI} &= E_{zI0} I_0(\sqrt{x^2 \epsilon} r) & \text{при } r \leq r_0, \\ E_{zII} &= E_{zII0} K_0(xr) & \text{при } r > r_0, \end{aligned} \right\} \quad (48.36)$$

где  $x^2 = (k_z^2 - \omega^2/c^2) > 0$  (т. е.  $\omega < k_z c$ ).

Подставляя эти решения в граничные условия (48.14), получаем

$$I_0(x\sqrt{\epsilon}r_0)K_0'(xr_0) - \sqrt{\epsilon}I_0'(x\sqrt{\epsilon}r_0)K_0(xr_0) = 0. \quad (48.37)$$

Легко показать, что в коротковолновом пределе  $x^2 r_0^2 \gg 1$  это уравнение не имеет решений, т. е. коротковолновые поверхностные колебания в плазменном цилиндре в сильном магнитном поле существовать не могут. В длинноволновом же пределе  $x^2 r_0^2 \ll 1$ ,  $x^2 \epsilon r_0^2 \ll 1$  из уравнения (48.37) получаем

$$\epsilon \ln x r_0 - \frac{2}{x^2 r_0^2} = 0. \quad (48.38)$$

Это уравнение в точности совпадает с (48.27). Поэтому проведенный анализ для изотропной плазмы сохраняет силу и в случае плазменного цилиндра со свободной поверхностью в сильном магнитном поле. Единственное отличие состоит в том, что в изотропной плазме поле  $E_z$  слабо затухает от поверхности цилиндра к его оси, в то время как в магнитоактивной плазме оно слабо нарастает, достигая максимума на оси волновода.

Спектры объемных и поверхностных волн плазменного цилиндра в сильном магнитном поле представлены на рис. 42, б.

В заключение еще раз подчеркнем, что полученные в этом параграфе соотношения справедливы как для невырожденной, так и для вырожденной плазмы, поскольку в рассматриваемых условиях больших (по сравнению с тепловыми скоростями) фазовых скоростей волн вид равновесной функции распределения несуществен.

## Задачи к главе IX

**Задача 1.** Найти частоту собственных электростатических (потенциальных) колебаний плоского слоя холодной электронной плазмы толщиной  $2d$ , помещенной между обкладками плоского конденсатора (рис. 43). Электрическое поле колебаний считать нормальным к поверхности слоя.

**Решение.** Уравнение поля во всех трех областях имеет один и тот же вид:

$$\Delta \Phi = \partial^2 \Phi / \partial x^2 = 0, \quad (1)$$



поэтому его решения запишем таким образом:

$$\Phi(x) = \begin{cases} a_1 x + a_2 & \text{при } -L < x < -d, \\ b_1 x + b_2 & \text{при } |x| \leq d, \\ c_1 x + c_2 & \text{при } d < x < L. \end{cases} \quad (2)$$

Подстановка этих решений в граничные условия

$$\begin{aligned} \Phi(-L) &= \Phi(+L) = 0, \\ \{\Phi\}_{x=-d} &= \{\Phi\}_{x=d} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\left\{ \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\}_{x=-d} = \left\{ \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\}_{x=d} = 0,$$

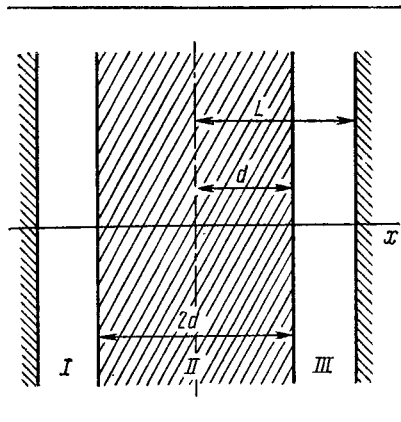


Рис. 43

где  $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{Le}^2(x)}{\omega^2}$ , причем  $\omega_{Le}^2(x) \neq 0$  только при  $|x| \leq d$ , приводит к дисперсионному соотношению

$$\varepsilon + \frac{d}{L-d} = 0. \quad (4)$$

Отсюда находим спектр частот колебаний

$$\omega^2 = \frac{L-d}{L} \omega_{Le}^2 \leq \omega_{Le}^2. \quad (5)$$

**Задача 2.** Найти проникновение квазистатического монохроматического поля с частотой  $\omega$  в полуограниченную изотропную плазму. Отражение частиц от поверхности плазмы принять зеркальным.

**Решение.** Считая поле нормальным к поверхности плазмы для области  $x \geq 0$  (в плазме) можно записать

$$\frac{\partial D(x)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

или

$$D(x) = E_0, \quad (2)$$

где  $E_0$  — напряженность электрического поля на поверхности плазмы.

С другой стороны,  $D(x)$  можно определить, продолжив  $D(x)$  в область  $x < 0$  четным образом и произведя преобразование Фурье:

$$D(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(x) e^{-ikx} dx, \quad D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} D(k) e^{ikx} dk. \quad (3)$$

В результате из (2) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(k) e^{ikx} dk = \frac{E_0}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k} dk \quad (4)$$

Отсюда, учитывая, что при зеркальном отражении частиц от поверхности плазмы для продольного поля

$$D(k) = \varepsilon^l(\omega, k)E(k), \quad (5)$$

получаем

$$E(k) = \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{E_0}{k \varepsilon^l(\omega, k)}, \quad (6)$$

или, подставляя это выражение в (3),

$$E(x) = \frac{E_0}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} dk}{k \varepsilon^l(\omega, k)}. \quad (7)$$

Эта формула определяет проникновение квазистатического поля в полуограниченную изотропную плазму нормально к ее поверхности.

Интеграл (7) существенно определяется полюсами подынтегральной функции  $k = 0$ ,  $\varepsilon^l(\omega, k) = 0$ . (8)

На больших расстояниях от поверхности плазмы  $x \gg \frac{v_{0e}}{|\omega + i\nu_e|}$ , где  $v_{0e}$  — скорость хаотического движения электронов, вклад в интеграл (7) дает только первый из этих полюсов. При этом

$$E(x) = \frac{E_0}{\varepsilon^l(\omega, 0)} = \frac{E_0}{1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega + i\nu_e)}}. \quad (9)$$

На малых же расстояниях от поверхности плазмы  $x \ll \frac{v_{0e}}{|\omega + i\nu_e|}$  существенными становятся также полюсы, определяемые нулями диэлектрической проницаемости  $\varepsilon^l(\omega, k)$ . Для чисто электронной плазмы ( $\omega^2 \gg \omega_{Li}^2$ ) при условии  $|\omega + i\nu_e| \ll \omega_{Le}$  эти полюсы находятся из уравнения

$$1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \left( 1 + i\alpha \frac{\omega}{|k| v_{0e}} \right) = 0, \quad (10)$$

где  $\alpha = \sqrt{\pi/2}$ ,  $r_{De}^2 = v_{Te}^2 / \omega_{Le}^2$  — для невырожденной электронной плазмы и  $\alpha = \pi/2$ ,  $r_{De}^2 = v_{Fe}^2 / 3\omega_{Le}^2$  — для вырожденной плазмы. В результате имеем

$$E(x) = E_0 e^{-x/r_{De}} \left( 1 + i \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\omega x}{v_{0e}} \right). \quad (11)$$

Часто вводят понятие импеданса слоя  $d$  плазмы

$$Z = \frac{\int_0^d E(x) dx}{\frac{1}{4\pi i} \omega E_0}. \quad (12)$$

В числителе фигурирует падение напряжения на слое  $d$ , а в знаменателе — ток, проходящий через этот слой. Величина  $\text{Re } Z$  характеризует поглощение поля в слое  $d$ .

На больших расстояниях от поверхности плазмы импеданс характеризует объемное поглощение, причем согласно (9)

$$Z_{об} = \frac{4\pi i (\omega + i\nu_e)}{\omega (\omega + i\nu_e) - \omega_{Le}^2} d. \quad (13)$$

На малых расстояниях можно ввести понятие **поверхностного импеданса**, используя (11):

$$Z_{пов} = \frac{4\pi i}{\omega} \int_0^{\infty} dx e^{-x/r_{De}} \left( 1 + i \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\omega x}{v_{0e}} \right) = \frac{4\pi i}{\omega} r_{De} \left( 1 + i \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\omega r_{De}}{v_{0e}} \right). \quad (14)$$

**Задача 3.** Найти столкновительную поправку к декременту затухания высокочастотных поверхностных волн в электронной плазме.

**Решение.** При учете столкновений электронов независимо от степени вырождения плазмы в дисперсионном уравнении (46.26) следует положить

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega (\omega + i\nu_e)} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left( 1 - i \frac{\nu_e}{\omega} \right), \quad (1)$$

где  $\nu_e = \nu_{ei}$  — для полностью ионизованной плазмы и  $\nu_e = \nu_{en}$  — для слабоионизованной плазмы. В результате из (46.26) получаем ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta_{ст}$ ):

$$\omega^2 \approx \begin{cases} k_z^2 c^2 & \text{при } k_z^2 c^2 \ll \omega_{Le}^2, \\ \omega_{Le}^2/2 & \text{при } k_z^2 c^2 \gg \omega_{Le}^2, \end{cases} \quad (2)$$

$$\delta_{ст} = -\frac{\nu_e}{2} \begin{cases} k_z^2 c^2 / \omega_{Le}^2 & \text{при } k_z^2 c^2 \ll \omega_{Le}^2, \\ 1 & \text{при } k_z^2 c^2 \gg \omega_{Le}^2. \end{cases} \quad (3)$$

Предел  $k_z^2 c^2 \gg \omega_{Le}^2$  соответствует продольным колебаниям, поэтому  $\delta_{ст}$  в этом пределе можно получить также из уравнения (46.31) при использовании выражения (1). Заметим, что такая же поправка от столкновений электронов возникает в формулах (46.34) и (46.36).

**Задача 4.** Исходя из общего выражения (46.24) вычислить поверхностный импеданс при нормальном падении электромагнитной волны на поверхность полуграниченной плазмы при  $\nu_e, \omega \ll \omega_{Le}$  и связать его с коэффициентами отражения и поглощения волны.

**Решение.** При нормальном падении волны  $k_z = 0$  и

$$Z_{пл} = i 8 \omega \int_0^{\infty} \frac{dk}{k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^{tr}(\omega, k)}. \quad (1)$$

Проникновение поля в плазму при этом определяется формулой

$$E_z(x) = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{B_y(0) \omega}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} dk}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, k)}. \quad (2)$$

На больших расстояниях от поверхности плазмы  $x \gg \frac{v_{Te}}{|\omega + i\nu_e|}$  простран-

ственной дисперсией в  $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$  можно пренебречь, записав

$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) \rightarrow \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega + i\nu_e)}. \quad (3)$$

В этом случае

$$E_z(x) \approx - \frac{B_y(0)}{4\sqrt{\varepsilon(\omega)}} e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} x} \equiv - \frac{B_y(0)}{4\sqrt{\varepsilon(\omega)}} e^{-x/\lambda_{CK}}. \quad (4)$$

Отсюда, в частности, видно, что при  $\omega_{Le} \gg \omega \gg \nu_e$  поле в плазме затухает по экспоненциальному закону, причем длина затухания (глубина проникновения)

$$\lambda_{CK} = i \frac{c}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}} \approx \frac{c}{\omega_{Le}}. \quad (5)$$

Если  $\omega < \nu_e$ , то следует ввести комплексную длину затухания

$$\lambda_{CK} = i \frac{c}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}} = \frac{(i+1)c}{\sqrt{2\omega_{Le}^2 \omega / \nu_e}} = \frac{(i+1)c}{\sqrt{8\pi\sigma\omega}}, \quad (6)$$

где  $\sigma = \omega_{Le}^2 / 4\pi\nu_e$  — статическая проводимость плазмы.

Отметим, что при подстановке (3) в (2) получаем для холодной плазмы соотношение

$$Z_{Пл} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \lambda_{CK} = - \frac{4\pi}{\sqrt{\varepsilon(\omega)} c}. \quad (7)$$

Наконец, при нормальном падении электромагнитной волны на поверхность полуграниченной плазмы с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(\omega)$  коэффициент отражения определяется модулем комплексной величины

$$r = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon(\omega)}}{1 + \sqrt{\varepsilon(\omega)}} = - \frac{1 + \frac{c}{4\pi} Z_{Пл}(\omega)}{1 - \frac{c}{4\pi} Z_{Пл}(\omega)}. \quad (8)$$

На малых же расстояниях от поверхности плазмы  $x \ll \nu_{Te} / |\omega + i\nu_e|$  при вычислении интеграла (2) существенным становится учет сильной пространственной дисперсии  $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$ . При этом

$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) = 1 + i\alpha \frac{\omega_{Le}^2}{\omega |k| \nu_{Te}}, \quad (9)$$

где  $\alpha = \sqrt{\pi/2}$  — для невырожденной плазмы и  $\alpha = 3\pi/4$  — для вырожденной плазмы. Подстановка (9) в (2) и (1) дает экспоненциальный спад поля в глубь плазмы, причем

$$E_z(x) \approx e^{-x/\lambda_{CK}},$$

$$\lambda_{CK} = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{i}{\sqrt{3}} \right) \left( \frac{c^2 \nu_{Te}}{\alpha \omega \omega_{Le}^2} \right)^{1/3}, \quad (10)$$

$$Z_{Пл} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \lambda_{CK}, \quad r = - \frac{1 + \frac{c}{4\pi} Z_{Пл}}{1 - \frac{c}{4\pi} Z_{Пл}}.$$

**Задача 5.** Исследовать возбуждение высокочастотных волн в полуограниченной изотропной плазме моноэнергетическим нерелятивистским электронным пучком, пролетающим над ее поверхностью.

**Решение.** Для решения задачи достаточно ограничиться анализом продольных (потенциальных) волн в модели независимых частиц, поскольку возбужденные нерелятивистским пучком волны обладают нерелятивистскими фазовыми скоростями. Из линеаризованной системы уравнений этой модели

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial t} + \operatorname{div} (N_1 \mathbf{V}_0 + N_0 \mathbf{V}_1) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial t} + (\mathbf{V}_1 \nabla) \mathbf{V}_0 + (\mathbf{V}_0 \nabla) \mathbf{V}_1 &= -\frac{e}{m} \nabla \Phi - \nu_e \mathbf{V}_1, \\ \Delta \Phi &= -4\pi e N_1, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $N_0, \mathbf{V}_0$  — невозмущенные плотности и скорости электронов, а  $N_1, \mathbf{V}_1$  — их малые возмущения, получаем

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} - k_z^2 \varepsilon \right) \Phi = 0. \quad (2)$$

Здесь

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\omega - k_z V_0)(\omega - k_z V_0 - i\nu_e)}. \quad (3)$$

Уравнение (2) пригодно как в области плазмы ( $x \gg 0$ ), так и в области пучка ( $x < 0$ ). В плазме  $\omega_{Le}$  — ленгмюровская частота электронов плазмы,  $\nu_e$  — их частота столкновений, и  $V_0 = 0$ ; в пучке  $\omega_{Le} = \omega_b$  — ленгмюровская частота движущихся со скоростью  $V_0$  электронов пучка, которые можно считать бесстолкновительными.

Граничные условия к (2) имеют вид

$$\{\Phi\}_{x=0} = \left\{ \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\}_{x=0} = 0. \quad (4)$$

Подстановка решения уравнения (2)

$$\Phi = \begin{cases} C_1 e^{-|k_z| x} & \text{при } x > 0, \\ C_2 e^{|k_z| x} & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

в граничные условия (4) приводит к искомому дисперсионному уравнению

$$2 - \frac{\omega_b^2}{(\omega - k_z V_0)} - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega + i\nu_e)} = 0. \quad (6)$$

Отсюда находим спектр частот и инкремент нарастания ( $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ ) возбуждаемых поверхностных волн в плазме при  $\omega_{Le} \gg \nu_e$ :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\omega_{Le}}{\sqrt{2}} \approx k_z V_0, \\ \delta &= \begin{cases} \left( \frac{N_b}{2N_0} \right)^{1/3} \frac{(i + \sqrt{3})}{2} \omega & \text{при } \delta > \nu_e, \\ \left( \frac{N_b}{2N_0} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{\omega}{\nu_e}} (1 + i) \omega & \text{при } \delta < \nu_e. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Верхнее выражение для  $\delta$  соответствует недиссипативной неустойчивости, а нижнее — диссипативной. Последняя возможна в плазме с частыми столкновениями частиц, в частности, в плазме твердого тела.

**Задача 6.** Показать, что поверхность плазмы, удерживаемой магнитным полем с положительной кривизной силовых линий (т. е. с внешней нормалью, направленной от поверхности плазмы), неустойчива по отношению к низкочастотным желобковым возмущениям.

**Решение.** Кривизну силовых линий магнитного поля будем учитывать введением центробежного ускорения для частиц сорта  $\alpha$ , равного  $v_{T\alpha}^2/R$ , где  $R$  — радиус кривизны силовых линий магнитного поля, и направленного вдоль внешней нормали к поверхности плазмы. Это приводит к дрейфу частиц вдоль поверхности плазмы (ось  $Oy$ ) со скоростью  $u_\alpha = -\frac{v_{T\alpha}^2}{R\Omega_\alpha}$ . В результате в дисперсионном уравнении (47.15) величина  $\omega$  заменяется на  $\omega - k_y u_\alpha$  и для желобковых мод колебаний в области низких частот  $\omega - k_y u_\alpha \ll \Omega_\alpha$  получаем

$$\left(2 + \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2}\right) + |k_y| \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2} \frac{(v_s^2 + v_{Ti}^2)}{R \omega^2} = 0, \quad (1)$$

где  $v_s^2 = T_e/M$  — скорость ионного звука.

Отсюда

$$\omega^2 = -\frac{|k_y| g_{\text{эфф}}}{1 + 2v_A^2/c^2}. \quad (2)$$

Здесь  $g_{\text{эфф}} = \frac{v_s^2 + v_{Ti}^2}{R}$  — эффективное гравитационное поле, учитывающее кривиз-

ну силовых линий удерживающего плазму магнитного поля.

Поскольку  $\omega^2 < 0$ , заключаем, что поверхность плазмы, удерживаемой магнитным полем с положительной кривизной силовых линий, всегда неустойчива. Неустойчивость эта аналогична конвективной (желобковой) неустойчивости объемных волн в неоднородной замагниченной плазме (см. § 45).

**Задача 7.** Исходя из модели независимых частиц получить оператор тензора диэлектрической проницаемости цилиндрически неоднородной многокомпонентной многопотоковой плазмы.

**Решение.** Линеаризуем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \text{div } N_\alpha \mathbf{V}_\alpha = 0, \\ & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\alpha \nabla \right) \frac{\mathbf{V}_\alpha}{\sqrt{1 - v_\alpha^2/c^2}} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_\alpha \mathbf{B}] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

относительно равновесного состояния с направленной скоростью частиц  $\mathbf{u}_\alpha(r) \parallel Oz$ ,  $\mathbf{B}_0 \parallel Oz$  и  $N_{0\alpha}(r)$  и учетом уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \sum_\alpha (e_\alpha N_\alpha \mathbf{V}_\alpha - e_\alpha N_{0\alpha} \mathbf{u}_\alpha), \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi \sum_\alpha (e_\alpha N_\alpha - e_\alpha N_{0\alpha}). \end{aligned} \quad (2)$$

Для возмущений, зависящих от времени и координат в виде

$$A = A(r) \exp(-i\omega t + il\varphi + ik_z z),$$

получим

$$\text{rot rot } \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D} = 0, \quad D_i = \overset{\wedge}{\varepsilon}_{ij} E_j, \quad (3)$$

где  $\overset{\wedge}{\varepsilon}_{ij}$  — оператор тензора диэлектрической проницаемости с компонентами:

$$\begin{aligned} \overset{\wedge}{\varepsilon}_{rr} &= \overset{\wedge}{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = 1 - \sum_a \frac{\omega_{L\alpha}^2 \omega_\alpha'^2 \gamma_\alpha^{-1}}{\omega^2 (\omega_\alpha'^2 - \Omega_\alpha^2)}, \\ \overset{\wedge}{\varepsilon}_{r\varphi} &= -\overset{\wedge}{\varepsilon}_{\varphi r} = -i \sum_a \frac{\omega_{L\alpha}^2 \omega_\alpha' \Omega_\alpha \gamma_\alpha^{-1}}{\omega^2 (\omega_\alpha'^2 - \Omega_\alpha^2)}, \\ \overset{\wedge}{\varepsilon}_{rz} &= \sum_a \alpha_{rz} \left( -\frac{l}{r} \cdot \frac{\Omega_\alpha}{\omega_\alpha'} + \frac{\partial}{\partial r} \right), \\ \overset{\wedge}{\varepsilon}_{zr} &= \sum_a \left( \frac{l}{r} \cdot \frac{\Omega_\alpha}{\omega_\alpha'} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \right) \alpha_{rz}, \\ \overset{\wedge}{\varepsilon}_{\varphi z} &= i \sum_a \alpha_{rz} \left( \frac{l}{r} - \frac{\Omega_\alpha}{\omega_\alpha'} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right), \\ \overset{\wedge}{\varepsilon}_{z\varphi} &= i \sum_a \left( \frac{l}{r} + \frac{\Omega_\alpha}{\omega_\alpha'} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \right) \alpha_{rz}, \\ \overset{\wedge}{\varepsilon}_{zz} &= 1 - \sum_a \left[ \frac{\omega_{L\alpha}^2 \gamma_\alpha^{-1}}{\omega_\alpha'^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \alpha_{zz} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l^2}{r^2} \alpha_{zz} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l}{r} \cdot \frac{\Omega_\alpha}{\omega_\alpha'} \left( \frac{\partial}{\partial r} \alpha_{zz} - \alpha_{zz} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_{rz} &= \frac{i u_\alpha \omega_{L\alpha}^2 \omega_\alpha'}{\omega^2 (\omega_\alpha'^2 - \Omega_\alpha^2)}, \quad \alpha_{zz} = \frac{u_\alpha^2 \omega_{L\alpha}^2 \gamma_\alpha}{\omega^2 (\omega_\alpha'^2 - \Omega_\alpha^2)}, \\ \gamma_\alpha &= \left( 1 - \frac{u_\alpha^2}{c^2} \right)^{-1/2}, \quad \omega_{L\alpha}^2 = \frac{4\pi e^2 N_{0\alpha}}{m_\alpha}, \\ \Omega_\alpha &= \frac{e_\alpha B_0}{m_\alpha c}, \quad \omega_\alpha = (\omega - \mathbf{k} \mathbf{u}_\alpha) \gamma_\alpha. \end{aligned}$$

Оператор  $\partial/\partial r$  действует на все стоящие справа от него величины.

**Задача 8.** Найти критический ток релятивистского электронного пучка в цилиндрическом дрейфовом пространстве, заполненном компенсирующими заряд электронами ионами. На систему наложено сильное внешнее продольное магнитное поле, удовлетворяющее условиям  $\Omega_e^2 \gg \omega_{Le}^2 \gamma$ ,  $\omega_L \gg \Omega_i$  (т. е. электроны пучка сильно замагничены, а ионы нет),  $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ , где  $u$  — токовая скорость электронов пучка.

**Решение.** Критический ток определяют из условия возникновения в системе низкочастотных  $\omega \ll k_z u \ll \Omega_e \gamma^{-1}$  электрических возмущений  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ . Из уравнений (3) предыдущей задачи для таких возмущений полу-

чаем

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \varepsilon_{\perp} r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \left( \frac{l}{r} \cdot \frac{\partial g}{\partial r} - \varepsilon_{\perp} \frac{l^2}{r^2} - \varepsilon_{\parallel} k_z^2 \right) \Phi = 0, \quad (1)$$

где

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}, \quad g = - \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e (\omega - k_z u)}, \quad \varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}. \quad (2)$$

В случае, когда электронный пучок полностью заполняет цилиндрический волновод, причем его параметры однородны в сечении, решение уравнения (1) можно записать в виде

$$\Phi = C J_l \left( \sqrt{k_z^2 \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} r \right). \quad (3)$$

Подстановка этого решения в граничное условие на поверхности металлического волновода

$$\Phi(R) = 0 \quad (4)$$

приводит к дисперсионному уравнению

$$k_z^2 \left( 1 - \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \right) + \frac{\mu_{ln}^2}{R^2} \left( 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \right) = 0. \quad (5)$$

где  $\mu_{ln}$  — корни функции Бесселя,  $J_l(\mu_{ln}) = 0$ .

Из уравнения (5) находим условие возникновения в системе электростатической неустойчивости (см. § 36):

$$\omega_{Le}^2 \gamma^{-3} > \min \left( k_z^2 + \frac{\mu_{ln}^2}{R^2} \right) u^2. \quad (6)$$

Для критического тока компенсированного пучка отсюда получаем

$$I_{кр} = \pi R^2 e N_0 e u = \frac{m u^3 \gamma^3 (2,4)^2}{4e} = 24 \frac{u^3}{c^3} \gamma^3 \text{ кА}. \quad (7)$$

Этот ток при  $\gamma \gg 1$  в  $\gamma^2$  раз превышает предельное значение тока некомпенсированного пучка в цилиндрическом дрейфовом пространстве  $I_{пр} = 17\gamma$  кА.

**Задача 9.** Исследовать возбуждение высокочастотных волн в плазме моноэнергетическим релятивистским электронным пучком, полностью заполняющим металлический волновод с бесконечно сильным продольным магнитным полем.

**Решение.** Будем исходить из уравнений (3) задачи 7, учитывая, что при  $B_0 \rightarrow \infty$  в системе плазма — пучок

$$\overset{\wedge}{\varepsilon}_{rr} = \overset{\wedge}{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = 1, \quad \overset{\wedge}{\varepsilon}_{r\varphi} = \overset{\wedge}{\varepsilon}_{\varphi r} = \overset{\wedge}{\varepsilon}_{rz} = \overset{\wedge}{\varepsilon}_{zr} = \overset{\wedge}{\varepsilon}_{\varphi z} = \overset{\wedge}{\varepsilon}_{z\varphi} = 0, \quad (1)$$

$$\overset{\wedge}{\varepsilon}_{zz} = 1 - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2},$$

где  $\omega_b$  — ленгмюровская частота электронов пучка плотностью  $N_b$ ;  $\omega_{Le}$  — ленгмюровская частота электронов плазмы плотностью  $N_0$ ;  $u$  — скорость пучка;  $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ .

Уравнения Максвелла (3) задачи 7 при этом легко сводятся к одному уравнению для компоненты  $E_z$

$$\left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l^2}{r^2} \right) E_z - \left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \overset{\wedge}{\varepsilon}_{zz} E_z = 0. \quad (2)$$



Подставляя общее решение этого уравнения

$$E_z = E_{z1} J_1 \left( i \sqrt{\left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \varepsilon_{zz} r} \right) \quad (3)$$

в граничное условие на поверхности металлического волновода

$$E_z(R) = 0, \quad (4)$$

получаем дисперсионное уравнение

$$\left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \right) + \frac{\mu_{In}^2}{R^2} = 0. \quad (5)$$

Здесь  $\mu_{In}$  — корни функции Бесселя,  $J_1(\mu_{In}) = 0$ .

Неустойчивые решения уравнения (5) записываются в виде

$$\omega = k_z u + i\delta = \sqrt{\omega_{Le}^2 - \frac{\mu_{In}^2 u^2}{R^2} \gamma^2 + i\delta}, \quad (6)$$

$$\delta = \frac{i + \sqrt{3}}{2} \left( \frac{N_b}{2N_0} \right)^{1/3} \frac{1}{\gamma} \left[ 1 + \frac{\mu_{In}^2 u^2 \gamma^2 (\gamma^2 - 1)}{\omega_{Le}^2} \right]^{-1/3}.$$

Из соотношений (6) следует, что возбуждение волн возможно только при условии

$$\omega_{Le}^2 > \frac{\mu_{In}^2 u^2}{R^2} \gamma^2. \quad (7)$$

В частности, отсюда следует, что в плазме плотностью

$$\frac{(3,8)^2 u^2 \gamma^2}{R^2} > \omega_{Le}^2 > \frac{(2,4)^2 u^2 \gamma^2}{R^2} \quad (8)$$

происходит возбуждение лишь основной аксиально симметричной моды колебаний.

**Задача 10.** Показать, что плоский слой нерелятивистского электронного пучка, ограниченный проводящими плоскостями  $-a \leq x \leq a$ , с линейным поперечным профилем скорости  $u(x) = u_0 x/a_0$ ,  $a_0 > a$ , во внешнем продольном магнитном поле может быть неустойчив, и найти условие возникновения неустойчивости (slipping-неустойчивость).

**Решение.** Следуя методу, изложенному в § 47, для функции распределения  $F_{0\alpha}(\mathbf{v}-\mathbf{u})$  в виде функции распределения Максвелла с неоднородной направленной скоростью  $u(x)$  вместо уравнения (47.8) получаем

$$\Delta\Phi = \frac{\omega_{Le}^2}{v_{Te}^2} \int dk_x \Phi(k_x) e^{ik_x x} \left\{ 1 - \sum_s \left[ \omega - k_z u(x) - \frac{k_y v_{Te}^2}{\Omega_e} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left( 1 - \frac{s}{z} \cdot \frac{\omega - k_z u}{\Omega_e} \right) - \frac{ik_x v_{Te}^2}{\Omega_e^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\partial}{\partial u} (\omega - k_z u) \frac{A'_n(z)}{A_n(z)} \right] \frac{A_n(z)}{\omega - k_z u(x) - s\Omega_e} J_+ \left( \frac{\omega - k_z u(x) - s\Omega_e}{|k_z| v_{Te}} \right) \right\}, \quad (1)$$

где  $z = (k_x^2 + k_y^2) v_{Te}^2 / \Omega_e^2$ , а оператор  $\partial/\partial u$  действует на все стоящие справа от него величины, зависящие от  $u$ .

Будем интересоваться высокочастотными неустойчивыми колебаниями с фазовыми скоростями, большими тепловых скоростей электронов. Поэтому в (1) перейдем к пределу  $T \rightarrow 0$ . В результате получаем

$$\Delta\Phi + \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2 - \omega'^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y^2 \right) \Phi + \frac{\omega_{Le}^2 k_z^2}{\omega'^2} \Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2 - \omega'^2} - k_y \Phi \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\omega_{Le}^2 \Omega_e}{\omega' (\Omega_e^2 - \omega'^2)} = 0, \quad (2)$$

где  $\omega' = \omega - k_z u(x)$ .

При выводе этого уравнения из (1) существенно предполагалось, что

$$\beta = \frac{\omega - k_z u(x) - s\Omega_e}{|k_z| v_{Te}} \gg 1,$$

причем  $\arg \beta$  лежит вне сектора

$$-\frac{3\pi}{4} \leq \arg \beta \leq -\frac{\pi}{4}.$$

Только в этих условиях справедлива модель независимых частиц для рассматриваемой задачи, приводящая к уравнению (2).

Рассмотрим сначала предел сильного поля  $\Omega_e \gg \omega_{Le}$ . Считая также  $\omega' \ll \Omega_e$ , из (2) получаем

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + U(x, \omega) \Phi = 0, \quad (3)$$

$$U(x, \omega) = -k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega_{Le}^2 a_0^2}{\left(x - \frac{\omega a_0}{k_z u_0}\right)^2 u_0^2} \left(1 - \frac{k_y u_0}{k_z \Omega_e a_0}\right).$$

Это уравнение должно быть дополнено граничными условиями на проводящих плоскостях

$$\Phi \Big|_{x=\pm a} = 0. \quad (4)$$

Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\Phi(x) = \sqrt{s} [C_1 J_\nu(iks) + C_2 J_{-\nu}(iks)], \quad (5)$$

где

$$k = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}, \quad s = x - \frac{\omega a_0}{k_z u_0}, \quad (6)$$

$$\nu^2 = \frac{1}{4} - \frac{\omega_{Le}^2 a_0^2}{u_0^2} \left(1 - \frac{k_y u_0}{k_z \Omega_e a_0}\right).$$

Ограничения на  $\arg \beta$  приводят к тому, что найденное решение имеет смысл только вне сектора

$$\frac{\pi}{4} \leq \arg s \leq \frac{3\pi}{4}.$$

Подстановка (5) в (4) приводит к дисперсионному уравнению

$$J_{\nu}(iks_{-})J_{-\nu}(iks_{+}) - J_{-\nu}(iks_{-})J_{\nu}(iks_{+}) = 0, \quad s_{\pm} = \pm a - \frac{\omega a_0}{k_z u_0}. \quad (7)$$

Появление неустойчивых колебаний в первую очередь следует ожидать в длинноволновом пределе  $ks_{\pm} \rightarrow 0$ . Уравнение (7) в этом пределе сводится к виду

$$s_{+}^{2\nu} - s_{-}^{2\nu} = 0. \quad (8)$$

Отсюда следует, что  $\text{Re } \omega = 0$ , а

$$\arg s_{+} - \arg s_{-} = \frac{\pi n}{\nu}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (9)$$

где

$$\arg s_{\pm} = \mp \arctg \frac{a_0 \text{Im } \omega}{a k_z u_0} - \pi \times \begin{cases} 0, \\ 1. \end{cases} \quad (10)$$

Неустойчивым колебаниям соответствуют углы  $\arg s_{\pm}$ , лежащие в третьей и четвертой четвертях комплексного переменного  $s$ , т. е.

$$\arg s_{+} - \arg s_{-} < \pi, \quad (11)$$

что согласно (9) возможно только при условии

$$\nu^2 > n^2. \quad (12)$$

Таким образом, условие возникновения slipping-неустойчивости в плоско-параллельном электронном пучке в продольном магнитном поле записывается в виде

$$\nu^2 = \frac{1}{4} - \frac{\omega_{Le}^2 a_0^2}{u_0^2} \left( 1 - \frac{k_y u_0}{k_z \Omega_e a_0} \right) > n^2. \quad (13)$$

При  $n \gg 1$  условие (13) соответствует возбуждению высоких мод колебаний, описываемых в рамках приближения геометрической оптики, и принимает вид

$$\frac{k_y u_0}{k_z \Omega_e a} = \frac{k_y}{k_z} \cdot \frac{1}{\Omega_e} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} > 1. \quad (14)$$

Из (11) находим инкремент нарастания slipping-неустойчивости

$$\delta = \text{Im } \omega = k_z u_0 \frac{a}{a_0} \left( \text{ctg } \frac{\pi n}{\nu} + \frac{1}{\left| \sin \frac{\pi n}{\nu} \right|} \right) \approx k_z a \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (15)$$

Наконец, заметим, что в отсутствие внешнего магнитного поля при условии  $\omega' \ll \omega_{Le}$  уравнение (2) сводится к виду

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y^2 \right) \Phi + \frac{2}{\frac{\omega a_0}{k_z u_0} - x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0. \quad (16)$$

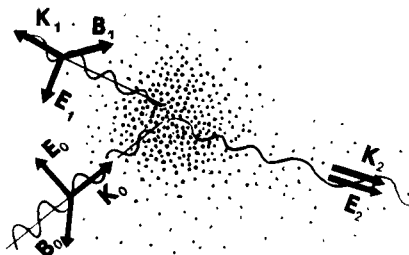
Общее решение этого уравнения

$$\Phi = s^{3/2} [C_1 J_{3/2}(iks) + C_2 J_{-3/2}(iks)], \quad (17)$$

как легко видеть, всегда удовлетворяет условию (12) при  $n = 1$ .

Таким образом, электронный пучок с неоднородным профилем скорости в отсутствие внешнего магнитного поля всегда неустойчив, причем в нем возбуждается основная мода колебаний, для описания которой приближение геометрической оптики неприменимо.

# ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ПЛАЗМЫ



## Глава X

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ В ПЛАЗМЕ И РАССЕЯНИЕ ВОЛН

#### § 49. Корреляционные функции системы заряженных частиц. Общее рассмотрение

В предыдущих главах плазма рассматривалась как система частиц, характеризующаяся набором макроскопических параметров, представляющих собой средние значения соответствующих микроскопических величин. В то же время известно, что параметры любой системы могут испытывать отклонение от средних значений, которые называются ф л у к т у а ц и я м и физических величин.

В этой главе изучим флуктуационные явления в плазме и некоторые связанные с ними процессы. Помимо самостоятельного интереса (поскольку, например, тепловые флуктуации электромагнитного поля определяют уровень «шумов» в плазме) изучение флуктуаций важно и с других точек зрения. В частности, вследствие тепловых флуктуаций могут протекать такие процессы, как р а с с е я н и е и т р а н с ф о р м а ц и я волн в плазме. Как отмечалось в гл. III, флуктуации определяют интеграл столкновений заряженных частиц в плазме, а следовательно, позволяют исследовать и процессы переноса. Теорию флуктуаций в плазме будем излагать на основе макроскопических характеристик электромагнитных свойств плазмы (диэлектрическая проницаемость и проводимость), которые были изучены в предыдущих главах исходя из наиболее общей модели плаз-

мы — кинетического уравнения с самосогласованным полем. Однако возможен и обратный подход к изучению электромагнитных явлений — определение с помощью микроскопической теории флуктуаций в плазме ее диэлектрической проницаемости.

Для количественной характеристики флуктуаций введем так называемые корреляционные функции. Рассмотрим флуктуации некоторой величины, например плотности тока  $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ , считая эту величину вещественной, а ее среднее значение — равным нулю:

$$\langle \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \rangle = 0. \quad (49.1)$$

В общем случае усреднение в (49.1) должно проводиться как по всем возможным квантовомеханическим состояниям системы, так и по вероятности статистического распределения этих состояний, т. е. по статистическому ансамблю, что эквивалентно усреднению по времени.

Пространственно-временную корреляционную функцию (или просто коррелятор) определяют как среднее значение произведения флуктуаций величины  $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$  в различных точках пространства в различные моменты времени. При этом, если среда однородна не только в пространстве, но и во времени\*, то квадратичную пространственно-временную корреляционную функцию записывают в виде

$$\langle j_i j_j \rangle_{t, \mathbf{r}} = \langle j_i(t_1, \mathbf{r}_1) j_j(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle, \quad (49.2)$$

где  $t = t_2 - t_1$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ .

Поскольку рассматривается пространственно однородная и стационарная плазма, можно применить преобразование Фурье

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega d\mathbf{k} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}), \quad (49.3)$$

$$\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) = \int dt d\mathbf{r} e^{+i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{j}(t, \mathbf{r}),$$

определив спектральное распределение пространственно-временной корреляционной функции в виде

$$\langle j_i j_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \int dt d\mathbf{r} e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} \cdot \langle j_i j_j \rangle_{t, \mathbf{r}}. \quad (49.4)$$

Введенную величину называют также спектральной плотностью корреляционной функции. Используя (49.3) и определение (49.4), легко показать, что имеется следующее соотношение:

$$\langle j_i^*(\omega, \mathbf{k}) j_j(\omega', \mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^4 \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \langle j_i j_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}}, \quad (49.5)$$

\* В этой главе ограничимся случаем пространственно неограниченной однородной плазмы, так как ограниченность или неоднородность плазмы не приводит к появлению принципиально новых результатов. Кроме того, возникающие здесь особенности можно учесть с помощью изложенного общего анализа флуктуаций в однородной среде.

связывающее среднее значение произведения Фурье-компонент флуктуирующих величин со спектральным распределением корреляционной функции.

Часто флуктуации удобно характеризовать пространственной

$$\langle j_i(t, \mathbf{r}_1) j_j(t, \mathbf{r}_2) \rangle \equiv \langle j_{ij} \rangle_{\mathbf{r}} \quad (49.6)$$

или временной (автокорреляционной)

$$\langle j_i(t_1, \mathbf{r}) j_j(t_2, \mathbf{r}) \rangle \equiv \langle j_{ij} \rangle_t \quad (49.7)$$

корреляционными функциями, представляющими среднее значение флуктуаций величин, либо в заданный момент времени, но в различных точках пространства, либо в заданной точке пространства, но в различные моменты времени.

Нетрудно убедиться, что имеются следующие соотношения для спектральных компонент корреляционных функций:

$$\langle j_{ij} \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \langle j_{ij} \rangle_{\omega, \mathbf{k}}, \quad (49.8)$$

$$\langle j_{ij} \rangle_{\omega} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \langle j_{ij} \rangle_{\omega, \mathbf{k}}.$$

Это означает, в частности, что спектральная плотность автокорреляционной функции представляет собой интеграл по всем волновым векторам от спектральной плотности пространственно-временного распределения флуктуаций.

С помощью автокорреляционной функции можно определить среднюю по всему спектру характерную частоту флуктуаций

$$\langle \omega^2 \rangle = \frac{\int \omega^2 \langle j_{ij} \rangle_{\omega} d\omega}{\int \langle j_{ij} \rangle_{\omega} d\omega}. \quad (49.9)$$

Аналогично с помощью пространственной корреляционной функции можно найти характерную длину, на которой происходит корреляция между флуктуациями данной величины.

Отметим одно важное следствие соотношения (49.1), для чего перепишем его в виде равенства нулю среднего значения амплитуд Фурье-компонент флуктуирующих величин:

$$\langle \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) \rangle = 0. \quad (49.10)$$

Комплексную амплитуду  $\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k})$  можно представить как

$$\mathbf{j}_i(\omega, \mathbf{k}) = |j_i(\omega, \mathbf{k})| e^{i\varphi}, \quad (49.11)$$

где  $\varphi$  — фаза соответствующей Фурье-компоненты плоской волны.

Тогда из (49.10) следует, что фазы Фурье-компонент флуктуирующих величин случайны, и усреднение (49.10) означает усреднение по случайным фазам. В этом состоит существенное различие между флуктуационными возмущениями равновесного состояния среды от возмущений с регулярной фазой, которые соответствуют собственным колебаниям среды, подробно рассмотренным в предыдущих главах.

Основной задачей общей теории флуктуаций в материальных средах является нахождение связи корреляционных функций для различных физических величин с макроскопическими характеристиками среды — диэлектрической проницаемостью или проводимостью. Для плазмы как системы заряженных частиц такая задача решается строго благодаря наличию малого параметра  $\eta$  — отношения энергии взаимодействия к среднему значению энергии теплового движения. В первом приближении заряженные частицы в плазме можно считать невзаимодействующими.

Переходя к расчету флуктуаций различных конкретных параметров плазмы, вспомним, что введенная в гл. III функция распределения (12.1) является, по определению, средним статистическим значением микроскопической функции распределения

$$f_M(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\alpha=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha(t)), \quad (49.12)$$

характеризующей микроскопическое распределение электронов в фазовом пространстве, т. е.

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \langle f_M(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle. \quad (49.13)$$

Здесь усреднение производится по распределению различных возможных состояний рассматриваемого статистического ансамбля из  $N$  частиц, т. е. по так называемой функции распределения Лиувилля, зависящей от координат и скоростей всех  $N$  частиц, образующих ансамбль —  $F(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t)$ . Поэтому естественно рассмотреть прежде всего флуктуацию самой функции распределения, которую следует определить как разность микроскопического распределения в фазовом пространстве (49.12) и его среднего значения:

$$\delta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \equiv f_M(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (49.14)$$

Очевидно, что в системе невзаимодействующих частиц в отсутствие внешних полей их траектории — прямые линии, вследствие чего в (49.12) следует положить  $\mathbf{v}_\alpha^0(t) = \mathbf{v}_\alpha^0 = \text{const}$ ,  $\mathbf{r}_\alpha^0(t) = \mathbf{r}_\alpha^0 + \mathbf{v}_\alpha^0(t - t_0)$ , где индекс «0» означает, что данная величина относится к системе без взаимодействия, а  $\mathbf{r}_\alpha^0$  и  $\mathbf{v}_\alpha^0$  — начальные положение и скорость частицы. Функция распределения Лиувилля представляется при этом в виде

$$F_N^0(\mathbf{r}_1^0, \dots, \mathbf{r}_N^0, \mathbf{v}_1^0, \dots, \mathbf{v}_N^0) = \prod_{\alpha=1}^N f(\mathbf{v}_\alpha^0). \quad (49.15)$$

Здесь учтено, что в силу пространственной однородности и стационарности системы одночастичные функции распределения  $f(\mathbf{v}_\alpha^0)$  зависят только от скорости  $\mathbf{v}_\alpha^0 = \mathbf{v}$ .

Образую коррелятор для флуктуаций распределения частиц одного сорта и производя далее усреднение по функции (49.15), можно показать, что в отсутствие взаимодействия между частицами про-

пространственно-временная корреляционная функция для флуктуаций функции распределения имеет вид\*

$$\begin{aligned} \langle \delta f^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta f^0(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \rangle &\equiv \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'}^0 = \\ &= \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}(t - t')] f(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (49.16)$$

Переходя к Фурье-образам, находим для спектрального распределения флуктуаций функций распределения в отсутствие взаимодействия выражение

$$\langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f(\mathbf{v}') \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0 = 2\pi \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f(\mathbf{v}). \quad (49.17)$$

Здесь  $f(\mathbf{v})$  — произвольная неравновесная функция распределения.

С помощью коррелятора (49.17) легко найти спектральные распределения для флуктуаций всех параметров, характеризующих систему невзаимодействующих заряженных частиц. Так, например, умножая (49.17) сначала на  $e^2$ , а затем — на  $e^2 v_i v'_j$  и дважды интегрируя по импульсам, находим спектральные распределения пространственно-временных корреляционных функций соответственно для плотности заряда, плотности частиц и плотности тока в отсутствие взаимодействия частиц:

$$\langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0 = e^2 \langle \delta N^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0 = 2\pi e^2 \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}), \quad (49.18)$$

$$\langle j_i j_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0 = 2\pi e^2 \int d\mathbf{p} v_i v_j f(\mathbf{p}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (49.19)$$

При наличии внешних полей для вычисления корреляционных функций необходимо знать закон движения частиц в этих полях. В частности, если на плазму наложено внешнее магнитное поле  $\mathbf{B}_0$ , то

$$\mathbf{r}(t) = \left\{ -\frac{v_{\perp} \gamma}{\Omega} \cos\left(\frac{\Omega t}{\gamma} + \varphi\right), \frac{v_{\perp} \gamma}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{\gamma} + \varphi\right), v_{\parallel} t \right\}, \quad (49.20)$$

где  $\gamma$  — релятивистский фактор;  $\Omega = \frac{eB_0}{mc}$  — циклотронная частота;  $v_{\perp}$  и  $v_{\parallel}$  — поперечная и продольная (по отношению к внешнему магнитному полю) компоненты скорости заряженных частиц;  $\varphi$  — фаза в начальный момент времени  $t = 0$ ; магнитное поле считается направленным вдоль оси  $Oz$ .

Образуя, как и в изотропной плазме, корреляционную функцию флуктуаций плотности тока согласно (49.14), после вычислений, аналогичных проведенным в § 23 при выводе тензора диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы, получаем

$$\langle j_i j_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0 = 2\pi e^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int f(\mathbf{p}) \Pi_{ij}(\mathbf{p}) \cdot \delta\left(\omega - \frac{n\Omega}{\gamma} - k_{\parallel} v_{\parallel}\right) d\mathbf{p}, \quad (49.21)$$

где тензор  $\Pi_{ij}(\mathbf{p})$  определяется формулой (23.8).

\* Заметим, что при усреднении микроскопической функции  $f_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  по распределению (49.15) получаем соотношение  $\langle f_{\mathbf{m}}^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = f(\mathbf{v}_{\alpha}^0)$ .



Выражение для спектрального распределения флуктуаций плотности заряда оказывается более простым:

$$\langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0 = 2\pi e^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int f(\mathbf{p}) J_n \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp} \gamma}{\Omega} \right) \delta \left( \omega - \frac{n\Omega}{\gamma} - k_{\parallel} v_{\parallel} \right) d\mathbf{p}. \quad (49.22)$$

Корреляционную функцию флуктуаций плотности частиц получают из (49.22) простым делением на  $e^2$ .

Соотношения (49.18) — (49.22) связывают флуктуации плотностей заряда и тока в системе невзаимодействующих частиц с функцией распределения  $f(\mathbf{p})$ . В этом приближении (при полном пренебрежении взаимодействием частиц) флуктуации в электронной и ионной компонентах плазмы независимы, и найденные соотношения можно рассматривать для каждой из них отдельно. Затем следует учесть взаимодействие между частицами плазмы посредством самосогласованного поля. Для этого плотность флуктуационного тока  $\mathbf{j}^0(\omega, \mathbf{k})$  нужно подставить в систему уравнений Максвелла в качестве внешнего источника и определить поле, создаваемое этим током. В результате имеем

$$\begin{aligned} & \left\{ k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right\} E_j(\omega, \mathbf{k}) = \\ & = \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sum_{\alpha} j_i^{\alpha 0}(\omega, \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (49.23)$$

Здесь суммирование распространяется по всем сортам заряженных частиц  $\alpha = e, i$ , а  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  — тензор диэлектрической проницаемости плазмы.

Решение уравнения (49.23) можно формально записать в виде

$$E_i(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sum_{\alpha} \Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) j_i^{\alpha 0}(\omega, \mathbf{k}), \quad (49.24)$$

где  $\Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$  — тензор, обратный тензору  $\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  (т. е.  $\Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \Lambda_{jk}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ik}$ ).

Используя (49.5) и (49.24), находим спектральное распределение флуктуаций самосогласованного поля в плазме:

$$\langle E_i E_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{16\pi^2 \omega^2}{c^4} \Lambda_{ik}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \cdot \Lambda_{jl}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \sum_{\alpha} \langle j_k^{\alpha 0} j_l^{\alpha 0} \rangle_{\omega, \mathbf{k}}. \quad (49.25)$$

При выводе этого соотношения было учтено, что в приближении невзаимодействующих частиц

$$\langle j_i^{\alpha} j_j^{\beta} \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0 = \delta_{\alpha\beta} \langle j_i^{\alpha} j_j^{\alpha} \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0. \quad (49.26)$$

Формулы (49.25) и (49.21) связывают коррелятор  $\langle E_i E_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}}$  с функцией распределения частиц в плазме.

Теперь, когда известна корреляционная функция флуктуаций самосогласованного поля, можно найти поправки к флуктуациям тока и заряда, обусловленные самосогласованным взаимодействием частиц в плазме. Так, под действием флуктуаций самосогласованного поля возникает поправка к флуктуации плотности тока частиц сорта  $\alpha$ :

$$\delta j_i^\alpha(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{i\omega}{4\pi} \delta \varepsilon_{ij}^\alpha(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}). \quad (49.27)$$

В результате полная плотность флуктуационного тока частиц сорта  $\alpha$

$$j_i^\alpha(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega^2}{c^2} \delta \varepsilon_{i\mu}^\alpha(\omega, \mathbf{k}) \Lambda_{\mu\nu}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \cdot \sum_\beta j_\nu^{\beta 0}(\omega, \mathbf{k}) + j_i^{\alpha 0}(\omega, \mathbf{k}). \quad (49.28)$$

Отсюда получаем искомую связь между спектральным распределением флуктуаций плотности тока, учитывающим самосогласованное взаимодействие частиц в плазме, и коррелятором флуктуаций плотности тока невзаимодействующих частиц:

$$\begin{aligned} \langle j_i^\alpha j_j^\beta \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = & \sum_{\alpha'} \left[ \delta_{i\mu} \delta_{\alpha\alpha'} - \frac{\omega^2}{c^2} \delta \varepsilon_{ik}^\alpha(\omega, \mathbf{k}) \Lambda_{k\mu}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \right]^* \times \\ & \times \left[ \delta_{j\nu} \delta_{\alpha'\beta} - \frac{\omega^2}{c^2} \delta \varepsilon_{jk}^\beta(\omega, \mathbf{k}) \Lambda_{k\nu}(\omega, \mathbf{k}) \right] \langle j_\mu^{\alpha'} j_\nu^{\beta'} \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0. \end{aligned} \quad (49.29)$$

Спектральное распределение корреляций плотности заряда при учете самосогласованного взаимодействия частиц в плазме легко получить, используя уравнение непрерывности. В результате имеем

$$\langle \rho^\alpha \rho^\beta \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{k_i k_j}{\omega^2} \langle j_i^\alpha j_j^\beta \rangle_{\omega, \mathbf{k}}. \quad (49.30)$$

Делением этого соотношения на  $e_\alpha e_\beta$  находят коррелятор флуктуаций плотности частиц  $\langle \delta N_\alpha N_\beta \rangle_{\omega, \mathbf{k}}$ .

Аналогично находят корреляционные функции флуктуаций магнитного поля, среднего значения энергии и других физических величин. Все они выражаются через коррелятор флуктуаций плотности тока невзаимодействующих частиц, который в свою очередь согласно (49.18) и (49.21) определяется интегралом от функций распределения частиц по скоростям.

В заключение еще раз подчеркнем, что полученные в этом параграфе соотношения носят общий характер и применимы как к равновесной, так и к неравновесной плазме. Единственным ограничением является требование устойчивости плазмы, что, в частности, заложено в предположении ее пространственной однородности и стационарности равновесного состояния.

## § 50. Флуктуации в равновесной плазме. Флуктуационно-диссипативная теорема

Применим полученные общие результаты к термодинамически равновесной плазме. Начнем с невырожденной изотропной бесстолкновительной плазмы, имеющей максвелловскую функцию распределения  $f_{\alpha}(\mathbf{p})$  и температуру  $T$  для всех сортов частиц. При этом вклад частиц сорта  $\alpha$  в диэлектрическую проницаемость определяется выражением (17.11), из которого следует соотношение

$$\delta \varepsilon_{ij}^{\alpha\alpha}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\delta \varepsilon_{ij}^{\alpha}(\omega, \mathbf{k}) - \delta \varepsilon_{ji}^{\alpha*}(\omega, \mathbf{k})}{2} = i\pi \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega T} \int d\mathbf{p} v_i v_j f_{\alpha} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (50.1)$$

Сравнивая это выражение с (49.18), получаем связь коррелятора токов невзаимодействующих частиц с антиэрмитовской частью парциального тензора диэлектрической проницаемости:

$$\langle j_i^{\alpha} j_j^{\alpha} \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0 = -\frac{i\omega T}{2\pi} \delta \varepsilon_{ij}^{\alpha\alpha}(\omega, \mathbf{k}). \quad (50.2)$$

Из формулы (50.2) видно, что флуктуации в плазме пропорциональны ее температуре и антиэрмитовской части тензора диэлектрической проницаемости, ответственной за диссипацию энергии электромагнитного поля в плазме.

Учтем далее, что в изотропной плазме

$$\Lambda_{ij} = -\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{lr}(\omega, \mathbf{k}) + k^2 \right]. \quad (50.3)$$

Используя соотношения (49.29) и (50.2), коррелятор флуктуаций плотности полного тока после несложных выкладок можно привести к виду

$$\langle j_i j_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{T\omega}{2\pi} \left[ \frac{k_i k_j}{k^2} \cdot \frac{\text{Im} \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})}{|\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})|^2} + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \left( 1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right)^2 \frac{\text{Im} \varepsilon^{lr}(\omega, \mathbf{k})}{\left| \varepsilon^{lr}(\omega, \mathbf{k}) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right|^2} \right]. \quad (50.4)$$

Соотношение (50.4) представляет собой так называемую ф л у к т у а ц и о н н о - д и с с и п а т и в н у ю т е о р е м у для невырожденной термодинамически равновесной изотропной плазмы. Она является частным случаем более общей флуктуационно-диссипативной теоремы, справедливой для термодинамически равновесной анизотропной плазмы:

$$\langle j_i j_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = -\frac{ic^2 T}{4\pi\omega} \Lambda_{ik}^0 (\Lambda_{lk}^{-1} - \Lambda_{kl}^{-1*}) \Lambda_{lj}^0 =$$

$$= -\frac{ic^2T}{4\pi\omega} \cdot \frac{1}{\Lambda} \Lambda_{ik}^0 (\Delta_{lh} - \Delta_{kl}^*) \Lambda_{lj}^0, \quad (50.5)$$

где  $\Lambda = |\Lambda_{ij}|$  — определитель, составленный из элементов матрицы  $\Lambda_{ij}$ ,  $\Delta_{ij}$  — алгебраическое дополнение  $\Delta_{ih}\Lambda_{hj} = \Lambda\delta_{ij}$ , а

$$\Lambda_{ij}^0(\omega, \mathbf{k}) = \lim_{\varepsilon_{ij} \rightarrow \delta_{ij}} \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}). \quad (50.6)$$

Флуктуационно-диссипативная теорема вида (50.5) применима также к произвольной анизотропной плазме, как невырожденной, так и вырожденной. Необходимо только, чтобы плазма находилась в состоянии термодинамического равновесия с температурой  $T$ , одинаковой для всех сортов заряженных частиц. Кроме того, при выводе этой теоремы предполагалось выполнением неравенство  $\hbar\omega \ll T$ , что обусловило применимость классического рассмотрения. В квантовой статистической физике флуктуационно-диссипативная теорема доказывается в более общем виде без учета этого неравенства:

$$\langle j_i j_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = -\frac{i}{4\pi} \cdot \frac{\hbar c^2}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1} \cdot \frac{1}{\Lambda} \Lambda_{ik}^0 (\Delta_{lh} - \Delta_{kl}^*) \Lambda_{lj}^0. \quad (50.7)$$

В пределе  $\hbar\omega \ll T$  она переходит в (50.5).

При использовании флуктуационно-диссипативной теоремы в (50.5) и (50.7) следует подставлять  $\Lambda(\omega, \mathbf{k})$ ,  $\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  и  $\Lambda_{ij}^0(\omega, \mathbf{k})$ , вычисленные с учетом соответствующих ограничений. В настоящей книге для описания движения заряженных частиц в плазме было использовано классическое кинетическое уравнение с самосогласованным взаимодействием, справедливое в условиях  $\hbar\omega \ll \varepsilon_{\text{ср}}$ , где  $\varepsilon_{\text{ср}}$  — среднее значение энергии хаотического движения частиц\*. Это означает: для невырожденной плазмы  $\hbar\omega \ll T$ , для вырожденной плазмы  $\hbar\omega \ll \varepsilon_F$ ; отношение  $\hbar\omega/T$  может быть произвольным. Поэтому далее для невырожденной плазмы будем пользоваться флуктуационно-диссипативной теоремой (50.5), а для вырожденной — (50.7).

Из соотношений (50.5) и (50.7) следует, в частности, один общий весьма важный вывод: спектральная плотность флуктуаций резко возрастает в случае, когда возможно выполнение равенства

$$\Lambda = \left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0. \quad (50.8)$$

Это есть не что иное, как дисперсионное уравнение для спектров собственных колебаний плазмы (8.4), подробно исследованное в предыдущих главах. Таким образом, флуктуации имеют резкие максимумы вблизи частот собственных колебаний плазмы.

\* Условие  $\hbar\omega \ll \varepsilon_{\text{ср}}$  следует из приближения  $p \gg \hbar k$ , примененного при выводе кинетического уравнения с учетом столкновений частиц (см. гл. III). Домножив это неравенство на скорость  $v_{\text{ф}} = \omega/k$ , которая для плазменных волн порядка тепловых скоростей частиц, приходим к исходному условию.

С помощью соотношений (50.4) — (51.7) были выражены флуктуации в равновесной плазме через макроскопическую характеристику ее электромагнитных свойств — диэлектрическую проницаемость, точнее, ее антиэрмитовскую часть  $\varepsilon_{ij}^a(\omega, \mathbf{k})$ . Можно поступить и обратным образом — с помощью формулы (50.2) выразить антиэрмитовскую часть диэлектрической проницаемости через коррелятор плотности тока для системы невзаимодействующих частиц. Воспользовавшись далее формулами Крамерса—Кронига (6.17), можно определить и эрмитовскую часть  $\delta\varepsilon_{ij}^{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$ , т. е. найти полное выражение тензора комплексной диэлектрической проницаемости. Соответствующие соотношения имеют вид (см. § 6):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \delta\varepsilon_{ij}^{\alpha}(\omega, \mathbf{k}) - \delta_{ij} &= \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} \delta\varepsilon_{ij}^{\alpha}(\omega', \mathbf{k})}{\omega' - \omega}, \\ \operatorname{Im} \delta\varepsilon_{ij}^{\alpha}(\omega, \mathbf{k}) &= -\frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Re} \delta\varepsilon_{ij}^{\alpha}(\omega', \mathbf{k}) - \delta_{ij}}{\omega' - \omega}. \end{aligned} \quad (50.9)$$

Они связывают между собой действительную и мнимую части тензора  $\delta\varepsilon_{ij}^{\alpha}(\omega, \mathbf{k})$ . Здесь символ  $\mathcal{P}$  означает, что интеграл нужно понимать в смысле главного значения. Переходя от парциального вклада частиц в тензор диэлектрической проницаемости к полному тензору  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ , просуммировав по всем сортам заряженных частиц, с помощью (50.2) и (50.9) получим

$$\varepsilon_{ij}^a(\omega, \mathbf{k}) = i \frac{(2\pi)^2}{\omega T} \langle j_i j_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}}^0 \quad (50.10)$$

$$\varepsilon_{ij}^s(\omega, \mathbf{k}) - \delta_{ij} = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_{ij}^a(\omega', \mathbf{k}) d\omega'}{\omega' - \omega}. \quad (50.11)$$

Приведенные выражения составляют математическое содержание так называемого обращения флуктуационно-диссипативной теоремы, с помощью которого можно найти тензор диэлектрической проницаемости плазмы, если предварительно определить из микроскопической теории флуктуации плотности тока или заряда в плазме.

## § 51. Спектральное распределение флуктуаций в равновесной бесстолкновительной плазме

Рассмотрим флуктуации в равновесной бесстолкновительной электронной плазме. Начнем с наиболее простого случая изотропной невырожденной плазмы. Будем исходить из выражения (50.4) для коррелятора флуктуаций плотности тока. Используя далее связь самосогласованного поля и плотности тока

$$\mathbf{j}^l(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{i\omega}{4\pi} \delta \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}^l(\omega, \mathbf{k}), \quad (51.1)$$

$$\mathbf{j}^{tr}(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{i\omega}{4\pi} \delta \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}^{tr}(\omega, \mathbf{k}),$$

можно с помощью (50.4) определить коррелятор флуктуаций самогласованного поля

$$\langle E_i E_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{8\pi T}{\omega} \left[ \frac{k_i k_j}{k^2} \cdot \frac{\text{Im } \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})^2}{|\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})|^2} + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{\text{Im } \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k})}{\left| \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right|^2} \right]. \quad (51.2)$$

Из формул (50.4) и (51.2) видно, что корреляторы флуктуаций плотности тока и электрического поля распадаются на два слагаемых, характеризующих продольные и поперечные флуктуации. Таким образом, в изотропной плазме продольные и поперечные флуктуации оказываются независимыми.

Из уравнения непрерывности

$$\omega \rho = \mathbf{kj}(\omega, \mathbf{k}), \quad (51.3)$$

учитывая (50.4), легко находим коррелятор флуктуаций плотности заряда

$$\langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{k^2}{16\pi^2} \langle E^{l2} \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{k^2 T}{2\pi\omega} \cdot \frac{\text{Im } \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})}{|\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})|^2}. \quad (51.4)$$

Естественно, что флуктуации плотности заряда зависят только от продольной диэлектрической проницаемости.

Выразим теперь корреляционные функции через параметры плазмы, для чего используем явный вид диэлектрической проницаемости. Ограничимся вначале случаем чисто электронной невырожденной плазмы, воспользовавшись для  $\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})$  и  $\varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k})$  выражениями (17.14).

Рассмотрим флуктуации плотности заряда. Проанализируем область высоких частот (больших фазовых скоростей)  $\omega \gg kv_{Te}$ , в которой существуют продольные слабозатухающие ленгмюровские волны со спектром, определяемым дисперсионным уравнением  $\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 0$ . Для этой области частот из (51.4) имеем

$$\langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{k^2}{16\pi^2} \langle E^{l2} \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = -\frac{k^2 T}{2\pi\omega} \cdot \text{Im} \frac{1}{\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})} \approx \\ \approx \frac{k^2 T}{2\pi\omega} \pi \delta[\text{Re } \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})]. \quad (51.5)$$

При получении этой формулы была использована возможность формальной замены

$$\text{Im} \frac{1}{\varepsilon^l(\omega, k)} = -\pi\delta[\text{Re} \varepsilon^l(\omega, k)], \quad (51.6)$$

справедливой для области прозрачности плазмы, когда  $\text{Re} \varepsilon^l(\omega, k) \gg \text{Im} \varepsilon^l(\omega, k)$ .

Подставляя в (51.5) выражение для  $\varepsilon^l(\omega, k)$ , которое в рассматриваемой области имеет вид

$$\text{Re} \varepsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left( 1 + 3 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right), \quad (51.7)$$

окончательно находим

$$\left. \begin{aligned} \langle \rho^2 \rangle_{\omega, k} &= \frac{k^2 T}{2\omega} \omega_{Le}^2 \delta(\omega^2 - \omega_{Le}^2 - 3k^2 v_{Te}^2), \\ \langle E^2 \rangle_{\omega, k} &= \frac{16\pi^2}{k^2} \langle \rho^2 \rangle_{\omega, k} = \frac{8\pi^2 T}{\omega} \times \\ &\times \omega_{Le}^2 \delta(\omega^2 - \omega_{Le}^2 - 3k^2 v_{Te}^2). \end{aligned} \right\} \quad (51.8)$$

Здесь учтено, что спектр продольных волн лежит в узком диапазоне частот  $\omega^2 \gg \omega_{Le}^2$ .

Таким образом, в высокочастотной области спектра флуктуации плотности заряда в плазме существуют только в узком диапазоне частот, соответствующем спектру плазменных колебаний. Это иллюстрируется рис. 44, на котором представлена зависимость спектральных распределений величины  $\frac{2\langle \rho^2 \rangle_{\omega, k}}{e^2 N_e}$  от безразмерной частоты  $\omega/(k v_{Te})$ . Видно, что максимумы резкие только при малых значениях  $k^2 r_{De}^2$ , а с уменьшением длины волны (увеличением волнового числа  $k$ ) полностью пропадают из-за сильного затухания Ландау.

Используя асимптотику функции  $J_+ \left( \frac{\omega}{k v_{Te}} \right)$  при малых значениях  $\frac{\omega}{k v_{Te}}$ , можно исследовать и область низких частот, однако соответствующие расчеты не приводят к прос-

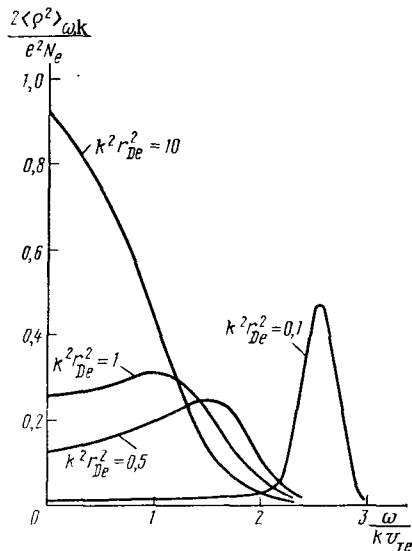


Рис. 44

тым выражениям и выписывать их здесь не представляет интереса.

Для дальнейшей характеристики флуктуаций удобно рассмотреть временную корреляцию флуктуаций с заданной длиной волны, которая получается интегрированием спектрального распределения корреляционной функции по частотам:

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} d\omega, \quad \langle E^{I2} \rangle_{\mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle E^{I2} \rangle_{\omega, \mathbf{k}} d\omega. \quad (51.9)$$

Интегрирование в (51.9) легко провести с помощью формулы Крамерса — Кронига, которую следует применить к функции  $\frac{\varepsilon^l(\omega, k)}{|\varepsilon^l(\omega, k)|^2}$ , либо к функции  $[\varepsilon^l(\omega, k)]^{-1}$ :

$$\frac{\operatorname{Re} \varepsilon^l(\omega, k)}{|\varepsilon^l(\omega, k)|^2} - 1 = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon^l(\omega', k)}{(\omega' - \omega) |\varepsilon^l(\omega', k)|^2} d\omega'. \quad (51.10)$$

Полагая в (51.10)  $\omega = 0$  и учитывая, что  $\operatorname{Im} \varepsilon^l(0, k) = 0$ , из (51.9) находим

$$\left. \begin{aligned} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}} &= \frac{k^2 T}{4\pi} \left[ 1 - \frac{1}{\varepsilon^l(0, k)} \right], \\ \langle E^{I2} \rangle_{\mathbf{k}} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \langle E^{I2} \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = 4\pi T \left[ 1 - \frac{1}{\varepsilon^l(0, k)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (51.11)$$

Таким образом, спектральная плотность пространственной корреляционной функции флуктуаций плотности заряда и продольного электрического поля полностью определяется продольной статической диэлектрической проницаемостью. Подставляя в (51.11) значение  $\varepsilon^l(0, k)$  для изотропной плазмы согласно (18.13)

$$\varepsilon^l(0, k) = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2},$$

получаем

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{e^2 N_e k^2}{k^2 + 1/r_D^2}, \quad \langle E^{I2} \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{16\pi^2 e^2 N_e}{k^2 + 1/r_D^2}. \quad (51.12)$$

Производя обратное преобразование Фурье, нетрудно найти пространственные корреляционные функции флуктуаций плотности заряда и продольного электрического поля\*:

$$\left. \begin{aligned} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{r}} &= 2e^2 N_e \left[ \delta(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-r/r_D}}{r r_D^2} \right], \\ \langle E^{I2} \rangle_{\mathbf{r}} &= 8\pi e^2 N_e \frac{e^{-r/r_D}}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (51.13)$$

\* Далее для простоты ионы считаются однозарядными.



Отсюда следует, что характерным расстоянием, на котором происходит корреляция между флуктуациями плотности заряда и продольного электрического поля в плазме, является дебаевский радиус. В этом случае при  $\eta \ll 1$  энергия флуктуаций продольного поля мала по сравнению с тепловой энергией электронов:

$$\frac{\langle E^2 \rangle_r}{4\pi N_e T} \approx \frac{e^2 N_e}{r_{De} N_e T} \approx \left( \frac{e^2 N_e^{1/3}}{T} \right)^{3/2} \ll 1. \quad (51.14)$$

Найдем далее среднюю квадратичную частоту флуктуаций, которая определяется выражением (49.9):

$$\langle \omega^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \langle \rho^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} d\omega}. \quad (51.15)$$

Интегрирование в (51.15) тоже удобно провести с помощью формулы Крамерса—Кронига, что дает

$$\langle \omega^2 \rangle = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 [1 - \epsilon^l(\omega, k)] \cdot \left[ 1 - \frac{1}{\epsilon^l(0, k)} \right]^{-1}. \quad (51.16)$$

Как неоднократно было показано ранее и как следует из общих физических соображений, в области высоких частот пространственная дисперсия несущественна и для  $\epsilon^l(\omega, k)$  при  $\omega \gg kv_{Te}$  можно пользоваться формулой элементарной теории

$$\epsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}.$$

С учетом этого средняя квадратичная частота флуктуаций

$$\langle \omega^2 \rangle = \frac{\omega_{Le}^2}{1 - \frac{1}{\epsilon^l(0, k)}} \approx \omega_{Le}^2 + \frac{1}{2} k^2 v_{Te}^2, \quad (51.17)$$

откуда видно, что она меньше частоты собственных плазменных колебаний  $\omega^2 = \omega_{Le}^2 + 3k^2 v_{Te}^2$ . Из (51.17) следует также, что все полученные формулы, основанные на (51.4), справедливы при условии  $\hbar \omega_{Le} \ll T$ , которое, как правило, всегда хорошо выполняется в невырожденной плазме.

Проанализируем особенности флуктуаций в вырожденной электронной плазме. Будем исходить из выражения (50.7) для коррелятора  $\langle j_{ij} \rangle_{\omega, \mathbf{k}}$ . Используя уравнение непрерывности (51.3), можно получить из (50.7) выражение для коррелятора флуктуаций электронной плотности в изотропной плазме:

$$\langle \delta N_e^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{k^2}{2\pi e^2} \cdot \frac{\hbar}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1} \cdot \frac{\text{Im } \epsilon^l(\omega, k)}{|\epsilon^l(\omega, k)|^2}. \quad (51.18)$$

Отметим прежде всего следующее важное обстоятельство. Согласно флуктуационно-диссипативной теореме в классическом пределе, т. е. когда  $\hbar\omega \ll T$  и справедливо соотношение (50.5), при  $T = 0$  флуктуации невозможны. В вырожденной плазме это не так. Действительно, из (51.18) видно, что флуктуации в вырожденной плазме возможны и при  $T = 0$  (полное вырождение), но только с отрицательными частотами  $\omega < 0$ . Физически это является следствием того, что при  $T = 0$  частицы системы занимают все возможные низшие энергетические уровни, т. е. система ферми-частиц находится в основном энергетическом состоянии и допускает переходы только в состояние с большей энергией, что соответствует поглощению кванта энергии, т. е. отрицательному значению частоты. Флуктуации при  $T = 0$  являются чисто квантовыми и пропорциональны постоянной Планка  $\hbar$ .

Проанализируем выражение (51.18) при произвольном отношении  $\hbar\omega/T$ , используя в качестве  $\varepsilon^l(\omega, k)$  формулу (17.18).

Начнем с области высоких частот  $\omega > kv_{Fe}$ . При этом мнимая часть диэлектрической проницаемости в бесстолкновительном пределе (согласно (19.3)) строго равна нулю, и флуктуации в плазме невозможны. Однако при учете редких столкновений частиц появляется отличная от нуля мнимая часть  $\varepsilon^l(\omega, k)$ , а вместе с ней и флуктуации на частотах собственных незатухающих плазменных колебаний со спектром (19.4):

$$\langle \delta N_e^2 \rangle_{\omega, k} = \frac{k^2}{2e^2} \cdot \frac{\hbar}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1} \delta[\varepsilon^l(\omega, k)] \approx \\ \approx \frac{k^2\omega_{Le}^2}{2e^2} \cdot \frac{\hbar}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1} \delta\left[\omega^2 - \omega_{Le}^2 \left(1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{k^2 v_{Fe}^2}{\omega_{Le}^2}\right)\right]. \quad (51.19)$$

В области низких частот  $\omega \ll kv_{Fe}$  для  $\varepsilon^l(\omega, k)$  имеем асимптотическое представление (19.6), подстановка которого в (51.18) дает

$$\langle \delta N_e^2 \rangle_{\omega, k} = \frac{k\omega}{4e^2 v_{Fe}} \cdot \frac{\hbar}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1} \cdot \frac{1}{1 + k^2 v_{Fe}^2 / 3\omega_{Le}^2}. \quad (51.20)$$

Отсюда для области малых длин волн ( $k^2 r_{De}^2 \gg 1$ ) получаем

$$\langle \delta N_e^2 \rangle_{\omega, k} = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{N_e}{\varepsilon_{Fe}} \cdot \frac{\omega}{kv_{Fe}} \cdot \frac{\hbar}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1}. \quad (51.21)$$

В области больших длин волн ( $k^2 r_{De}^2 \gg 1$ ), когда существенны коллективные эффекты, из (51.20) следует

$$\langle \delta N_e^2 \rangle_{\omega, k} = 2\pi \frac{N_e}{\varepsilon_{Fe}} \cdot \frac{\omega kv_{Fe}}{\omega_{Le}^2} \cdot \frac{\hbar}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1}. \quad (51.22)$$

Сравнение полученных выражений показывает, что в области низких частот (малых фазовых скоростей) основную роль играют длинноволновые флуктуационные возбуждения; флуктуации с малой длиной волны в системе невзаимодействующих ферми-частиц относительно малы.

Наконец, заметим, что, зная флуктуации плотности электронов, нетрудно определить флуктуации плотности заряда и продольного электрического поля в плазме:

$$\left. \begin{aligned} \langle \rho^2 \rangle_{\omega, k} &= e^2 \langle \delta N_e^2 \rangle_{\omega, k}, \\ \langle E^2 \rangle_{\omega, k} &= \frac{16\pi^2}{k^2} e^2 \langle \delta N_e^2 \rangle_{\omega, k}. \end{aligned} \right\} \quad (51.23)$$

Оценка по этой формуле энергии, связанной с флуктуацией продольного поля, показывает, что так же как и для невырожденной плазмы, она мала по сравнению с энергией хаотического движения электронов. Так, в пределе  $\hbar\omega \ll T$  имеем

$$\frac{\langle E^2 \rangle_{\Gamma}}{4\pi N_e e^2 \epsilon_{Fe}} \approx \frac{T_e}{\epsilon_{Fe}} \left( \frac{e^2 N_e^{1/3}}{\epsilon_{Fe}} \right)^{3/2} \ll 1. \quad (51.24)$$

Таким образом, в вырожденной изотропной плазме, так же как и в невырожденной, возможны высокочастотные флуктуации плотности заряда и продольного электрического поля на частотах, близких к ленгмюровской частоте электронов. Однако в отличие от невырожденной плазмы такие флуктуации в вырожденной плазме имеют место как при  $\hbar\omega_{Le} < T$ , когда они определяются температурой (подобно невырожденной плазме), так и при  $\hbar\omega_{Le} > T \rightarrow 0$ , когда они носят чисто квантовый характер.

В заключение кратко проанализируем флуктуации в невырожденной магнитоактивной плазме, находящейся в состоянии термодинамического равновесия. Коррелятор флуктуаций плотности тока определяют в этом случае с помощью флуктуационно-диссипативной теоремы (50.5). Входящие в это соотношение величины выражаются через тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы, для которого следует использовать выражение (23.10) с  $T_e = T_i = T$ . Видно, что в общем случае анализ флуктуаций в магнитоактивной плазме связан с громоздкими вычислениями. Тем не менее вид спектрального распределения корреляционных функций качественно остается прежним: он характеризуется наличием резких максимумов вблизи собственных частот колебаний магнитоактивной плазмы, которые детально проанализированы в гл. V. Поэтому ограничимся простым примером. Вычислим корреляционную функцию флуктуаций плотности заряда в пределе холодной плазмы. С помощью (50.5) и уравнения непрерывности (51.3) получаем

$$\langle \rho^2 \rangle_{\omega, k} = \frac{k^2 T}{2\pi \omega} \operatorname{Im} \left[ 1 - \frac{P(\omega, k)}{\Lambda(\omega, k)} \right], \quad (51.25)$$

где

$$P(\omega, k) = \frac{k^4 c^4}{\omega^4} - (\varepsilon_{\perp} \cos^2 \vartheta + \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel} \sin^2 \vartheta) \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + (\varepsilon_{\perp}^2 - g^2) \cos^2 \vartheta + \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \sin^2 \vartheta, \quad (51.26)$$

$$\Lambda(\omega, k) = \frac{k^4 c^4}{\omega^4} (\varepsilon_{\perp} \sin^2 \vartheta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \vartheta) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \times \\ \times [2\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} + (\varepsilon_{\perp}^2 - g^2 - \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}) \sin^2 \vartheta] + \varepsilon_{\parallel} (\varepsilon_{\perp}^2 - g^2)$$

( $\vartheta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}_0$ ), а компоненты тензора диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{\perp}$ ,  $\varepsilon_{\parallel}$  и  $g$  для рассматриваемого случая чисто электронной плазмы определяются формулами [см. (24.3)]:

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}, \quad \varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}, \quad g = - \frac{\omega_{Le}^2 \Omega_e}{\omega(\omega^2 - \Omega_e^2)}. \quad (51.27)$$

Ограничиваясь пределом  $(k^2 c^2 / \omega^2) \gg 1$ , когда волны в магнитоактивной плазме с хорошим приближением можно считать потенциальными, выражение (51.25) можно упростить:

$$\langle \rho^2 \rangle_{\omega, k} = \frac{k^2 T}{2\pi \omega} \operatorname{Im} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_{\perp} \sin^2 \vartheta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \vartheta} \right). \quad (51.28)$$

При учете исчезающе малых мнимых частей  $\varepsilon_{\perp}$  и  $\varepsilon_{\parallel}$ , обусловленных, например, столкновениями частиц, из (51.28) находим

$$\langle \rho^2 \rangle_{\omega, k} = \frac{k^2 T}{4} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{Le}^2} \cdot \frac{(\omega^2 - \Omega_e^2)^2}{\omega^4 \sin^2 \vartheta + (\omega^2 - \Omega_e^2)^2 \cos^2 \vartheta} \times \\ \times [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - \omega_2) + \delta(\omega + \omega_2)], \quad (51.29)$$

где частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  определяются корнями дисперсионного уравнения для продольных ленгмюровских волн в магнитоактивной плазме:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2)^2 - 4\omega_{Le}^2 \Omega_e^2 \cos^2 \vartheta}. \quad (51.30)$$

Этот спектр совпадает с полученным в § 24 [см. дисперсионное уравнение (24.19) и спектр (24.20)].

Из условия применимости теоремы (50.5) следует, что формулы (51.25), (51.28), (51.29) справедливы при  $\hbar\omega_{1,2} \ll T$ . Так как они относятся к холодной магнитоактивной плазме, то пригодны как для невырожденной, так и для вырожденной плазмы. Более того, не представляя труда обобщение этих формул на случай вырожденной плазмы при произвольном отношении  $\hbar\omega_{1,2}/T$ . Для этого величину  $T$  в них следует заменить на  $\hbar \omega [\exp(\frac{\hbar\omega}{T}) - 1]^{-1}$ . Видно, что аналогично изотропной плазме в магнитоактивной вырожденной плазме возможны чисто квантовые флуктуации в пределе  $T \rightarrow 0$ , причем частоты этих флуктуаций также отрицательны.

§ 52. Флуктуации в неравновесной плазме.  
 Неизотермическая квазиравновесная плазма  
 и плазма с пучком

Полученные в § 49 общие выражения для флуктуаций в неравновесной плазме сложны для анализа. Их удастся несколько упростить в случае изотропной плазмы. Ограничиваясь рассмотрением флуктуаций только продольных полей и токов (и выражающихся через них флуктуаций плотностей заряда и частиц данного сорта), легко получить из выражения (49.25) спектральное распределение коррелятора флуктуаций продольного электрического поля:

$$\langle E^2 \rangle_{\omega, k} = \sum_{\alpha} \frac{32\pi^3 e_{\alpha}^2}{k^2 |\epsilon^l(\omega, k)|^2} \int d\mathbf{p} f_{0\alpha}(\mathbf{p}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (52.1)$$

Для спектрального распределения коррелятора флуктуаций плотности тока частиц данного сорта (для определенности плотности электронного тока) из (49.29) находим

$$\begin{aligned} \langle j_e^2 \rangle_{\omega, k} = & 2\pi e^2 \left[ \frac{|1 + \delta\epsilon_e^l(\omega, k)|^2}{|\epsilon^l(\omega, k)|^2} \int d\mathbf{p} f_{0e}(\mathbf{p}) v^2 \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) + \right. \\ & \left. + \frac{|\delta\epsilon_e^l(\omega, k)|^2}{|\epsilon^l(\omega, k)|^2} \int d\mathbf{p} f_{0i}(\mathbf{p}) v^2 \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \right]. \end{aligned} \quad (52.2)$$

С помощью уравнения непрерывности отсюда получаем спектральное распределение коррелятора флуктуаций плотности электронов:

$$\begin{aligned} \langle \delta N_e^2 \rangle_{\omega, k} = & \frac{2\pi}{|\epsilon^l(\omega, k)|^2} \left[ |1 + \delta\epsilon_e^l(\omega, k)|^2 \int d\mathbf{p} f_{0e}(\mathbf{p}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) + \right. \\ & \left. + |\delta\epsilon_e^l(\omega, k)|^2 \int d\mathbf{p} f_{0i}(\mathbf{p}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \right]. \end{aligned} \quad (52.3)$$

Флуктуации ионов определяются такими же формулами, как и флуктуации электронов, с заменой индексов  $e$  на  $i$  и наоборот.

Из последних двух выражений следует, что флуктуации плотности электронного тока и плотности электронов зависят от функции распределения как электронов, так и ионов, причем эта зависимость определяется не только вкладом соответствующих частиц в диэлектрическую проницаемость, но также самими функциями распределения электронов и ионов по скоростям в направлении волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Физически природа такой зависимости заключается в следующем. Слагаемое в (52.3), не зависящее прямо от  $\delta\epsilon_e^l(\omega, k)$ , связано с флуктуациями собственно электронов; слагаемые, пропорциональные  $\delta\epsilon_e^l(\omega, k)$ , описывают поляризационные облака ионов, образующихся вокруг электронов; слагаемое, пропорциональное  $\delta\epsilon_e^l(\omega, k)$ , описывает вклад поляризационных облаков электронов, образующихся вокруг ионов.

Для характеристики флуктуаций в неравновесной плазме часто удобно вводить понятие эффективной температуры флуктуаций  $T_{эфф}$ . Покажем это на примере флуктуаций продольного поля. Для этого запишем соотношение (52.1) в виде

$$\langle E^{l2} \rangle_{\omega, k} = \frac{F(\omega, k)}{|\varepsilon^l(\omega, k)|^2}, \quad (52.4)$$

где введено обозначение

$$F(\omega, k) = \sum_{\alpha} 32\pi^3 e_{\alpha}^2 \frac{1}{k^2} \int d\mathbf{p}_{\alpha} f_{0\alpha}(\mathbf{p}_{\alpha}) \cdot \delta(\omega - k\mathbf{v}). \quad (52.5)$$

В случае равновесной плазмы выражение (52.4) переходит в (51.4). Сравнивая эти выражения для корреляторов флуктуаций в неравновесной и равновесной плазме соответственно, определяют эффективную температуру неравновесной плазмы:

$$T_{эфф} = \frac{\omega F(\omega, k)}{8\pi \operatorname{Im} \varepsilon^l(\omega, k)}. \quad (52.6)$$

Ясно, что эффективная температура может служить не только для характеристики флуктуаций, но и для характеристики продольных колебаний в неравновесной плазме.

Применим полученные результаты к двум конкретным случаям неравновесной плазмы: 1) квазиравновесной неизотермической (двух-температурной) электронно-ионной плазме; 2) плазме с пучком.

Рассмотрим квазиравновесную плазму, в которой электроны и ионы имеют максвелловские распределения по скоростям, но с различными температурами. При этом в приведенные формулы в качестве  $f_{0\alpha}(\mathbf{p}_{\alpha})$  следует подставить функции распределения Максвелла с температурой  $T_{\alpha}$ , где  $\alpha = e, i$ . Получим сначала выражение для спектрального распределения флуктуаций продольного поля. Используя (52.1), получим

$$\langle E^{l2} \rangle_{\omega, k} = \frac{8\pi}{\omega} \cdot \frac{1}{|\varepsilon^l(\omega, k)|^2} \sum_{\alpha} T_{\alpha} \operatorname{Im} \delta \varepsilon_{\alpha}^l(\omega, k), \quad (52.7)$$

т. е. флуктуации продольного поля в квазиравновесной плазме описываются аналогично флуктуациям в равновесной плазме с заменой  $T \operatorname{Im} \varepsilon^l(\omega, k)$  на  $\sum_{\alpha} T_{\alpha} \operatorname{Im} \delta \varepsilon_{\alpha}^l(\omega, k)$ .

Путем аналогичных расчетов нетрудно получить выражения для флуктуаций других величин в квазиравновесной плазме, в частности, для спектрального распределения флуктуаций плотности электронов

$$\begin{aligned} \langle \delta N_e^2 \rangle_{\omega, k} = & \frac{8\pi}{\omega} N_e \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega_{Le}^2} \frac{1}{|\varepsilon^l(\omega, k)|^2} \left\{ |1 + \delta \varepsilon_e^l(\omega, k)|^2 \frac{\operatorname{Im} \delta \varepsilon_e^l(\omega, k)}{4\pi} + \right. \\ & \left. + \frac{T_i}{T_e} |\delta \varepsilon_e^l(\omega, k)|^2 \frac{\operatorname{Im} \delta \varepsilon_i^l(\omega, k)}{4\pi} \right\}. \quad (52.8) \end{aligned}$$

В формулах (52.7) и (52.8)  $\varepsilon^l(\omega, k)$  и  $\delta\varepsilon^l_\alpha(\omega, k)$  определяют согласно (17.14).

Проанализируем спектральное распределение флуктуаций плотности электронов более подробно, для чего рассмотрим области прозрачности неизотермической плазмы. Как известно, их две. Первая область прозрачности соответствует области высоких частот  $\omega \gg kv_{Te}$  (больших фазовых скоростей), в которой существует спектр слабозатухающих плазменных колебаний. В этой области плазма ведет себя как чисто электронная, и для ее описания можно воспользоваться полученными в предыдущем параграфе результатами.

Вторая область прозрачности соответствует низкочастотной ветви продольных слабозатухающих колебаний в сильно неизотермической ( $T_e \gg T_i$ ) плазме с фазовыми скоростями, удовлетворяющими условию  $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$ . При условии  $k^2 r_{De}^2 \ll 1$  спектр этих колебаний имеет простой вид [см. (18.10)]:

$$\omega^2 = k^2 z \frac{T_e}{M} \left( 1 + \frac{3T_i}{zT_e} \right) \equiv k^2 v_s^2. \quad (52.9)$$

В этой области частот из (52.8) следует

$$\langle \delta N_e^2 \rangle_{\omega, k} = \frac{\pi}{2} N_e k^4 r_{De}^4 [\delta(\omega + kv_s) + \delta(\omega - kv_s)], \quad (52.10)$$

т. е. флуктуации имеют резкий максимум вблизи резонансных ионно-звуковых частот  $\omega = \pm kv_s$ . В сторону больших частот величина  $\langle \delta N_e^2 \rangle_{\omega, k}$  спадает по экспоненциальному закону, так как согласно (17.16) в рассматриваемой области частот

$$\text{Im } \delta\varepsilon^l_\alpha(\omega, k) \sim \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{T\alpha}^2}\right).$$

В области малых частот также происходит падение величины  $\langle \delta N_e^2 \rangle_{\omega, k}$ . При частотах  $\omega \ll kv_{Ti}$  основной вклад в выражение (52.8) дает последнее слагаемое, и приближенно можно записать

$$\begin{aligned} \langle \delta N_e^2 \rangle_{\omega, k} &= \sqrt{8\pi} N_e \frac{k^3 r_{De}^3}{\omega_{Le}} \sqrt{\frac{M}{m}} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/2} \approx \\ &\approx \sqrt{8\pi} N_e \frac{k^3 r_{Di}^3}{\omega_{Li}}. \end{aligned} \quad (52.11)$$

При переходе к изотермической плазме ионно-звуковой максимум пропадает практически полностью, однако абсолютная величина коррелятора флуктуаций электронной плотности в области низких частот при  $T_e = T_i$  сильно возрастает по сравнению с неизотермической плазмой. Это видно из рис. 45, на котором представлена зависимость спектральных распределений величины  $2\langle \delta N_e^2 \rangle_{\omega, k} / N_e$  от безразмерной частоты  $\omega/(kv_{Te})$  при  $k^2 r_{De}^2 \ll 1$  и различных значениях  $T_e/T_i$ .

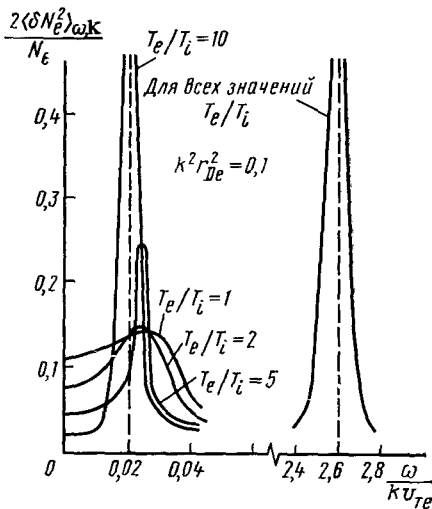


Рис. 45

В случае неизотермической плазмы из (52.6) получаем

$$T_{\text{эфф}} = \frac{\sum_{\alpha} N_{\alpha} e_{\alpha}^2 m_{\alpha}^{1/2} T_{\alpha}^{-1/2} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{T\alpha}^2}\right)}{\sum_{\alpha} N_{\alpha} e_{\alpha}^2 m_{\alpha}^{1/2} T_{\alpha}^{-3/2} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{T\alpha}^2}\right)}. \quad (52.12)$$

Естественно, что для ионно-звуковой области прозрачности сильно неизотермической плазмы ( $T_e \gg T_i$ ) из (52.12) следует  $T_{\text{эфф}} \approx T_e$ , т. е. эффективная температура флуктуаций как в высокочастотной, так и в низкочастотной областях прозрачности полностью определяется температурой электронов.

Рассмотрим плазму, сквозь которую с направленной скоростью  $u$  движется нерелятивистский пучок заряженных частиц — электронов. Предположим, что в сопутствующей системе координат частицы пучка имеют максвелловское распределение по скоростям. Электроны же плазмы имеют максвелловское распределение в лабораторной системе координат. Тогда для продольной диэлектрической проницаемости системы плазма — пучок  $\epsilon(\omega, k)$  можно воспользоваться соотношением (32.14)

$$\epsilon(\omega, k) = \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon_{ij}(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \cdot \left[ 1 - J_+ \left( \frac{\omega - k u_{\alpha}}{k v_{T\alpha}} \right) \right]. \quad (52.13)$$



Суммирование распространяется по электронам плазмы и пучка. Нетрудно записать также выражение для функции  $F(\omega, \mathbf{k})$ , которое согласно (52.6) определяет эффективную температуру флуктуаций:

$$F(\omega, \mathbf{k}) = \sum_{\alpha} \sqrt{32\pi^3} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^3 v_{T\alpha}^3} \exp \left[ -\frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{\alpha})^2}{2k^2 v_{T\alpha}^2} \right]. \quad (52.14)$$

В гл. VI было показано, что при достаточно малых скоростях пучков система плазма — пучок устойчива, а следовательно, к ней применима изложенная ранее общая теория флуктуаций неравновесной плазмы\*. При скорости пучка, превышающей некоторое критическое значение, в плазме начинают развиваться различные типы неустойчивостей. При этом с возрастанием скорости пучка сначала развиваются кинетические неустойчивости, связанные с изменением знака мнимой части диэлектрической проницаемости  $\text{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ , а затем — гидродинамические, нарастание которых не зависит от теплового движения частиц (и, следовательно, от  $\text{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ ). Рассмотрим поэтому флуктуации в плазме, которая находится в докритическом состоянии. Ограничимся областью прозрачности, когда для флуктуаций продольного поля может быть применена формула (52.4). Из этой формулы прежде всего следует, что с приближением плазмы к кинетически неустойчивому состоянию флуктуации в ней неограниченно возрастают. Должна неограниченно возрастать и эффективная температура, величина которой согласно (52.6) и (52.13), (52.14) определяется выражением

$$\begin{aligned} T_{\text{эфф}} &= \frac{\omega F(\omega, \mathbf{k})}{8\pi \text{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})} \approx \\ &\approx \frac{\frac{N_b}{\sqrt{T_b}} \exp \left( -\frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2}{2k^2 v_{Tb}^2} \right) + \frac{N_e}{\sqrt{T_e}} \exp \left( -\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2} \right)}{\frac{N_b}{T_b^{3/2}} \cdot \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}}{\omega} \exp \left( -\frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2}{2k^2 v_{Tb}^2} \right) + \frac{N_e}{T_e^{3/2}} \exp \left( -\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2} \right)}, \quad (52.15) \end{aligned}$$

в котором частота и волновой вектор связаны дисперсионным уравнением  $\text{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 0$ .

В дальнейшем плотность пучка будем считать малой:  $N_b \ll N_e$ . При этом вкладом пучка в действительную часть диэлектрической проницаемости можно пренебречь. Вклад же пучка в мнимую часть диэлектрической проницаемости, так же как и в функцию  $F(\omega, \mathbf{k})$ , с приближением плазмы к кинетически неустойчивому состоянию является определяющим. Рассмотрим высокочастотную область прозрачности  $\omega^2 \gg k^2 v_{Te}^2$ , спектр колебаний плазмы, в которой

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 + 3k^2 v_{Te}^2. \quad (52.16)$$

\* Строго говоря, это справедливо лишь для электростатических возмущений, т. е. система плазма — пучок устойчива при малых скоростях пучка по отношению к продольным (электростатическим) возмущениям поля.

Для пучка с большим тепловым разбросом частиц по скоростям, когда

$$|\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}| < kv_{tb}, \quad (52.17)$$

выражение (52.15) упрощается:

$$T_{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k}) = \left(1 + \frac{N_b}{N_e} \sqrt{\frac{T_e}{T_b}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2v_{te}^2}\right)\right) T_e \frac{1}{\left[1 + \frac{N_b}{N_e} \left(\frac{T_e}{T_b}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2v_{te}^2}\right)\right] \left(1 - \frac{u}{u_{кр}} \cos \theta\right)}. \quad (52.18)$$

Здесь введено обозначение

$$u_{кр} = \frac{\omega}{k} \left[1 + \frac{N_e}{N_b} \left(\frac{T_b}{T_e}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2v_{te}^2}\right)\right]. \quad (52.19)$$

Из (52.18) видно неограниченное возрастание эффективной температуры флуктуаций при скоростях пучка  $u$ , приближающихся к критической скорости  $u_{кр}$ , соответствующей началу развития кинетической неустойчивости в системе.

Возрастание флуктуаций в плазме с приближением ее к неустойчивому состоянию, получившее название явления к р и т и ч е с к о й о п а л е с ц е н ц и и (см. § 54), обуславливает резкое увеличение рассеяния электромагнитных волн в такой плазме.

### § 53. Флуктуации и столкновения частиц в плазме

В предыдущих параграфах флуктуации в плазме рассматривались в пренебрежении столкновениями частиц. Проанализируем связь столкновительных и флуктуационных процессов, которая особенно наглядно проявляется для плазмы как системы заряженных частиц, силы взаимодействия которых — далекодействующие. Данный вопрос имеет два аспекта. Первый из них заключается в том, что столкновения должны оказывать существенное влияние на вид корреляторов флуктуаций электромагнитных полей и параметров плазмы, так как флуктуации определяются диссипацией электромагнитной энергии в плазме, которая, в частности, обусловлена столкновениями частиц. Учет столкновений при этом можно достаточно просто провести с привлечением рассмотренных общих методов. Действительно, поскольку флуктуации полностью определяются (по крайней мере, в термодинамически равновесной плазме) диэлектрической проницаемостью плазмы, точнее, ее антиэрмитовской частью, расчет флуктуаций можно проводить с помощью приведенных в предыдущих параграфах соотношений, например (50.2), (50.4) для равновесной плазмы, в которые следует подставить выражения для тензора  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ , учитывающие столкновения частиц. Так, для слабоионизованной невырожденной плазмы необходимо пользоваться выражениями (21.8)

и (27.6), (27.7), для вырожденной плазмы — выражениями (21.19) и (27.6), (27.11). В случае полностью ионизованной плазмы тензор  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  с учетом столкновений частиц в различных пределах определяется формулами, приведенными в § 22 и 28.

С принципиальной точки зрения дальнейшее рассмотрение флуктуаций электромагнитных полей и параметров плазмы не затруднительно, но связано с громоздкими выкладками. Физически же влияние столкновений на корреляторы флуктуаций различных величин вполне ясно. В самом деле, столкновительная диссипация должна приводить к двоякого рода эффектам. Вдали от областей прозрачности флуктуации должны возрастать вследствие появления дополнительного диссипативного механизма. С другой стороны, по той же причине должно измениться и спектральное распределение флуктуаций вблизи резонансных частот. В предыдущих параграфах считалось, что вблизи частот собственных слабозатухающих колебаний плазмы флуктуации пропорциональны  $\delta$ -функциям от соответствующих частот, т. е. неограниченно возрастают вблизи них. Однако реально флуктуации конечны и при резонансных частотах в силу наличия затухания Ландау. При этом резонансные пики имеют не только конечную амплитуду, но и конечную ширину. Учет столкновений должен привести к усилению этих эффектов, а именно, к уменьшению амплитуды резонансных флуктуаций и уширению резонанса.

Рассмотрим в качестве примера флуктуации плотности заряда в изотропной плазме при учете столкновений частиц вблизи частот собственных плазменных колебаний. Если частоту столкновений считать малой:  $\omega \gg \nu_e, kv_{Te}$ , то столкновительная поправка к продольной диэлектрической проницаемости как для слабоионизованной, так и для полностью ионизованной плазмы будет иметь вид [см. (21.10) и (22.5)]:

$$\text{Im } \delta\varepsilon_{sl}^l(\omega, k) = \frac{\omega_{Le}^2 \nu_e}{\omega^3}, \quad (53.1)$$

где  $\nu_e = \nu_{en}$  — для слабоионизованной плазмы и  $\nu_e = \nu_{эфф}$  — для полностью ионизованной плазмы.

Подставляя это выражение в (51.4), получаем следующие соотношения для флуктуаций плотности заряда; вблизи резонансной частоты  $\omega^2 = \omega_{рез}^2 = \omega_{Le}^2 + 3k^2 v_{Te}^2$

$$\langle \rho^2 \rangle_{рез, \omega, k} \approx \frac{k^2 T}{2\pi\omega} \cdot \frac{1}{\text{Im } \varepsilon^l(\omega, k)} \approx \frac{k^2 T \omega^2}{(2\pi)^2 \omega_{Le}^2 \nu_e}, \quad (53.2)$$

в области частот вне резонанса

$$\langle \rho^2 \rangle_{\omega, k} \approx \frac{k^2 T}{2\pi} \cdot \frac{\omega_{Le}^2 \nu_e}{(\omega^2 - \omega_{Le}^2 - 3k^2 v_{Te}^2)^2 + \left( \frac{\omega_{Le}^2 \nu_e}{\omega} \right)^2}. \quad (53.3)$$

Из этих соотношений видно, что при возрастании  $\nu_e$  величина  $\langle \rho^2 \rangle_{\omega, k}$  снижается, а ширина резонансной кривой растет. При  $\nu_e \rightarrow 0$

из (53.3) получаем выражение (51.8) для бесстолкновительной плазмы.

Другой аспект рассматриваемого вопроса состоит в том, что сами столкновения тесно связаны с флуктуациями. Для столкновений с нейтральными частицами в слабоионизованной плазме это особенно очевидно, так как там силы взаимодействия очень быстро убывают с расстоянием и столкновение есть в прямом смысле слова тесное сближение частиц. Но это и есть флуктуация по отношению к однородному в среднем пространственному распределению частиц. Несколько сложнее дело обстоит в случае полностью ионизованной плазмы, в которой силы взаимодействия частиц медленно убывают с расстоянием. По существу этот вопрос был затронут в общей форме при обсуждении возможности описания плазмы с помощью бесстолкновительного кинетического уравнения Власова. Действительно, определив поле в плазме через функцию распределения частиц, усредненную по флуктуациям, флуктуационные эффекты, также связанные с кулоновским взаимодействием частиц, можно было вынести в правую часть кинетического уравнения и отождествить их со столкновениями. Для обычного газа, в котором частицы в целом нейтральны, вследствие чего силы взаимодействия между ними очень быстро убывают с расстоянием, такое отождествление вполне законно и используется в кинетической теории газов. В полностью ионизованной плазме, в которой силы взаимодействия частиц медленно убывают с расстоянием, вклад во флуктуационное взаимодействие, связанный с одновременным взаимодействием многих, хотя и достаточно удаленных частиц, оказывается более существенным, чем отдельные сближения частиц, которые и являются парными столкновениями. Поэтому в полностью ионизованной плазме понятие столкновения имеет условный смысл, и для описания флуктуационного взаимодействия более удобна непрерывная модель, рассматривающая его не как дискретный процесс парных столкновений, а как непрерывно действующую силу кулоновского трения. Следствием этого и явился тот факт, что процесс вычисления интеграла столкновений для полностью ионизованной плазмы (см. § 13) привел к уравнению Фоккера—Планка (13.12), которое является основным в непрерывной модели описания различных случайных процессов. Для пояснения сказанного получим уравнение Фоккера—Планка общим методом.

Рассмотрим поведение функции распределения заряженных частиц в плазме под влиянием флуктуационного взаимодействия, или иначе под влиянием кулоновских соударений. Пусть в момент времени  $t$  функция распределения  $f(\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}, t)$ , а в момент времени  $t + \Delta t$  под влиянием флуктуационного взаимодействия она изменится и станет  $f(\mathbf{v}, t + \Delta t)$ . Если вероятность такого перехода из одного состояния в другое (с одной фазовой траектории на другую) равна  $W(\Delta\mathbf{v}, \Delta t)$ , то можно записать

$$f(\mathbf{v}, t + \Delta t) = \int f(\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}, t) W(\Delta\mathbf{v}, \Delta t) d\Delta\mathbf{v}, \quad (53.4)$$

где  $d\Delta\mathbf{v}$  — полный дифференциал, т. е. произведение дифференциалов компонент вектора изменения скорости.

Разлагая левую часть уравнения (53.4) в ряд Тейлора по степеням  $\Delta t$ , а правую — по степеням  $\Delta \mathbf{v}$  и ограничиваясь первыми членами разложений, можно преобразовать его в дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial v_i} \frac{\langle \Delta v_i \rangle}{\Delta t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f(\mathbf{v}, t)}{\partial v_i \partial v_j} \cdot \frac{\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle}{\Delta t}, \quad (53.5)$$

которое называется уравнением Фоккера—Планка. Здесь

$$\begin{aligned} \int W(\Delta \mathbf{v}, \Delta t) d\Delta \mathbf{v} &= 1, \\ \int W(\Delta \mathbf{v}, \Delta t) \Delta v_i d\Delta \mathbf{v} &= \langle \Delta v_i \rangle, \\ \int W(\Delta \mathbf{v}, \Delta t) \Delta v_i \Delta v_j d\Delta \mathbf{v} &= \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle, \end{aligned} \quad (53.6)$$

причем первое соотношение является условием нормировки, а следующие — обычным определением средних значений. Уравнение (53.5) можно записать также в форме

$$\frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_i} \left( D_{ij} \frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial v_j} - A_i f(\mathbf{v}, t) \right), \quad (53.7)$$

где величины

$$A_i = - \frac{\langle \Delta v_i \rangle}{\Delta t}, \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle}{\Delta t} \quad (53.8)$$

называются коэффициентами Фоккера — Планка. Уравнение (53.7) по виду совпадает с (13.12), однако коэффициенты Фоккера—Планка (коэффициенты динамического трения и диффузии в пространстве скоростей) непосредственно выражены через флуктуации скоростей.

Заметим, что согласно кинетической теории газов отброшенные члены в разложении (53.5), содержащие более высокие степени  $\Delta v_i$ , описывают парные столкновения, при которых скорость претерпевает резкие скачкообразные изменения, а их суммирование приводит к интегралу столкновений Больцмана. Из физических соображений ясно, что коэффициент динамического трения в пространстве скоростей  $A_i$  характеризует среднее изменение абсолютного значения скорости частиц за единицу времени, вследствие чего он может быть выражен через потери энергии направленного движения заряженных частиц в плазме (см. задачу 4 к гл. II). Коэффициент  $D_{ij}$  имеет чисто флуктуационное происхождение и характеризует направленное изменение скорости частиц вследствие рассеяния на флуктуационных полях в плазме, поэтому он называется коэффициентом диффузии в пространстве скоростей.

Коэффициенты  $A_i$  и  $D_{ij}$  можно вычислить из формул (53.8) и уравнений движения заряженных частиц во флуктуационных полях. Однако поступим иначе. Из сравнения выражений (13.12), (13.13), (14.5), (52.1) и формулы (7) задачи 4 к гл. II выразим коэффициенты  $A_i$  и  $D_{ij}$

через флуктуации продольного поля и потери энергии пробной частицы на возбуждение продольного поля в плазме. Для простоты ограничимся рассмотрением невырожденной изотропной электронной плазмы с учетом лишь электрон-электронных столкновений. Согласно (13.13) и (14.5) коэффициенты  $D_{ij}$  и  $A_i$  при этом запишутся в виде

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = 2e^4 \int d\mathbf{p}' f(\mathbf{v}') \int d\mathbf{k} \frac{k_i k_j \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}')}{k^2 |\varepsilon^l(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})|^2}, \quad (53.9)$$

$$A_i(\mathbf{v}) = 2e^4 \int d\mathbf{p}' \frac{\partial f(\mathbf{v}')}{\partial p_j'} \int \frac{d\mathbf{k}}{2} \cdot \frac{k_i k_j \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}')}{k^2 |\varepsilon^l(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})|^2}.$$

С другой стороны, согласно (52.1) для электронной плазмы имеем

$$\langle E^{l2} \rangle_{\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k}} = \frac{32\pi^3 e^2}{k^2 |\varepsilon^l(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})|^2} \int d\mathbf{p}' f(\mathbf{v}') \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}'). \quad (53.10)$$

Из сравнения (53.9) и (53.10) следует, что

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{e^2}{16\pi^3} \int d\mathbf{k} \frac{k_i k_j}{k^2} \langle E^{l2} \rangle_{\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k}}, \quad (53.11)$$

т. е. коэффициент диффузии выражается через флуктуации продольного поля в плазме.

Выразим теперь коэффициент динамического трения  $A_i$  через поляризационные потери энергии пробной частицы в плазме. С этой целью запишем выражение для продольного поля излучения движущегося электрона в изотропной плазме [см. формулу (7) задачи 4 к гл. III]:

$$\mathbf{E}^l(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k}) = -\frac{4\pi i e}{k^2} \frac{\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \varepsilon^l(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})}. \quad (53.12)$$

Учитывая, что согласно (17.11)

$$\text{Im} \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = -i\pi \frac{4\pi e^2}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v}) \mathbf{k}}{k^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}), \quad (53.13)$$

находим окончательно

$$A_i(\mathbf{v}) = \frac{1}{32\pi^3} \int d\mathbf{k} k_i \text{Im} \varepsilon^l(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k}) \mathbf{E}^l(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k}) \mathbf{E}^{l*}(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k}). \quad (53.14)$$

Отсюда видно, что коэффициент динамического трения выражается через продольное поле, создаваемое в плазме движущимся электроном. Это поле ответственно за поляризационные потери энергии движущегося электрона.

Отметим, что коэффициенты  $A_i$  и  $D_{ij}$  выражены через продольные поля в плазме. В действительности вклад дают также поперечные поля — потери на излучение волн и флуктуации поперечного поля. Однако в нерелятивистской плазме вклад поперечных полей пренебрежимо мал. В изотропной плазме поперечные волны вообще не из-

лучаются, а флуктуации поперечного поля малы по сравнению с флуктуациями продольного поля в  $c^3/v_{Te}^3$  раз (см. задачу 1 к гл. X). Поэтому и рассеянием частиц на флуктуациях поперечного поля можно пренебречь.

Таким образом, было показано, что интеграл столкновений в кинетическом уравнении для заряженных частиц в полностью ионизованной нерелятивистской плазме выражается через флуктуации продольного поля. Это означает, что изменение импульса заряженных частиц из-за кулоновских столкновений можно трактовать как потери энергии и диффузию в пространстве скоростей вследствие рассеяния частиц в случайных электростатических полях, обусловленных тепловыми флуктуациями в плазме. Такую тесную взаимосвязь между тепловыми флуктуациями и столкновениями заряженных частиц в термодинамически равновесной полностью ионизованной плазме можно усмотреть также из соотношения (51.14), если переписать его в виде

$$\frac{\langle E^{12} \rangle_r}{4\pi N_e T_e} \approx \left( \frac{e^2 N_e^{1/3}}{T_e} \right)^{3/2} \approx \frac{v_{эфф}}{\omega_{Le}} \ll 1. \quad (53.15)$$

Из этого соотношения следует равенство относительной энергии флуктуации продольного поля (по отношению к тепловой энергии) и относительной эффективной частоты столкновений электронов в плазме (по отношению к собственной частоте плазменных колебаний).

#### § 54. Рассеяние электромагнитных волн в плазме

При распространении электромагнитных волн в средах со случайными неоднородностями появляются волны с частотами и волновыми векторами, т. е. направлениями распространения, отличными от частоты и волнового вектора основной волны. Происходит так называемый процесс рассеяния. Если среда пространственно однородна, но параметры, определяющие ее электромагнитные свойства, испытывают флуктуации, то рассеяние должно происходить на этих флуктуациях, которые играют роль случайных неоднородностей.

Механизм появления в среде рассеянных волн сводится к возникновению в ней под действием основной волны индуцированных зарядов и токов, приводящих к излучению новых — рассеянных волн. Однако, как указывалось, в однородной среде в линейном приближении индуцированные заряды и токи обуславливали лишь изменение характеристик распространения волн в среде по сравнению с вакуумом — изменение комплексного показателя преломления. Частота же и закон дисперсии распространяющейся волны при этом были строго постоянными. Картина существенно изменяется при наличии в среде флуктуаций. Так, если флуктуирует плотность заряженных частиц, то будет флуктуировать и индуцированный в плазме ток, причем флуктуирующая добавка может вызвать излучение волн с новыми свойствами — частотой и направлением распространения (р а с с е я н и е) или даже

привести к появлению волн другого типа (т р а н с ф о р м а ц и я)\*. В свою очередь новые волны изменяют состояние плазмы, вызывая появление связанных с ними индуцированных токов, которые сами могут влиять на распространение основной волны. Происходит процесс сложного нелинейного взаимодействия полей и токов в плазме, который раньше полностью игнорировался. В этом и следующем параграфах исследуем некоторые свойства указанных нелинейных процессов, считая их, однако, малыми. Это позволяет говорить отдельно о падающей и рассеянной волнах и считать поле падающей волны, а также параметры плазмы заданными. Заметим предварительно, что, как показано в § 49, флуктуации описываются квадратичными формами, поэтому процессы взаимодействия полей регулярных волн и флуктуационных полей требуют использования нелинейных уравнений.

В этом параграфе рассмотрим процесс рассеяния поперечных электромагнитных волн в плазме как имеющий большое самостоятельное практическое значение, в частности, с точки зрения изучения распространения и поглощения волн в плазме. Ограничимся для простоты изотропной плазмой. Тогда можно утверждать, что для области прозрачности распространяющихся волн  $\omega > \omega_{Le}$  плазму можно считать чисто электронной и пренебречь эффектами, связанными с пространственной дисперсией диэлектрической проницаемости, т. е. использовать для диэлектрической проницаемости простое выражение

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_{Le}^2/\omega^2. \quad (54.1)$$

Итак, пусть в плазме распространяется поперечная электромагнитная волна

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_0(t, \mathbf{r}) \\ \mathbf{B}_0(t, \mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{B}_0 \end{pmatrix} \exp(-i\omega_0 t + i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}), \quad (54.2)$$

где  $k_0^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2} \varepsilon(\omega_0)$ .

Рассмотрим ее рассеяние на флуктуациях плотности электронов, т. е. вычислим поле рассеянной волны, которую представим в виде

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E} \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (54.3)$$

Поле рассеянной волны можно определить из волнового уравнения

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \frac{\varepsilon(\omega)}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad (54.4)$$

где  $\mathbf{j}$  — часть индуцированного в плазме тока, вызывающая появление рассеянной волны.

---

\* Вопросы рассеяния и трансформации обсуждаются также в гл. XII на основе представлений о нелинейном взаимодействии волн в плазме.



В общем случае плотность заряженных частиц и их скорость в плазме могут быть представлены в виде сумм:

$$N(t, \mathbf{r}) = N_{0e} + \delta N_n + \delta N_\phi + \delta N_p, \quad (54.5)$$

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) = \delta \mathbf{u}_n + \delta \mathbf{u}_\phi + \delta \mathbf{u}_p.$$

Здесь  $N_{0e}$  — среднее (по флуктуациям) равновесное значение плотности электронов в плазме;  $\delta N_n$  и  $\delta \mathbf{u}_n$  — возмущения плотности и скорости электронов, вызванные полем падающей волны;  $\delta N_\phi$  и  $\delta \mathbf{u}_\phi$  — флуктуации плотности и скорости частиц;  $\delta N_p$  и  $\delta \mathbf{u}_p$  — возмущения плотности и скорости электронов, связанные с рассеянной волной.

Если пренебречь тепловыми эффектами, т. е. считать фазовые скорости падающей и рассеянной волн много большими тепловой скорости частиц, то для анализа процессов в плазме можно использовать гидродинамическое описание; поэтому под  $\mathbf{u}$  в (54.5) следует понимать гидродинамическую скорость электронов в плазме. Величины  $\delta N_n$  и  $\delta \mathbf{u}_n$  определяют при этом из линеаризованных уравнений движения и непрерывности с учетом лишь падающей волны:

$$\delta \mathbf{u}_n = \frac{ie\mathbf{E}_0(t, \mathbf{r})}{m\omega_0}, \quad \delta N_n = \frac{iek_0 E_0(t, \mathbf{r})}{m\omega_0^2}. \quad (54.6)$$

Величины  $\delta \mathbf{u}_p$  и  $\delta N_p$  удовлетворяют уравнениям движения и непрерывности:

$$\frac{\partial \delta \mathbf{u}_p}{\partial t} = \frac{e}{m} \mathbf{E} + \frac{e}{mc} [\delta \mathbf{u}_\phi \mathbf{B}_0] - (\delta \mathbf{u}_n \nabla) \delta \mathbf{u}_\phi - (\delta \mathbf{u}_\phi \nabla) \delta \mathbf{u}_n, \quad (54.7)$$

$$\frac{\partial \delta N_p}{\partial t} + N_{0e} \operatorname{div} \delta \mathbf{u}_p + N_n \operatorname{div} \delta \mathbf{u}_\phi + \delta N_\phi \operatorname{div} \delta \mathbf{u}_n = 0.$$

Флуктуации скорости и плотности также связаны уравнением непрерывности. При написании (54.7) было учтено, что величины  $\delta N_\phi$ ,  $\delta \mathbf{u}_\phi$ ,  $\delta N_p$ ,  $\delta \mathbf{u}_p$  имеют более высокий порядок малости, чем  $\delta N_n$  и  $\delta \mathbf{u}_n$ . Кроме того, предполагалось, что величины  $\delta N_n$  и  $\delta \mathbf{u}_n$  зависят от времени и координат так же, как и падающая волна (54.2), т. е.  $\sim \exp(-i\omega_0 t + ik_0 \mathbf{r})$ , а величины  $\delta N_p$  и  $\delta \mathbf{u}_p$  — как рассеянная волна (54.3), т. е.  $\sim \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ ; при этом  $\delta N_\phi$  и  $\delta \mathbf{u}_\phi$  изменяются как  $\sim \exp(-i\Delta\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r})$ . В результате из (54.7) получаем

$$\delta \mathbf{u}_p = i \frac{e}{m\omega} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\delta \mathbf{u}_\phi \mathbf{B}_0] \right\} + \frac{1}{\omega} [(\mathbf{q}\delta \mathbf{u}_n) \cdot \delta \mathbf{u}_\phi + (\mathbf{k}\delta \mathbf{u}_\phi) \delta \mathbf{u}_n], \quad (54.8)$$

причем  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ ,  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ .

Ограничимся далее лишь продольными флуктуациями, для которых  $\delta \mathbf{u}_\phi \parallel \mathbf{q}$ , поэтому из уравнения непрерывности следует, что

$$\delta \mathbf{u}_\phi = \frac{\Delta\omega \mathbf{q}}{N_{0e} q^2} \delta N_\phi. \quad (54.9)$$

Плотность тока, связанного с рассеянной волной,

$$\mathbf{j}_p = e(N_{0e}\delta\mathbf{u}_p + \delta N_n\delta\mathbf{u}_\Phi + \delta N_\Phi\delta\mathbf{u}_n). \quad (54.10)$$

Из этого выражения необходимо вычесть величину

$$\mathbf{j}_p \Big|_{\delta N_\Phi=0} = eN_{0e}\delta\mathbf{u}_p \Big|_{\delta N_\Phi=0} = \frac{ie^2N_{0e}}{m\omega} \mathbf{E}, \quad (54.11)$$

которая соответствует плотности тока, связанного с рассеянной волной при отсутствии флуктуаций. Таким образом, можно найти плотность входящего в (54.4) тока рассеяния:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_p - \mathbf{j}_p \Big|_{\delta N_\Phi=0}. \quad (54.12)$$

Подставляя в (54.12) выражения (54.10) и (54.11), получаем

$$\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{ie^2}{m\omega_0} \left[ \mathbf{E}_0 + \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{\mathbf{k}}{q^2} (\mathbf{q}\mathbf{E}_0) + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \cdot \frac{\mathbf{q}}{q^2} (\mathbf{k}_0\mathbf{E}_0) \right] \delta N_\Phi(\Delta\omega, \mathbf{q}). \quad (54.13)$$

Из этого выражения видно, что плотность тока имеет как поперечную (первое слагаемое), так и продольную компоненты (второе и третье слагаемые), причем продольная компонента (при условии поперечности  $\mathbf{E}_0$ , а следовательно, и  $\delta\mathbf{u}_n$ ) возникает из-за нелинейности уравнения движения. При этом поперечная компонента  $\mathbf{j}$  вызывает появление рассеянной поперечной волны, а продольная — продольной волны, т. е. трансформацию поперечной волны в продольную.

Выделим из (54.13) поперечную (по отношению к вектору  $\mathbf{k}$ ) компоненту плотности тока и подставим ее в уравнение (54.4) в качестве стороннего тока. Тогда решение этого уравнения даст поле рассеянной волны

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) = i \frac{4\pi\omega}{c^2} \cdot \frac{\mathbf{j}_\perp(\omega, \mathbf{k})}{k^2 - \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad (54.14)$$

где для  $\mathbf{j}_\perp(\omega, \mathbf{k})$  из (54.13) получаем следующее выражение:

$$\delta\mathbf{j}_\perp(\omega, \mathbf{k}) = \frac{ie^2}{m\omega_0} \delta N_\Phi(\Delta\omega, \mathbf{q}) \mathbf{E}_0. \quad (54.15)$$

Определим приращение энергии рассеянных волн в единицу времени:

$$\delta Q = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int d\mathbf{r} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \delta\mathbf{j}^*(t, \mathbf{r}). \quad (54.16)$$

Переходя к Фурье-компонентам и производя усреднение, получим с учетом (54.14), (54.15) и соотношения (49.5), которое здесь запишем в виде

$$\langle \delta N_\Phi^*(\Delta\omega', \mathbf{q}) \delta N(\Delta\omega, \mathbf{q}) \rangle = \delta(\omega - \omega') \cdot \langle \delta N^2 \rangle_{\omega, \mathbf{q}}, \quad (54.17)$$

выражение для среднего приращения энергии рассеянных волн:

$$\overline{\delta Q} = \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \frac{e^4}{m^2 c^2 \omega_0^2} \operatorname{Im} \int d\omega d\mathbf{k} \omega \frac{\langle \delta N_e^2 \rangle_{\Delta\omega, \mathbf{q}} E_{0\perp}^2}{k^2 - \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (54.18)$$

Здесь  $V$  — объем,  $E_{0\perp} = \frac{1}{k^2} [k[kE_0]]$ , а  $\langle \delta N_e^2 \rangle_{\Delta\omega, \mathbf{q}}$  дается выражением (52.8).

Поскольку подынтегральное выражение вещественно, вклад в мнимую часть (54.18) дают только полюсы подынтегрального выражения. Учитывая далее, что можно сделать формальную замену\*

$$\left\{ k^2 - \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \right\}^{-1} \rightarrow i\pi\delta \left\{ k^2 - \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \right\}, \quad (54.19)$$

и, проводя в (54.18) интегрирование по модулю  $k$  с помощью  $\delta$ -функции, получаем

$$\overline{\delta Q} = \frac{cV}{16\pi^2} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\varepsilon(\omega)} E_{0\perp}^2 \langle \delta N_e^2 \rangle_{\Delta\omega, \mathbf{q}} d\omega d\Omega, \quad (54.20)$$

где  $d\Omega$  — элемент телесного угла.

Отметим, что в (54.20) волновой вектор  $k$  и частота  $\omega$  связаны обычным дисперсионным уравнением для поперечной волны  $k^2 = \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}$ , и их можно рассматривать как волновой вектор и частоту рассеянной волны. Величины  $\mathbf{q}$  и  $\Delta\omega$  приобретают при этом смысл изменения волнового вектора и частоты при рассеянии.

Выберем систему координат так, чтобы вектор  $k$  был направлен по оси  $Oz$ , а вектор  $k_0$  лежал в плоскости  $yz$ , и обозначим угол между векторами  $k$  и  $k_0$  через  $\theta$  (рис. 46). Тогда перпендикулярная к вектору  $k$  компонента электрического вектора падающей волны  $E_{0\perp}$  выразится формулой

$$E_{0\perp}^2 = E_0^2 (\cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi),$$

где  $\varphi$  — угол между осью  $Ox$  и вектором  $E_0$ .

Для неполяризованной падающей волны это выражение нужно усреднить по углу  $\varphi$ , в результате чего получим

$$\overline{E_{0\perp}^2} = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) E_0^2. \quad \{ (54.21) \}$$

Для характеристики рассеивающих свойств среды обычно вводят понятие дифференциального сечения рассеяния, определяемого как отношение интенсивности рассеянных (в интервале частот  $\Delta\omega$  в элементе телесного угла  $d\Omega$ ) волн к потоку падающей на рассеивающий объем  $V$  энергии. Величину потока падающей энергии находят как произведение вектора Пойнтинга на объем  $V$ , поэтому

\* Такая замена является следствием существования малой положительной мнимой части  $\varepsilon(\omega)$ , обусловленной столкновениями частиц.

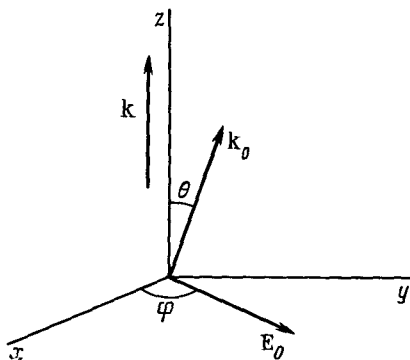


Рис. 46

дифференциальное сечение рассеяния для неполяризованной волны с учетом (54.20) и (54.21) определяется выражением

$$d\Sigma = \frac{\overline{\delta Q}}{\frac{cV}{8\pi} \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} E_0^2} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \times \\ \times \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}} (1 + \cos^2 \theta) \langle \delta N_e^2 \rangle_{\Delta\omega, \mathbf{q}} d\omega d\Omega. \quad (54.22)$$

Полученная формула справедлива при любых значениях  $\Delta\omega$ , т. е. для произвольного изменения частоты при рассеянии. В наиболее интересном случае так называемого релеевского рассеяния, т. е. рассеяния с малым изменением частоты ( $\Delta\omega \ll \omega_0$ ), она упрощается. В результате получаем известное выражение для дифференциального сечения рассеяния на флуктуациях плотности электронов:

$$d\Sigma = \frac{3}{32\pi^2} \sigma_T (1 + \cos^2 \theta) \langle \delta N_e^2 \rangle_{\Delta\omega, \mathbf{q}} d\omega d\Omega, \quad (54.23)$$

где  $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2$  — томсоновское сечение рассеяния электромагнитных волн на свободных электронах, пропорциональное квадрату классического радиуса электронов.

При этом для вектора  $\mathbf{q}$  имеем

$$|\mathbf{q}| = \frac{2\omega_0}{c} \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} = 2 |\mathbf{k}_0| \sin \frac{\theta}{2}, \quad (54.24)$$

$$|\mathbf{k}| \approx |\mathbf{k}_0| = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega_0)}.$$

Проанализируем рассеяние электромагнитных волн на флуктуациях плотности электронов в неизотермической плазме. Для этого в

формулу (54.22) или (54.23) следует подставить общее выражение (52.8) для спектрального распределения флуктуаций плотности электронов. Получающееся при этом выражение для  $d\Sigma$  чрезвычайно громоздко и не может быть аналитически исследовано в общем случае. Поэтому проведем анализ только для наиболее интересных предельных случаев, отметив предварительно, что хотя рассеяние происходит на электронах плазмы, но в силу зависимости  $\langle \delta N_e^2 \rangle_{\Delta\omega, \mathbf{q}}$  от ионных характеристик от них оказывается зависящим и характер рассеяния.

Рассмотрим сначала короткие волны, когда  $q^2 r_{De}^2 \gg 1$ , т. е.  $\omega \gg \omega_{Le} \frac{c}{v_{Te}}$ . Как следует из выражения для  $\epsilon^l(\omega, k)$ , в этих условиях  $|\epsilon^l| \approx 1$ . Используя далее асимптотику для  $J_+ \left( \frac{\Delta\omega}{qv_{Ta}} \right)$ , из (54.23) получаем

$$d\Sigma = \frac{N_{0e}}{\sqrt{8\pi}} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (qv_{Te})^{-1} (1 + \cos^2 \theta) \exp \left[ -\frac{(\Delta\omega)^2}{2q^2 v_{Te}^2} \right] d\omega d\Omega, \quad (54.25)$$

т. е. при этом рассеяние происходит на изолированных электронах, имеющих тепловой разброс по скоростям. Уширение линии при рассеянии обусловлено эффектом Доплера и определяется тепловой скоростью электронов. Спектральное распределение рассеяния (или, иначе контур линии рассеяния) носит гауссовский характер.

Рассмотрим противоположный предельный случай:  $q^2 r_{De}^2 \ll 1$ , т. е.

$$\omega_{Le} < \omega \ll \omega_{Le} c/v_{Te}.$$

Здесь должны проявляться коллективные эффекты, связанные с самоогласованным взаимодействием электронной и ионной компонент плазмы. Проанализируем спектральное распределение рассеяния для различных частотных интервалов.

В области очень малых значений  $\Delta\omega$  ( $\Delta\omega \gg qv_{Ti}$ ), т. е. вблизи  $\omega_0$  (центр линии рассеяния), основной вклад в интенсивность должны давать заряды, скорость которых мала. Поскольку при сравнимых температурах электронов и ионов число ионов с малыми скоростями во много ( $\approx \sqrt{M/m}$ ) раз больше числа электронов, ясно, что форма линии рассеяния будет определяться ионным вкладом в  $\langle \delta N_e^2 \rangle_{\Delta\omega, \mathbf{q}}$  (ионными поляризационными облаками). В результате получаем

$$d\Sigma = \frac{N_{0e}}{\sqrt{8\pi}} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{qv_{Ti}} \left\{ 1 + \left[ \frac{m}{M} \left( \frac{T_e}{T_i} \right) \right]^3 \right\}^{1/2} \times \\ \times \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right)^{-2} (1 + \cos^2 \theta) d\omega d\Omega. \quad (54.26)$$

Отсюда видно, что сечение рассеяния с малым изменением частоты для сильно неизотермической плазмы с  $T_e \gg T_i$  может быть во много раз меньше, чем для изотермической плазмы.

Несколько дальше от центра линии рассеяния, где начинает выполняться условие  $\Delta\omega > qv_{Ti}$ , число резонансных ионов экспоненциально падает, соответственно резко падает и сечение рассеяния.

Естественно, что в этих условиях ширина линии рассеяния будет определяться тепловой скоростью ионов.

В области частот  $qv_{Ti} \ll \Delta\omega \ll qv_{Te}$  в сильно неизотермической плазме сечение рассеяния имеет резкие максимумы вблизи собственных ионно-звуковых частот плазмы  $|\Delta\omega| = qv_s$ . Для этой области следует использовать  $\langle \delta N_e^2 \rangle_{\Delta\omega, q}$  по формуле (52.10), откуда находим

$$d\Sigma = \frac{1}{2} N_{0e} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \theta) [\delta(\Delta\omega - qv_s) + \delta(\Delta\omega + qv_s)] d\omega d\Omega. \quad (54.27)$$

Наличие максимумов при  $\Delta\omega = \pm qv_s$  (ионно-звуковых сателлитов) соответствует резонансному рассеянию поперечной электромагнитной волны в неизотермической плазме, сопровождающемуся рождением ионно-звуковых волн, или распаду падающей поперечной волны с частотой  $\omega_0$  на поперечную волну с частотой  $\omega$  и ионно-звуковую волну с частотой  $\pm qv_s$ , т. е.  $\omega_0 = \omega \pm qv_s$ ,  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k} \pm \mathbf{q}$ .

Наконец, в области частот  $\Delta\omega \gg qv_{Te}$  сечение рассеяния имеет резкие максимумы вблизи частот плазменных колебаний  $(\Delta\omega)^2 \approx \omega_{Le}^2$ . В этой области вкладом ионов можно пренебречь. Тогда получим

$$d\Sigma = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \theta) \frac{N_{0e}}{qv_{Te}} \times \\ \times r_{De}^4 q^4 \frac{e^{-\frac{\beta^2}{2}}}{\left( r_{De}^2 q^2 - \frac{1}{\beta^2} \right)^2 + \frac{\pi}{2} \beta^2 e^{-\beta^2}} d\omega d\Omega, \quad (54.28)$$

где  $\beta = \frac{\Delta\omega}{qv_{Te}}$ , т. е. вблизи частот  $(\Delta\omega)^2 \approx \omega_{Le}^2$  имеется так называемый плазменный пик (ленгмюровский или плазменный сателлит), форма контура которого имеет дисперсионный характер\*.

Наличие такого пика соответствует резонансному распаду падающей поперечной волны при рассеянии на поперечную и плазменную с выполнением законов сохранения  $\omega_0 = \omega \pm \omega_{Le}$ ,  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k} \pm \mathbf{q}$ .

Общий характер спектрального распределения релеевского рассеяния ( $\Delta\omega \ll \omega_0$ ) повторяет зависимость спектрального распределения флуктуаций плотности электронов от безразмерной частоты  $\Delta\omega/qv_{Te}$  [см. (54.23)] и описывается графиками, аналогичными представленным на рис. 45. Разница заключается в том, что, поскольку  $\Delta\omega$  может быть как больше, так и меньше нуля, для получения полной формы контура рассеяния графики рис. 45 следует зеркально отобразить вокруг оси ординат. Таким образом, рис. 45 дает представление о той половине контура рассеяния поперечной волны в плазме, которая соответствует появлению рассеянных волн с частотами  $\omega > \omega_0$ .

\* Форму контура линии рассеяния, либо поглощения, имеющей вид  $f(\omega) \sim [(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2]^{-1}$ , в оптике принято называть дисперсионной.

Из рис. 45 и приведенного анализа следует, что характер рассеяния при  $q^2 r_{De}^2 \ll 1$  (на рис. 45 соответствует  $k^2 r_{De}^2 = 0,1$ ) для изотермической ( $T_e = T_i$ ) и сильно неизотермической ( $T_e \gg T_i$ ) плазмы существенно различен.

В изотермической плазме в спектре рассеяния имеется центральный максимум и высокочастотный боковой пик (при  $\Delta\omega/qv_{Te} \approx 2,6$ ), вызванный рассеянием на электронных ленгмюровских колебаниях [см. формулу (51.8)]. Центральный максимум связан с некогерентным рассеянием на электронах, однако вследствие самосогласованного взаимодействия электронной и ионной компонент (наличие вокруг электронов ионных поляризационных облаков) его доплеровская ширина определяется тепловой скоростью ионов.

При переходе к сильно неизотермической плазме центральный максимум пропадает и появляются два низкочастотных пика, расположенных симметрично относительно центра линии рассеяния на частотах собственных ионно-звуковых колебаний плазмы  $\Delta\omega = \pm qv_s$  (на рис. 45, естественно, виден только пик, соответствующий  $\Delta\omega = +qv_s$ ). Вид плазменных пиков при этом сохраняется.

Наконец, выпишем интегральное по всему спектру рассеянных частот сечение при заданном угле  $\vartheta$ . Они легко получаются путем интегрирования спектрального распределения (54.23) по  $\omega$ :

$$\Delta\Sigma = \frac{1}{2} N_{0e} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2\vartheta) d\Omega \begin{cases} 1 + q^2 r_{De}^2 & \text{при } T_e \leq T_i \\ 2 + q^2 r_{De}^2 & \text{при } T_e \gg T_i \end{cases}. \quad (54.29)$$

Заметим, что основной вклад в это сечение дает область частот  $\Delta\omega \leq qv_{Te}$  (в частности, ионно-звуковые сателлиты в случае неизотермической плазмы); вклад плазменных (ленгмюровских) сателлитов в интегральное по частотам сечение пренебрежимо мал.

Проанализируем влияние столкновений на спектральное распределение линии рассеяния. Ограничимся случаем слабоионизованной плазмы, тогда сечение рассеяния будет определяться по-прежнему общей формулой (54.22), в которую нужно подставить коррелятор  $\langle \delta N_e^2 \rangle_{\Delta\omega, q}$ , вычисленный с помощью выражения (21.8) (см. предыдущий параграф). Аналитический расчет формы контура рассеяния в этом случае связан с громоздкими вычислениями, поэтому обычно расчет проводят численными методами. Результаты такого расчета приведены на рис. 47, на котором показано искажение формы контура рассеяния за счет столкновений. Видно, что учет столкновений приводит к сужению основного контура рассеяния, причем гауссовское распределение по частотам переходит в распределение, близкое к дисперсионному. В высокочастотной области контура линии рассеяния влияние столкновений проявляется в уширении плазменного пика в соответствии с формулой (53.3), из которой сразу можно найти спектральное распределение коррелятора  $\langle \delta N_e^2 \rangle_{\Delta\omega, q}$  в этой области частот. На рис. 47  $k \equiv q$ .

В заключение кратко обсудим вопрос о рассеянии волн в неравновесной плазме с пучком, в которой возможно развитие неустойчивостей. В случае, когда скорость пучка меньше критической и плазма устой-

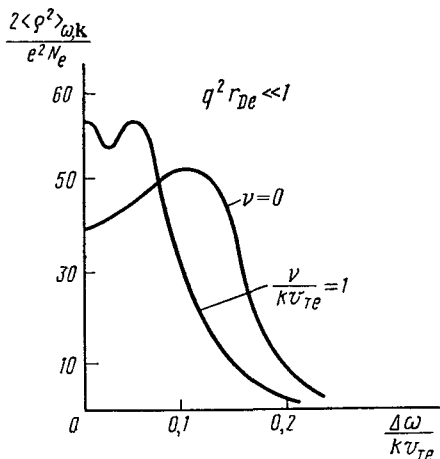


Рис. 47

дом плазмы из одного состояния (устойчивого) в другое (с развитой неустойчивостью), который можно интерпретировать как аналог фазового перехода в обычных средах. Резкий рост рассеяния вблизи точки фазового перехода известен из оптики и носит название явления критической опалесценции. Таким образом, можно сказать, что явление критической опалесценции существует и в неравновесной плазме вблизи границы ее устойчивости.

## § 55. Трансформация волн в плазме

Рассмотрим случай, когда вследствие нелинейного взаимодействия поля распространяющейся в плазме поперечной электромагнитной волны  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega_0 t + i\mathbf{k}_0 \mathbf{r})$  с флуктуациями возникают волны нового типа — продольные. Обозначим поле продольной волны  $\mathbf{E}^l = \mathbf{E}^l \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \mathbf{r})$ .

Амплитуду поля  $\mathbf{E}^l$  следует определять из уравнения

$$\frac{\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}^l}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}^l}{\partial t}, \quad (55.1)$$

где  $\mathbf{j}^l$  — продольная компонента плотности тока (54.13):

$$\mathbf{j}^l = \frac{ie^2}{m\omega_0} \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega} \cdot \frac{k^2}{q^2} \right) \mathbf{E}_0^l \delta N_e(\Delta\omega, \mathbf{q}). \quad (55.2)$$

Здесь  $\mathbf{E}_0^l = \left( \frac{\mathbf{k} \mathbf{E}_0}{k} \right)$  — продольная по отношению к вектору  $\mathbf{k}$ , т. е. к направлению распространения продольной волны  $\mathbf{E}^l$ , компонента вектора  $\mathbf{E}_0$ .

чива, сечение рассеяния определяется общими соотношениями (54.22), (54.23), в которые следует подставить выражение (52.8) для флуктуаций плотности электронов с учетом формулы (52.13) для продольной диэлектрической проницаемости плазмы с пучком. Вкладом ионных слагаемых при этом можно пренебречь. Не проводя детального анализа для сечения рассеяния, сделаем лишь одно общее замечание. Как следует из результатов § 53 с приближением скорости пучка к критической флуктуации в плазме резко возрастают, соответственно должно резко возрастать и сечение рассеяния.

Это явление связано с переходом



С помощью этих формул можно найти выражение для  $E^l$ . Подставив его в формулу (54.16) и усреднив по времени, получим приращение энергии продольной волны:

$$dQ = \frac{V}{(2\pi)^3} \left( \frac{e^2}{m\omega_0} \right)^2 \text{Im} \int \frac{E_0^{l2}}{\varepsilon^l(\omega, k) \omega} \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega} \cdot \frac{k^2}{q^2} \right) \langle \delta N_e^2 \rangle_{\Delta\omega, \mathbf{q}} d\omega d\mathbf{k}. \quad (55.3)$$

Из этого выражения видно, что вклад в интеграл вносят только частоты, удовлетворяющие условию  $\varepsilon^l(\omega, k) = 0$ , т. е. частоты собственных продольных колебаний плазмы. Таким образом, эффект трансформации заключается в возбуждении собственных продольных колебаний плазмы в результате поглощения падающей поперечной электромагнитной волны. При этом интегрирование по  $d\mathbf{k}$  легко производится обычным образом с помощью  $\delta$ -функции, аналогично тому, как это было сделано при выводе формулы (54.20). Если теперь записать отношение  $dQ$  к объему плазмы и плотности потока энергии падающей поперечной волны  $S_0$ , то получим выражение для коэффициента трансформации поперечной волны в продольную.

Для коэффициента трансформации поперечной волны в плазменную нетрудно получить

$$d\Sigma^{tr, l} = \frac{dQ}{S_0 V} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left( \frac{c^2}{3v_{Te}^2} \right)^{3/2} \times \\ \times \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}} \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega} \cdot \frac{k^2}{q^2} \right) \sin^2 \vartheta \langle \delta N_e^2 \rangle_{\Delta\omega, \mathbf{q}} d\omega d\Omega. \quad (55.4)$$

При выводе соотношения (55.4) предполагалось, что падающая волна неполяризована, т. е.  $E^{l2} = \frac{1}{2} E_0^2 \sin^2 \vartheta$ , пренебрегалось затуханием плазменных волн и было учтено, что для собственных плазменных колебаний имеется равенство  $k^2 \approx \varepsilon(\omega) \omega^2 / 3v_{Te}^2$ , т. е.  $\omega^2 \approx \omega_{Le}^2 + 3k^2 v_{Te}^2$ . Рассмотренный процесс можно трактовать как распад падающей поперечной волны с частотой  $\omega_0$  на две продольные волны с частотами  $\omega \approx \omega_{Le}$ . Поэтому  $\omega_0 \approx 2\omega_{Le}$ , т. е.  $\Delta\omega \approx \omega_{Le}$ , а  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k} + \mathbf{q}$ , причем  $k_0^2 c^2 \approx 3\omega_{Le}^2$ .

Аналогично можно определить и коэффициент трансформации поперечной волны в продольную ионно-звуковую.

Необходимо отметить, что реально при распространении волны происходит одновременно как процесс рассеяния, так и процесс трансформации, поэтому важно знать относительный вклад этих процессов, приводящих к ослаблению интенсивности падающей волны. Отношение коэффициента трансформации (55.4) к сечению рассеяния (54.22) равно

$$\frac{d\Sigma^{tr, l}}{d\Sigma} = \left( \frac{c^2}{3v_{Te}^2} \right)^{3/2} \frac{\sin^2 \vartheta}{1 + \cos^2 \vartheta} \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega} \cdot \frac{k^2}{q^2} \right)^2. \quad (55.5)$$

Отсюда видно, что в силу наличия большого множителя  $c^3/v_{Te}^3$  это отношение может быть больше единицы, т. е. поглощение волны,

связанное с ее трансформацией, может превышать ослабление волны вследствие рассеяния.

Наконец, рассмотрим кратко трансформацию падающей продольной ленгмюровской волны  $\mathbf{E}_0$  в поперечную электромагнитную волну  $\mathbf{E}$ . Этот процесс важен в том отношении, что он может быть ответственным за электромагнитное излучение, выходящее из плазмы вследствие того, что в ней с помощью какого-либо механизма, например токовой раскочки, возбуждаются плазменные волны.

Поле поперечной волны удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{E}^{tr} \left[ k^2 - \frac{\varepsilon^{tr}(\omega, k) \omega^2}{c^2} \right] = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{tr}, \quad (55.6)$$

где  $\mathbf{j}^{tr}$  — поперечная компонента плотности тока (54.13), при вычислении которой следует положить  $(\mathbf{k}_0 \mathbf{E}_0) = k_0 E_0^{tr}$ ,  $[\mathbf{k}_0 \mathbf{E}_0] = 0$ :

$$\mathbf{j}^{tr} = \frac{ie^2}{m\omega_0} \left( \mathbf{E}_0^{tr} - \frac{\Delta\omega}{\omega} \cdot \frac{k^2}{q^2} \mathbf{E}_0^{tr} \right) \delta N_e(\Delta\omega, \mathbf{q}). \quad (55.7)$$

Поступая далее так же, как и в предыдущем случае, можно получить интенсивность поперечной волны в плазме, возникающей в результате трансформации продольной плазменной волны на флуктуациях в плазме. Сечение этого процесса определяется как отношение интенсивности поперечной волны к объему и плотности потока энергии падающей продольной волны, которая выражается через групповую скорость

$$\frac{d\omega_0}{dk_0} = \frac{3k_0 v_{Te}}{\omega_{Le}} v_{Te} = \frac{v_{Te}}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} \quad (55.8)$$

плазменной волны как

$$S_0 = \frac{v_{Te}}{8\sqrt{3}\pi} \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} E_0^2. \quad (55.9)$$

В итоге получаем для сечения процесса

$$d\Sigma^{l, tr} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\sqrt{3}c}{v_{Te}} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \times \\ \times \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}} \left( 1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \cdot \frac{k^2}{q^2} \right)^2 \sin^2 \vartheta \langle \delta N_e^2 \rangle_{\Delta\omega, \mathbf{q}} d\omega d\Omega. \quad (55.10)$$

Так как флуктуации плотности имеют максимумы при  $\Delta\omega = \omega_{Le}$ , а  $\omega_0 = \omega_{Le}$ , то  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega \approx \omega_{Le} + \omega_{Le} \approx 2\omega_{Le}$  и поперечные волны будут в основном с частотами  $\omega \approx 2\omega_{Le}$ . Таким образом, для собственного электромагнитного излучения плазмы должно быть характерно наличие максимумов вблизи удвоенных плазменных частот. Рассмотренный процесс трансформации плазменных волн в поперечную электромагнитную волну представляет собой слияние двух продольных волн с образованием поперечной волны, имеющей удвоенную плазменную частоту.

## Задачи к главе X

**Задача 1.** Получить выражение для флуктуаций магнитного поля в равновесной изотропной плазме.

**Решение.** Из соотношения (51.2) определяем коррелятор флуктуации поперечного электрического поля в изотропной плазме:

$$\langle E^{lr2} \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{8\pi T}{\omega} \cdot \frac{\text{Im } \epsilon^{lr}(\omega, \mathbf{k})}{\left| \epsilon^{lr}(\omega, \mathbf{k}) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right|^2}. \quad (1)$$

Используя далее связь  $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{c}{\omega} [\mathbf{kE}]$ , получаем

$$\langle B^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \langle E^{lr2} \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{8\pi T k^2 c^2}{\omega^3} \cdot \frac{\text{Im } \epsilon^{lr}(\omega, \mathbf{k})}{\left| \epsilon^{lr}(\omega, \mathbf{k}) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right|^2}. \quad (2)$$

В области прозрачности плазмы, т. е. в пределе  $\omega \gg kv_{Te}$ , когда  $\epsilon^{lr}(\omega, \mathbf{k}) \approx 1 - \omega_{Le}^2/\omega^2$ , откуда находим

$$\langle B^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{16\pi^2 T k^2 c^2}{|\omega|} \delta(\omega^2 - \omega_{Le}^2 - k^2 c^2). \quad (3)$$

Интегрирование этого выражения по частотам дает

$$\langle B^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{8\pi^2 T k^2 c^2}{\omega_{Le}^2 + k^2 c^2}. \quad (4)$$

Отсюда легко найти пространственную корреляционную функцию

$$\langle B^2 \rangle_{\mathbf{r}} = 8\pi^2 T \left[ \delta(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-r/r_{\text{кор}}}}{r_{\text{кор}}^2} \right], \quad (5)$$

где  $r_{\text{кор}} = c/\omega_{Le}$  — длина корреляции флуктуаций магнитного поля в изотропной плазме.

Из (5) при  $r \approx r_{\text{кор}}$  получаем

$$\frac{\langle B^2 \rangle_{\mathbf{r}}}{4\pi N_e T} \sim \frac{\langle E^{lr2} \rangle_{\mathbf{r}}}{4\pi N_e T} \sim \frac{1}{r_{\text{кор}}^3 N_e} \sim \frac{v_{Te}^3}{c^3} \cdot \frac{1}{r_{De}^3 N_e} \approx \frac{v_{Te}^3}{c^3} \cdot \frac{\langle E^{lr2} \rangle_{\mathbf{r}}}{4\pi N_e T}. \quad (6)$$

Таким образом, энергия флуктуации поперечного поля в плазме в  $c^3/v_{Te}^3$  раз меньше энергии флуктуации продольного поля.

**Задача 2.** Определить относительный вклад интенсивности высокочастотных флуктуаций в полную интенсивность флуктуаций плотности заряда в равновесной электронной плазме.

**Решение.** Интегральный вклад высокочастотных флуктуаций определяем путем интегрирования выражения (51.8) по частотам:

$$\langle \tilde{\rho}^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^2 N_e k^2 v_{Te}^2}{\omega} \delta(\omega^2 - \omega_{Le}^2 - 3k^2 v_{Te}^2) \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 N_e k^2}{3k^2 + \frac{4\pi e^2 N_e}{T}}. \quad (1)$$

Искомое отношение высокочастотной интенсивности к полной находим с использованием выражения (51.12) для полной интенсивности:

$$\frac{\langle \tilde{\rho}^2 \rangle_{\mathbf{k}}}{\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}}} = \frac{1 + k^2 r_{De}^2}{1 + 3k^2 r_{De}^2}. \quad (2)$$

Отсюда следует, что при  $k^2 r_{De}^2 \ll 1$ , т.е. в области больших по сравнению с дебаевским радиусом длин волн, в спектре флуктуаций остаются практически только высокочастотные флуктуации на плазменной частоте. С уменьшением длины волны роль низкочастотных флуктуаций возрастает и при  $k^2 r_{De}^2 \gg 1$  основной вклад в полную интенсивность дают низкочастотные флуктуации.

**Задача 3.** Получить выражение для сечения рассеяния продольных волн на флуктуациях плотности равновесной плазмы.

**Решение.** Исходим из выражения плотности тока рассеяния

$$\mathbf{j} = \frac{ie^2}{m\omega_0} \delta N_{\Delta\omega, \mathbf{q}} \left( \cos \vartheta + \frac{\Delta\omega}{\omega} \cdot \frac{k^2 \cos \vartheta - k_0 k}{q^2} + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \cdot \frac{k_0 k - k_0^2 \cos \vartheta}{q^2} \right) \mathbf{E}_0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{j}$  — плотность продольного тока рассеяния,  $[\mathbf{k}\mathbf{j}] = 0$ ,  $\mathbf{k}_0 \mathbf{k} = k_0 k \cos \vartheta$ ;  $\mathbf{E}_0$  — падающая продольная волна,  $[\mathbf{k}_0 \mathbf{E}_0] = 0$ .

Подставляя это значение плотности тока в (55.1), получаем следующее выражение для сечения рассеяния продольных волн на флуктуациях плотности плазмы:

$$d\Sigma_i = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left( \frac{c^2}{3v_{Te}^2} \right)^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}} \left( \cos \vartheta + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \cdot \frac{k^2 \cos \vartheta - k k_0}{q^2} + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \cdot \frac{k k_0 - k^2 \cos \vartheta}{q^2} \right)^2 \langle \delta N_e^2 \rangle_{\Delta\omega, \mathbf{q}} d\omega d\Omega. \quad (2)$$

При выводе этого соотношения использованы также выражения (55.8) и (55.9) для групповой скорости и плотности потока энергии падающей ленгмюровской волны.

Из сравнения (2) и выражения (55.10) для коэффициента трансформации продольной волны в поперечную следует, что отношение коэффициента трансформации и сечения рассеяния для продольных волн по порядку величины равно  $c^2/v_{Te}^2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta$ , т.е. может быть весьма большим.

## Глава XI

# ОСНОВЫ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЫ

## § 56. Уравнения квазилинейной теории колебаний плазмы

Плазму часто называют системой с бесконечным числом степеней свободы. Действительно, число различных ветвей колебаний и волн в плазме, особенно магнитоактивной, неограниченно велико. При этом, если плазма находится в термодинамически равновесном состоянии, однородна в пространстве и во времени и не под-

вержена внешним воздействиям, то колебания в ней затухают, т. е. малые возмущения термодинамически равновесного состояния релаксируют со временем. Если же стационарное состояние плазмы термодинамически неравновесное, то малые возмущения в ней могут оказаться нарастающими во времени, т. е. плазма в таком состоянии неустойчива. В гл. VI—IX были рассмотрены примеры термодинамически неравновесной плазмы и было показано, что практически любая сколь угодно малая неравновесность может явиться причиной неустойчивости плазмы. Это в особенности относится к высокотемпературной разреженной плазме с малым числом столкновений, что вполне естественно, так как столкновения частиц препятствуют развитию неустойчивости, вызывая релаксацию состояния плазмы к термодинамически равновесному. Неустойчивости проявляются лишь в условиях, когда инкремент их развития больше обратного времени релаксации состояния плазмы к термодинамически равновесному и однородному в пространстве.

Излагавшаяся до сих пор линейная теория колебаний и устойчивости плазмы позволяет ответить на вопрос о характере развития малых возмущений лишь на начальной стадии, пока их амплитуды бесконечно малы. Наибольший же интерес в условиях неустойчивой плазмы представляет вопрос о том, как долго начальные возмущения могут нарастать, насколько они влияют на равновесное состояние плазмы и как последнее меняется под обратным воздействием этих нарастающих возмущений. Но это уже задача нелинейной теории колебаний плазмы.

Построение нелинейной теории колебаний плазмы, или теории турбулентной плазмы с сильно развитой неустойчивостью — довольно сложная задача. В настоящее время не существует адекватного теоретического метода описания сильнотурбулентной плазмы в общем случае. Однако в условиях слабой турбулентности, когда возникшие в результате развития неустойчивости колебания обладают все еще малой энергией по сравнению с тепловой энергией частиц плазмы, такая теория может быть построена. Малым параметром теории слаботурбулентной плазмы является отношение

$$\frac{W}{N\mathcal{E}} \ll 1, \quad (56.1)$$

где  $N\mathcal{E}$  — тепловая энергия частиц ( $\mathcal{E} = T$  — для невырожденной и  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_F$  — для вырожденной плазмы);  $W = \sum_k W_k = \sum_k \frac{E_k^2}{8\pi}$  — энергия плазменных колебаний.

Будем, однако, считать энергию плазменных колебаний достаточно большой, намного превышающей энергию тепловых флуктуаций электромагнитного поля в плазме [ср. с (51.13) (51.14)]:

$$\frac{W}{N\mathcal{E}} \gg \frac{1}{N_D} \approx \left( \frac{e^2 N^{1/3}}{\mathcal{E}} \right)^{3/2} \approx \frac{\nu_{ei}}{\omega_{Le}}. \quad (56.2)$$

Здесь  $N_D$  — число частиц в сфере дебаевского радиуса взаимодействия, которое согласно условию газового приближения велико, т. е.  $N_D \gg 1$ .

При  $N \approx (10^{10} \div 10^{12}) \text{ см}^{-3}$  и  $T \approx (1 \div 10) \text{ эВ}$  имеем  $N_D \approx (10^6 \div 10^7)$  и условие (56.2) выполняется уже в полях колебаний напряженностью  $E_k \approx (10^{-1} \div 1) \text{ В/см}$ . Эти поля хотя и малы, но на много порядков превосходят поля тепловых флуктуаций, поэтому будем называть их полями надтепловых осцилляций (флуктуаций) слаботурбулентной плазмы.

Условие (56.2) обеспечивает законность пренебрежения кулоновскими столкновениями частиц плазмы по сравнению с их взаимодействием с полями надтепловых осцилляций. Поэтому при исследовании нелинейных эффектов будем считать плазму бесстолкновительной. С другой стороны, неравенство (56.1) означает, что поля надтепловых осцилляций достаточно малы и не могут существенно изменить такие «грубые» равновесные параметры плазмы, как плотность частиц, температура и тепловая энергия. Таким образом, условие (56.1) означает слабость турбулентных пульсаций плазмы.

Теперь, когда сформулированы основные ограничения современной нелинейной теории колебаний плазмы, перейдем к исследованию первого наиболее явного нелинейного эффекта — влияния надтепловых флуктуационных полей, возникающих, например, в результате развития неустойчивости, на равновесное состояние плазмы, точнее, на равновесную функцию распределения частиц по скоростям. Проследим при этом, как в свою очередь влияние пульсаций на равновесное состояние плазмы меняет характер их временного развития и в ряде случаев приводит к стабилизации неустойчивости. Ограничимся рассмотрением лишь продольных (потенциальных) колебаний плазмы, описываемых в отсутствие внешнего магнитного поля нелинейными уравнениями Власова для электронов и ионов:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} = 0 \quad (56.3)$$

и уравнением Пуассона:

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \sum_\alpha e_\alpha \int d\mathbf{p}_\alpha f_\alpha(\mathbf{p}). \quad (56.4)$$

Вместо уравнения Пуассона удобно использовать эквивалентное ему уравнение Максвелла

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \sum_\alpha e_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha d\mathbf{p}_\alpha = 0. \quad (56.5)$$

При малом отклонении функции распределения частиц от некоторого равновесного значения  $f_{0\alpha}(\mathbf{p})$  в линейном приближении система уравнений (56.3) — (56.5) описывает квазипродольные (потенциальные) колебания плазмы. В зависимости от вида функции  $f_{0\alpha}(\mathbf{p})$  эти колебания могут быть либо затухающими (например, в условиях, когда

$f_{0\alpha}(\mathbf{p})$  — термодинамически равновесное максвелловское распределение), либо нарастающими (когда  $f_{0\alpha}(\mathbf{p})$  — распределение с направленной скоростью, описывающее пучок в плазме). Исследуем условия, когда продольные волны в плазме являются слабозатухающими, либо слабонарастающими, т. е.  $|\omega| \gg \delta$ , где  $\omega$  — частота колебаний, а  $\delta$  — декремент их затухания (или инкремент нарастания). Только в подобных условиях можно говорить об истинных колебаниях плазмы и удастся получить замкнутую систему уравнений, описывающую обратное воздействие колебаний на равновесное состояние плазмы. Заметим, что именно такими свойствами обладают ленгмюровские и ионно-звуковые (при  $T_e \gg T_i$ ) колебания изотропной плазмы с максвелловскими распределениями частиц по скоростям, неустойчивые колебания, возникающие при прохождении пучка малой плотности через более плотную плазму, ионно-звуковые колебания неизо-термической плазмы ( $T_e \gg T_i$ ), возбуждаемые дрейфом электронов относительно ионов (ток в плазме) при  $u < v_{Te}$ , а также кинетически неустойчивые колебания, инкремент нарастания которых определяется явным видом функции  $f_{0\alpha}(\mathbf{p})$ .

Для получения уравнений квазилинейного приближения разобьем функцию распределения  $f_{\alpha}(\mathbf{p})$  на большую «медленную» и малую «быструю» части:

$$f_{\alpha} = f_{0\alpha}(\mathbf{p}, \mu t) + f_{1\alpha}(\mathbf{p}, t) = f_{0\alpha}(\mathbf{p}, \mu t) + \sum_{\mathbf{k}} \text{Re} [f_{1\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \mu t) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}], \quad (56.6)$$

где  $f_{0\alpha}(\mathbf{p}, \mu t) \gg f_{1\alpha}(\mathbf{p}, t)$ , а электрическое поле в плазме представим в виде

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \text{Re} [\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\mu t, \omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}]. \quad (56.7)$$

Из приведенных выражений ясен физический смысл зависимости от времени «медленной» части функции распределения  $f_{0\alpha}(\mathbf{p}, \mu t)$ , амплитуд отдельных гармоник осциллирующей «быстрой» части функции распределения и амплитуд осцилляций электрического поля в виде зависимости от аргумента  $\mu t$ , где  $\mu \ll 1$ . Действительно, при  $\mu \ll 1$  функция распределения делится на медленно изменяющуюся во времени часть и быстро осциллирующую часть, амплитуда которой, однако, зависит от аргумента  $\mu t$ . Точно так же электрическое поле имеет вид быстрых осцилляций с медленно изменяющейся амплитудой. При этом «среднее» медленно изменяющееся поле в плазме предполагается отсутствующим.

Подставим (56.6) и (56.7) в уравнение (56.3) и произведем усреднение по быстрым осцилляциям. Это справедливо в интервале времени  $\tau$ , для которого выполняется условие

$$\frac{2\pi}{\omega} \ll \tau \sim \tau_p, \quad (56.8)$$

где  $\tau_p$  — характерное время квазилинейной релаксации, т. е. время, за которое колебания повлияют на равновесное состояние плазмы.

При этом

$$f_{0\alpha} = \langle f_{\alpha} \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f_{\alpha} dt. \quad (56.9)$$

После усреднения из (56.3) получаем два уравнения для «медленной» и «быстрой» частей функции распределения соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mu t} + e_{\alpha} \langle \mathbf{E} \frac{\partial f_{1\alpha}}{\partial \mathbf{p}} \rangle &= 0, \\ \frac{\partial f_{1\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{1\alpha}}{\partial \mathbf{r}} + e_{\alpha} \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (56.10)$$

При выводе этой системы было учтено неравенство  $f_{0\alpha}(\mathbf{p}, \mu t) \gg \gg f_{1\alpha}(\mathbf{p}, t)$  и отброшены малые нелинейные слагаемые в уравнении для  $f_{1\alpha}(\mathbf{p}, t)$ .

Используя Фурье-разложения (56.6) и (56.7) и пренебрегая медленными изменениями  $f_{1\alpha k}$  и  $\mathbf{E}_k$  во времени в соответствии с условием (56.8), из второго уравнения (56.10) получаем

$$f_{1\alpha k} = - \frac{i e_{\alpha} \mathbf{E}_k}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (56.11)$$

Подставляя (56.11) в первое уравнение (56.10), получаем квазилинейное уравнение для «медленной» (равновесной) части функции распределения:

$$\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mu t} = \frac{\partial}{\partial p_i} D_{\alpha ij} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j}. \quad (56.12)$$

где

$$\begin{aligned} D_{\alpha ij} &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{k_i k_j}{k^2} e_{\alpha}^2 E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^* \operatorname{Im} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} = \\ &= - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{k_i k_j}{k^2} \cdot \frac{e_{\alpha}^2 E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^* \delta_{\mathbf{k}}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 + \delta_{\mathbf{k}}^2}. \end{aligned} \quad (56.13)$$

Здесь введена комплексная частота  $\omega \rightarrow \omega(\mathbf{k}) + i\delta_{\mathbf{k}}$  и учтено соотношение  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{k} E_{\mathbf{k}}$ .

Заметим, что

$$\frac{\delta_{\mathbf{k}}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 + \delta_{\mathbf{k}}^2} = \begin{cases} \frac{1}{\delta_{\mathbf{k}}} & \text{при } (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 \ll \delta_{\mathbf{k}}^2, \\ \pi \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) & \text{при } (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 \gg \delta_{\mathbf{k}}^2 \rightarrow 0. \end{cases} \quad (56.14)$$

Первым из этих соотношений воспользуемся при исследовании развития гидродинамических неустойчивостей, не связанных с дис-



сипативными процессами в плазме; второе же соотношение удобно при изучении кинетически неустойчивых колебаний, определяемых диссипативными процессами в плазме.

Соотношение (56.11) выражает «быструю» часть функции распределения  $f_{1\alpha k}$  через «медленную» часть  $f_{0\alpha}$ ; последняя в свою очередь связана уравнением (56.12) с электрическим полем колебаний  $\mathbf{E}_k$ . Таким образом, чтобы замкнуть систему, необходимо использовать уравнение для  $\mathbf{E}_k$ . Для вывода такого уравнения удобно воспользоваться уравнением Максвелла (56.5). Умножая уравнение (56.5) для гармоник  $\mathbf{E}_k$  скалярно на  $\mathbf{E}_k^*$  и усредняя по быстрым осцилляциям с учетом (56.11), после несложных вычислений получаем

$$\frac{\partial |\mathbf{E}_k|^2}{\partial \mu t} = 2\delta_k |\mathbf{E}_k|^2, \quad (56.15)$$

где

$$\delta_k = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2 \omega}{k^2} \int \mathbf{k} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} \operatorname{Im} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}. \quad (56.16)$$

В условиях гидродинамически неустойчивой плазмы величина  $\delta_k$  в (56.15) представляет инкремент нарастания колебаний. Если же раскачка (или затухание) волн в плазме обусловлена диссипативными эффектами, то соотношение (56.15) представляет изменение энергии поля в среде, причем  $\delta_k$  определяется мнимой частью продольной диэлектрической проницаемости изотропной бесстолкновительной плазмы.

Уравнения (56.12) и (56.15) образуют замкнутую систему квазилинейных уравнений для продольных колебаний плазмы в отсутствие внешнего магнитного поля. Закон дисперсии таких колебаний определяется известным уравнением

$$\varepsilon(\mu t, \omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} d\mathbf{p} = 0. \quad (56.17)$$

Нетрудно показать, что система уравнений квазилинейной теории удовлетворяет законам сохранения энергии и импульса. Действительно, умножая (56.12) на  $\varepsilon_{\alpha} = m_{\alpha} c^2 \gamma_{\alpha}$ , интегрируя по импульсу и суммируя по сортам частиц, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \mu t} \sum_{\alpha} \int \varepsilon_{\alpha} f_{0\alpha} d\mathbf{p} = \frac{\pi}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\mathbf{k}} \int \frac{e_{\alpha}^2 |\mathbf{E}_k|^2 \omega}{k^2} \left( \mathbf{k} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} \right) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\mathbf{p}. \quad (56.18)$$

Используя уравнение (56.15), окончательно находим закон сохранения энергии:

$$\frac{d}{d\mu t} \left( \sum_{\alpha} \int \varepsilon_{\alpha} f_{0\alpha} d\mathbf{p} + \sum_{\mathbf{k}} \frac{|\mathbf{E}_k|^2}{8\pi} \right) = 0. \quad (56.19)$$

Аналогично выводится закон сохранения импульса системы:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha} \int \mathbf{p} f_{0\alpha} d\mathbf{p} + \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k} |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2}{\omega 8\pi} \right) = 0. \quad (56.20)$$

Перейдем к выводу квазилинейных уравнений для магнитоактивной плазмы. Так же как и ранее, ограничимся рассмотрением лишь продольных колебаний плазмы и разобьем функцию распределения частиц на «медленную» и «быструю» части согласно соотношениям (56.6) и (56.7). Исходя из уравнения Власова для магнитоактивной плазмы

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} + e_{\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0] \right\} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (56.21)$$

для  $f_{0\alpha}$  и  $f_{1\alpha}$  получаем выражения

$$\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial t} + e_{\alpha} \left\langle \mathbf{E} \frac{\partial f_{1\alpha}}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle + \frac{e_{\alpha}}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0] \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (56.22)$$

$$\frac{\partial f_{1\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{1\alpha}}{\partial \mathbf{r}} + e_{\alpha} \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{e_{\alpha}}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0] \frac{\partial f_{1\alpha}}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (56.23)$$

Ограничимся далее рассмотрением аксиально симметричных функций  $f_{0\alpha} = f_{0\alpha}(p_z, p_{\perp})$ . Такая ситуация возникает при взаимодействии пучка частиц с плазмой, либо в плазме, находящейся в электрическом поле, и т. п.\*

Используя разложение (56.7) и учитывая потенциальность поля  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ , находим решение уравнения (56.3):

$$\begin{aligned} f_{1\alpha\mathbf{k}} &= -\frac{ie_{\alpha}\gamma_{\alpha}}{\Omega_{\alpha}} \Phi_{\mathbf{k}} \int_{\infty}^{\varphi} d\varphi' \left( \mathbf{k} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\varphi'} \exp \left[ \frac{i\gamma_{\alpha}}{\Omega_{\alpha}} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})_{\varphi''} \right] = \\ &= e_{\alpha} \sum_{n, m} \frac{J_n \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp} \gamma_{\alpha}}{\Omega_{\alpha}} \right) J_m \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp} \gamma_{\alpha}}{\Omega_{\alpha}} \right)}{\omega - k_z v_z - n\Omega_{\alpha} / \gamma_{\alpha}} \Phi_{\mathbf{k}} \times \\ &\times \left( \frac{n\Omega_{\alpha}}{v_{\perp} \gamma_{\alpha}} \cdot \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_{\perp}} + k_z \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_z} \right) \exp [i(m - n)\varphi]. \end{aligned} \quad (56.24)$$

Подставим это решение в уравнение (56.22) и произведем усреднение по времени. Учитывая при этом, что последнее слагаемое для аксиально симметричных функций  $f_{0\alpha}$  обращается в нуль, и производя усреднение по  $\varphi$ , окончательно получаем квазилинейное уравнение

\* Функция  $f_{0\alpha}(\mathbf{p})$  может быть также функцией  $\varphi$ , например, в случае неоднородной магнитоактивной плазмы. При этом квазилинейная теория существенно усложняется (см. задачу 2 к данной главе).

для «медленной» части функции распределения:

$$\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mu t} = -\frac{e_\alpha^2}{2} \sum_k \sum_n \Phi_k \Phi_k^* \left( k_z \frac{\partial}{\partial p_z} + \frac{\partial}{\partial p_\perp} \cdot \frac{n \Omega_\alpha}{v_\perp \gamma_\alpha} \right) \times \\ \times J_n^2 \left( \frac{k_\perp v_\perp \gamma_\alpha}{\Omega_\alpha} \right) \text{Im} \frac{1}{\omega - k_z v_z - n \Omega_\alpha / \gamma_\alpha} \left( k_z \frac{\partial}{\partial p_z} + \frac{n \Omega_\alpha}{v_\perp \gamma_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial p_\perp} \right) f_{0\alpha}. \quad (56.25)$$

В пределе  $\Omega_\alpha \rightarrow 0$  это уравнение переходит в (56.13), но только для одномерного движения (вдоль оси  $oz$ ).

Уравнение квазилинейной теории для поля  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  выводится из уравнения (56.5). Умножая это уравнение скалярно на  $\mathbf{E}$  и усредняя по быстрым осцилляциям, получаем соотношение (56.15), в котором

$$\delta_k = \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_n \frac{4\pi e_\alpha^2 \omega}{k^2} \int d\mathbf{p} \text{Im} \frac{1}{\omega - k_z v_z - n \Omega_\alpha / \gamma_\alpha} \times \\ \times J_n^2 \left( \frac{k_\perp v_\perp \gamma_\alpha}{\Omega_\alpha} \right) \left( \frac{n \Omega_\alpha}{v_\perp \gamma_\alpha} \cdot \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_\perp} + k_z \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_z} \right) \quad (56.26)$$

представляет собой инкремент нарастания (декремент затухания) колебаний.

Уравнения (56.15) и (56.25) образуют замкнутую систему уравнений квазилинейной теории для продольных колебаний магнитоактивной плазмы, спектр которых определяется дисперсионным соотношением

$$\epsilon(\mu t, \omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_\alpha \sum_n \frac{4\pi e_\alpha^2}{k^2} \int \frac{J_n^2 \left( \frac{k_\perp v_\perp \gamma_\alpha}{\Omega_\alpha} \right)}{\omega - k_z v_z - n \Omega_\alpha / \gamma_\alpha} \times \\ \times \left( k_z \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_z} + \frac{n \Omega_\alpha}{v_\perp \gamma_\alpha} \cdot \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_\perp} \right) d\mathbf{p} = 0. \quad (56.27)$$

## § 57. Квазилинейная релаксация плазменных колебаний

В качестве первого примера применения квазилинейных уравнений рассмотрим релаксацию высокочастотных плазменных колебаний в нерелятивистской изотропной плазме. В линейной теории колебаний изотропной плазмы (см. гл. IV) было показано, что в бесстолкновительной плазме малые продольные колебания затухают во времени благодаря черенковскому поглощению электронами плазмы. Время затухания колебаний определяется декрементом затухания Ландау. В линейной теории, однако, не учитывается влияние колебаний на равновесную функцию распределения электронов, поэтому линейный декремент определяет время затухания, строго говоря,

лишь в пределе бесконечно слабых колебаний. При конечных амплитудах колебаний равновесное распределение претерпевает изменение в процессе развития колебаний и выражение для линейного декремента их затухания перестает быть справедливым. Процесс затухания при этом можно описывать в рамках квазилинейной теории, которая учитывает изменение равновесной функции распределения под действием колебаний. Очевидно, колебания должны воздействовать на равновесную функцию распределения таким образом, чтобы воспрепятствовать поглощению волн (т. е. уменьшать эффект их воздействия). Поэтому с ростом амплитуды колебаний их затухание должно уменьшаться и в бесстолкновительной плазме (когда не происходит максвеллизации функции распределения) даже может установиться такое распределение, когда поглощение будет полностью отсутствовать и непоглощенная волна будет оставаться незатухающей. Из линейной теории известно, что затухание волны в плазме определяется величиной  $\frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k}$ . Поэтому описанная ситуация возможна, если в результате воздействия волны на равновесную функцию распределения на последней появится в некоторый момент времени «плато», т. е. область с  $\frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k} = 0$ , а волна к этому моменту времени еще не полностью поглотится.

При рассмотрении релаксации плазменных колебаний ограничимся исследованием одномерного случая, считая волновые векторы  $k$  всех волн параллельными.

Предположим, что в начальный момент времени  $t = 0$  в термодинамически равновесной невырожденной плазме (с максвелловской функцией распределения) равномерно во всем пространстве в некотором узком интервале волновых векторов  $k$  возбуждены плазменные колебания со спектральной плотностью энергии  $W_k(0) = E_k^2(0)$ , уровень которой значительно превышает спектральную плотность тепловых шумов (вследствие этого столкновения частиц несущественны). В одномерном случае уравнения квазилинейной теории (56.12) и (56.15) приобретают простой вид\*:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial F_0}{\partial v}, \quad D = \frac{e^2}{2m^2} \sum_k \frac{|E_k|^2}{kv}, \\ \frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} &= 2\delta_k |E_k|^2, \quad \delta_k = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega_{L0}^2}{k^2} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k}. \end{aligned} \right\} \quad (57.1)$$

Здесь для удобства введена функция  $F_0(v, t)$ , которая является результатом интегрирования функции  $f_0$  по поперечным к вектору  $k$  импульсам и нормирована на единицу,  $\int F_0 dv = 1$ . Кроме того, учтено, что в поглощении плазменных волн участвуют электроны, для которых  $kv = \omega_{L0} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_0}{m}}$ , где  $N_0$  — равновесная плотность плазмы.

\* Заметим, что величина  $D(v, t)$  в (57.1) отличается от коэффициента диффузии  $D_{\alpha ij}$  в (56.12) множителем  $1/m^2$ .

Запишем начальные условия для системы (57.1):

$$\left. \begin{aligned} F_0(v, 0) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right), \\ W_k(0) = E_k^2(0) &= \begin{cases} 0 & \text{при } \omega/k = v < v_1, \\ W_0 & \text{при } v_1 \leq v = \frac{\omega}{k} \leq v_2, \\ 0 & \text{при } v = \omega/k > v_2. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (57.2)$$

В этой же узкой области скоростей отличен от нуля коэффициент диффузии  $D(v, t=0)$ .

В результате квазилинейной релаксации система переходит в новое стационарное состояние, в котором  $dF_0/dv \rightarrow 0$  в области  $v_1 \leq v \leq v_2$ , т. е. на функции распределения устанавливается «плато». Это видно непосредственно из второго уравнения (57.1). При этом спектральная плотность энергии колебаний  $W_k(\infty) < W_k(0)$ . Квазилинейные уравнения (57.1) позволяют связать  $W_k(\infty)$  и  $F_0(v, \infty)$  с  $W_k(0)$  и  $F_0(v, 0)$ . Действительно, из этой системы следует соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ F_0(v, t) - \frac{\partial}{\partial v} W_k(t) \frac{e^2}{2\pi m^2 k^2 v^4} \right] = 0, \quad (57.3)$$

из которого видно, что величина

$$F_0(v, t) - \frac{\partial}{\partial v} W_k(t) \frac{e^2}{2\pi m^2 k^2 v^4}$$

сохраняется в процессе квазилинейной релаксации колебаний. Поэтому

$$\begin{aligned} F_0(v, 0) - F_0(v, \infty) &= \frac{\partial}{\partial v} W_k(0) \frac{e^2}{2\pi m^2 k^2 v^4} - \\ &- \frac{\partial}{\partial v} W_k(\infty) \frac{e^2}{2\pi m^2 k^2 v^4} \end{aligned} \quad (57.4)$$

или, интегрируя это соотношение по скоростям,

$$W_k(\infty) - W_k(0) = \frac{2\pi m^2 k^2 v^4}{e^2} \int_{v_1}^{v_2} dv [F_0(v, \infty) - F_0(v, 0)]. \quad (57.5)$$

Очевидно, что

$$\int_{v_1}^{v_2} [F_0(v, \infty) - F_0(v, 0)] dv = 0, \quad (57.6)$$

так как взаимодействие волны с частицами происходит в области  $v_1 \leq v \leq v_2$ , а поэтому и функция распределения искажается только в этой области. В результате (поскольку  $F_0(v, \infty) = \text{const}$ ) имеем

$$F_0(v, \infty) = (v_2 - v_1)^{-1} \int_{v_1}^{v_2} dv F_0(v, 0). \quad (57.7)$$

Подставляя последнее выражение в (57.5), окончательно находим спектральную плотность энергии колебаний в конечном состоянии системы:

$$W_k(\infty) - W_k(0) = \frac{2\pi m^2 k^2 v^4}{e^2} \int_{v_1}^{v_2} dv \left[ \frac{1}{v_2 - v_1} \int_{v_1}^{v_2} dv F_0(v, 0) - F_0(v, 0) \right]. \quad (57.8)$$

Может оказаться, что начальной энергии не хватит для установления «плато» на функции распределения электронов. В этом случае стационарное состояние не будет достигнуто, а поле полностью поглотится в плазме.

Оценим время квазилинейной релаксации колебаний и проследим характер поглощения волны на начальной стадии, пока ее амплитуда еще велика по сравнению с тепловыми шумами. Прежде всего заметим, что, поскольку в процессе квазилинейной релаксации происходит сглаживание функции  $f_0$ , т. е. уменьшение величины  $df_0/dv$ , при этом и время поглощения волны должно возрастать, а декремент затухания падать. Поэтому очевидно, что время квазилинейной релаксации должно быть значительно больше обратного декремента затухания волн на начальной стадии. Время квазилинейной релаксации колебаний, т. е. время образования «плато» на функции распределения электронов, оценивают из первого уравнения (57.1). В случае плазменных волн, когда  $v \approx \omega_{L0}/k \gg v_{Te}$ , а  $E_k \approx k\Phi_k$ , по порядку величины оно равно

$$\tau_{\text{кв}} \sim \frac{v^2}{D} \sim \frac{1}{\omega_{L0}} \cdot \frac{v^2}{v_{Te}^2} \cdot \frac{NT}{W_k} \sim \frac{1}{\omega_{L0}} \left( \frac{T}{e\Phi_k} \right)^2 \frac{v^4}{v_{Te}^4}. \quad (57.9)$$

Учтем далее неравенства (56.1) и (56.2), которые запишем в виде

$$\left( \frac{T}{e^2 N^{1/3}} \right)^{3/2} \approx N_D \gg \frac{NT}{W_k} \sim \left( \frac{T}{e\Phi_k} \right)^2 \frac{v^2}{v_{Te}^2} \gg 1. \quad (57.10)$$

Из (57.9) при этом находим, что

$$\tau_{\text{кв}} \omega_{L0} \sim \left( \frac{T}{e\Phi_k} \right)^2 \frac{v^4}{v_{Te}^4} \gg 1. \quad (57.11)$$

Еще более жестким оказывается требование малости обратного декремента затухания волн по сравнению со временем квазилинейной релаксации:

$$\tau_{\text{кв}} \delta_k \sim \tau_{\text{кв}} \omega_{L0} \frac{1}{k^3 r_{De}^3} e^{-\frac{1}{2k^2 r_{De}^2}} \approx \left( \frac{T}{e\Phi_k} \right)^2 \frac{1}{k^7 r_{De}^7} e^{-\frac{1}{2k^2 r_{De}^2}} \gg 1. \quad (57.12)$$

Отсюда находим ограничение на потенциал плазменных коле-

баний, при котором справедлива квазилинейная теория:

$$\frac{e\Phi_k}{T} \ll \frac{1}{(kr_{De})^{7/2}} e^{-\frac{1}{4k^2 r_{De}^2}}. \quad (57.13)$$

Заметим, что подобное ограничение получается также из требования отсутствия захвата электронов в поле плазменных колебаний  $e\Phi_k \ll m\delta_k^2/k^2$  (см. задачу 3 к данной главе):

$$\frac{e\Phi_k}{T} \ll \frac{\pi}{8(kr_{De})^8} e^{-\frac{1}{k^2 r_{De}^2} - 3}. \quad (57.14)$$

Это неравенство представляет собой условие применимости линейного приближения для высокочастотных плазменных колебаний в бесстолкновительной изотропной и термодинамически равновесной плазме.

### § 58. Квазилинейная релаксация пучковой неустойчивости в плазме

Применим полученные квазилинейные уравнения для исследования характера развития пучковой неустойчивости. В гл. VI при изучении взаимодействия электронного пучка малой плотности с плазмой было показано, что в такой системе в отсутствие внешнего магнитного поля могут развиваться неустойчивости двух типов: гидродинамическая и кинетическая. Если прямолинейный пучок нерелятивистских электронов достаточно моноэнергетический, так что  $v_{tb} \ll u \left(\frac{N_b}{2N_0}\right)^{1/3}$ , где  $v_{tb}$  — тепловой разброс скоростей электронов пучка,  $u$  — их направленная скорость, а  $N_b/N_0$  — отношение плотности пучка к плотности плазмы, то неустойчивость носит гидродинамический характер и сопровождается возбуждением плазменных волн с частотой

$$\omega(\mathbf{k}) = \mathbf{k}u \approx \omega_{L0}, \quad (58.1)$$

инкремент нарастания которых

$$\delta = \delta_k \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{N_b}{2N_0}\right)^{1/3} \omega_{L0} \ll \omega. \quad (58.2)$$

Для гидродинамической пучковой неустойчивости определяющими факторами являются макроскопические параметры системы: плотность, скорость и т. п. Наоборот, для пучков с большим тепловым разбросом скоростей, когда  $v_{tb} > u \left(\frac{N_b}{2N_0}\right)^{1/3}$ , пучковая неустойчивость является кинетической; она определяется явным видом функции распределения электронов по скоростям.

Анализ квазилинейной стадии развития пучковой неустойчивости начнем с гидродинамической неустойчивости. Ограничимся одномер-

ным случаем и запишем квазилинейные уравнения в виде

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial F_0}{\partial v}, \quad \frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} = 2\delta_k |E_k|^2, \quad (58.3)$$

где

$$D = -\frac{1}{2} \sum_k \frac{e^2}{m^2} |E_k|^2 \frac{\delta_k}{(\omega - kv)^2 + \delta_k^2}. \quad (58.4)$$

На гидродинамической стадии нарастания колебаний  $(\omega - kv) \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_k \gg kv_{\text{тб}}$ , причем инкремент  $\delta_k$  не зависит от волнового вектора. Учитывая сказанное, запишем

$$\left. \begin{aligned} D &= -\frac{3}{8} \frac{1}{\delta} \sum_k \frac{e^2}{m^2} |E_k|^2, \\ \frac{\partial D}{\partial t} &= 2\delta D, \quad \frac{\partial F_0}{\partial t} = D \frac{\partial^2 F_0}{\partial v^2}. \end{aligned} \right\} \quad (58.5)$$

Для решения задачи развития во времени пучковой неустойчивости система уравнений (58.5) должна быть дополнена начальным условием, которое в случае моноэнергетического электронного пучка, очевидно, имеет вид

$$F_0(0) = \delta(v - u). \quad (58.6)$$

Произведем далее замену

$$\frac{d\tau}{dt} = D(t), \quad \frac{d}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \cdot \frac{d}{d\tau}.$$

Тогда уравнения (58.5) можно переписать следующим образом

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 F_0}{\partial v^2} &= 0, \quad \frac{\partial D}{\partial \tau} = 2\delta, \\ D &= -3\pi \frac{e^2}{m^2} \cdot \frac{W}{\delta}, \end{aligned} \right\} \quad (58.7)$$

где  $W = \frac{1}{8\pi} \sum_k E_k^2$  — энергия поля колебаний.

Решением системы (58.7) с начальным условием (58.6) будет

$$F_0(\tau) = \frac{A}{\sqrt{\tau}} \exp \left[ -\frac{(v-u)^2}{4\tau} \right]. \quad (58.8)$$

Из условия нормировки  $\int F_0 dv = 1$  при этом имеем  $A = 1/(2\sqrt{\pi})$ .

Таким образом, при развитии пучковой неустойчивости моноэнергетическое вначале распределение (58.6) со временем размывается, причем эффективная температура растет во времени:  $T = 2m\tau \sim t$ . Такое размывание, однако, продолжается до тех пор, пока не нарушится условие применимости гидродинамического рассмотрения  $\delta > kv_{\text{тб}}$ , или  $v_{\text{тб}} = \sqrt{\frac{T}{m}} = \sqrt{2\tau} < \left(\frac{N_b}{2N_0}\right)^{1/3} u$ . В ре-



результате находим

$$T_{\max} = 2m\tau_{\mathbf{x}} = m\mu^2 \left( \frac{N_b}{2N_0} \right)^{2/3}. \quad (58.9)$$

Отсюда следует, что на разогрев пучка при развитии гидродинамической пучковой неустойчивости уходит  $2 \left( \frac{N_b}{2N_0} \right)^{2/3}$  часть кинетической энергии пучка, т. е.

$$\frac{T_{\max}}{\frac{m\mu^2}{2}} = 2 \left( \frac{N_b}{2N_0} \right)^{2/3}. \quad (58.10)$$

Легко оценить и энергию поля колебаний при развитии гидродинамической пучковой неустойчивости. Действительно, согласно (58.7)  $D \sim 2\delta\tau \sim 3\pi \frac{e^2 W}{m^2 \delta}$ , поэтому  $W_{\max} \sim 2 \frac{\delta^2}{3\pi} \cdot \frac{m^2}{e^2} \tau_{\max}$

или

$$\frac{W_{\max}}{N_b \frac{m\mu^2}{2}} = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{\delta^2 m}{e^2 N_b} \left( \frac{N_b}{2N_0} \right)^{2/3} = \left( \frac{N_b}{2N_0} \right)^{1/3}, \quad (58.11)$$

т. е.  $\left( \frac{N_b}{2N_0} \right)^{1/3}$  часть энергии пучка передается плазменным колебаниям.

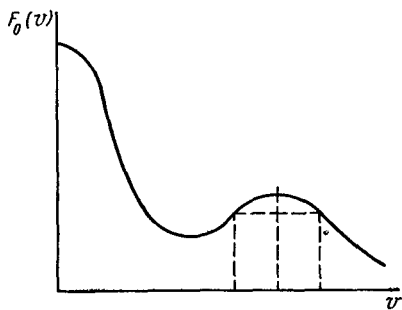
Из соотношений (58.10) и (58.11) следует, что потери энергии пучка на гидродинамической стадии невелики, причем они расходуются в основном на возбуждение волн и в меньшей степени на разогрев пучка.

Наконец, оценим время квазилинейной релаксации гидродинамической пучковой неустойчивости. Учитывая  $D \sim 2\delta\tau \sim 2\delta Dt$ , легко показать, что

$$t_{\text{кв}} \sim \frac{1}{\delta} \approx \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{2N_0}{N_b} \right)^{1/3} \frac{1}{\omega_{L0}}. \quad (58.12)$$

Наиболее характерная особенность развития гидродинамической пучковой неустойчивости — ее нестационарность. Это является следствием того, что инкремент нарастания  $\delta$  гидродинамической неустойчивости не зависит от вида функции распределения электронов пучка и вообще не изменяется во времени. Поэтому в процессе своего развития неустойчивость не стабилизируется. Однако она приводит, как было показано, к размытию (нагреву) функции распределения электронов пучка, и очень скоро за время  $\sim 1/\delta$  неустойчивость приобретает кинетический характер и нарушается неравенство  $v_{\text{тб}} < u \left( \frac{N_b}{2N_0} \right)^{1/3}$ .

Чтобы проследить поведение пучка на кинетической стадии неустойчивости, рассмотрим квазилинейную релаксацию размытого пучка в плазме. Пусть в начальный момент времени полная функция рас-



пределаия электронов в плазме имеет вид, показанный на рис. 48, и в одномерном случае можно записать

$$F_0(v, 0) = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{T_0}} e^{-\frac{mv^2}{2T_0}} - \frac{N_b}{N_0} \left(\frac{m}{2\pi T_b}\right)^{1/2} e^{-\frac{m(v-u)^2}{2T_b}}. \quad (58.13)$$

Рис. 48

Обычно принимают  $T_b \gg T_0$ .

Инкремент нарастания кинетической неустойчивости в отличие от гидродинамической полностью определяется функцией распределения электронов по скоростям и, как показано в гл. VI, равен

$$\delta_k = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega_{L0}^2 \omega}{k^2} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k}. \quad (58.14)$$

Спектр же частот возбуждаемых колебаний при развитии неустойчивости в условиях  $N_b \ll N_0$  совпадает со спектром ленгмюровских колебаний плазмы:

$$\omega \approx \omega_{L0} \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega_{L0}^2}\right). \quad (58.15)$$

Систему квазилинейных уравнений для кинетически неустойчивых колебаний можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial F_0}{\partial v}, \quad \frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} = 2\delta_k |E_k|^2, \\ D &= \frac{\pi}{2} \sum_k \frac{e^2}{m^2} |E_k|^2 \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) = \frac{e^2}{2m^2} \cdot \frac{|E_k|^2}{kv}. \end{aligned} \right\} \quad (58.16)$$

При получении этой системы из (58.3) и (58.4) было учтено, что в пределе  $(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \gg \delta_k \rightarrow 0$ , который всегда выполняется для кинетической пучковой неустойчивости,

$$\frac{\delta_k}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 + \delta_k^2} \rightarrow -\pi \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (58.17)$$

Видно, что система (58.16) допускает существование стационарного решения, в котором  $\frac{\partial F_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k} \rightarrow 0$ , т. е. на функции распре-

деления электронов по скоростям образуется «плато» в области скоростей  $v \approx \omega/k$ . Точнее, такое плато образуется в области скоростей  $v_1 \leq v \leq v_2$ , представленной на рис. 49; пунктиром показана начальная функция распределения. Задача квазилинейной теории состоит в определении значений  $v_1$  и  $v_2$  и высоты  $F_0(v, \infty)$  в этой области. Для этой цели имеем три известных соотношения: закон сохранения числа частиц

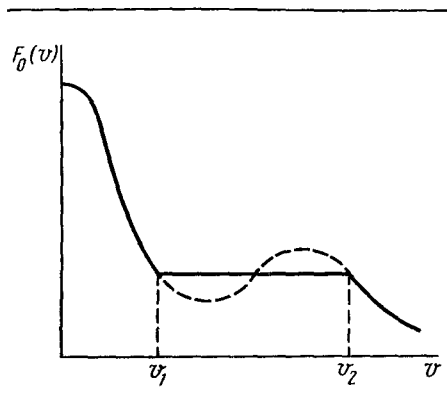


Рис. 49

$$\int_{v_1}^{v_2} F_0(v, 0) dv = \int_{v_1}^{v_2} F_0(v, \infty) dv = F_0(v, \infty) (v_2 - v_1) \quad (58.18)$$

и два очевидных равенства

$$F_0(v_1, 0) = F_0(v_2, 0) = F_0(v, \infty). \quad (58.19)$$

Рассмотрим теперь, какая доля энергии пучка переходит в колебания поля на квазилинейной стадии кинетической пучковой неустойчивости. Заметим, что подобно (57.3) из (58.16) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( F_0 - \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{e^2 |E_k|^2}{2\pi m^2 k^2 v^4} \right) = 0. \quad (58.20)$$

Отсюда

$$F_0(v, t) = F_0(v, 0) + \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{|E_k(t)|^2 e^2}{2\pi m^2 k^2 v^4}. \quad (58.21)$$

Интегрируя это соотношение по скоростям, окончательно находим

$$|E_k(\infty)|^2 = \frac{2\pi m^2 k^2 v^4}{e^2} \int_{v_1}^v [F_0(v, \infty) - F_0(v, 0)] dv, \quad (58.22)$$

где  $v = \omega/k \approx \omega_{L_0}/k \approx u$ .

Заметим, что величина  $|E_k(\infty)|^2$  отлична от нуля лишь в области фазовых скоростей  $v_1 < \omega/k = v < v_2$ , так как только в этой области происходит возбуждение плазменных колебаний электронным пучком.

Из (58.22) видно, что в установившемся в результате квазилинейной релаксации состоянии системы плотность энергии колебаний поля распределена по фазовым скоростям неравномерно; в распределении энергии по фазовым скоростям преобладают колебания с большими

скоростями. Кроме того, из (58.22) нетрудно оценить отношение

$$\frac{|E_k(\infty)|^2}{N_b \frac{mu^2}{2}} \approx (v_2 - v_1) \sim u \left( \frac{N_b}{N_0} \right)^{1/3}. \quad (58.23)$$

Таким образом, при квазилинейной релаксации кинетической пучковой неустойчивости плазменным колебаниям передается малая доля энергии пучка, порядка  $(N_b/N_0)^{1/3}$ .

Кинетическая неустойчивость в отличие от гидродинамической развивается с замедлением, так как в результате квазилинейной релаксации уменьшается величина  $dF_0/dv$ . На конечной стадии этот процесс бесконечно замедлен. Поэтому здесь становится важным учет явлений, восстанавливающих наклон функции распределения, таких, как столкновения частиц (см. задачу 1 к данной главе).

### Задачи к главе XI

**Задача 1.** На примере ленгмюровских колебаний изотропной плазмы показать, что при учете столкновений электронов в результате квазилинейной релаксации устанавливается распределение с конечным наклоном функции распределения по скоростям в резонансной области.

**Решение.** Столкновения частиц стремятся превратить функцию распределения в термодинамически равновесную, т. е. максвелловскую. Учитывая, что ленгмюровские колебания искажают распределение частиц в области  $v \gg v_{Te}$ , в случае полностью ионизованной плазмы квазилинейное уравнение для функции распределения электронов с учетом электрон-электронных столкновений запишем в виде

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} D \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} + \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} D_e \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} (f_0 - f_M). \quad (1)$$

Здесь  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  — соответственно проекции скорости вдоль и поперек направления распространения волны;  $f_M$  — максвелловская функция распределения;

$$D = \frac{e^2}{2m^2} \cdot \frac{|E_k|^2}{v_{\parallel} k}, \quad D_e = \nu_e \frac{2v_{Te}^3}{v_{\parallel}^3} (v_{\perp}^2 + v_{Te}^2), \quad (2)$$

$$\nu_e = \frac{2\pi e^4 N_0 L}{m^2 v_{Te}^3}.$$

Из (1) видно, что время релаксации функций распределения к максвелловской вследствие столкновений частиц равно  $\tau_e = \frac{1}{\nu_e} \left( \frac{\Delta v_{\parallel}}{v_{Te}} \right)^2 \gg \frac{1}{\nu_e}$ , где  $\Delta v_{\parallel}$  — ширина резонансной области, в которой искажается функция распределения электронов под действием колебаний.

Таким образом, в (1) учитываются как квазилинейное искажение функции распределения электронов, т. е. образование «плато», так и столкновительная ее релаксация к максвелловской. В результате конкуренции этих двух процессов устанавливается стационарное распределение (в предположении, что поле колебаний поддерживается стационарным внешним источником):

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} = \frac{\partial f_M}{\partial v_{\parallel}} \cdot \frac{1}{1 + D/D_e}. \quad (3)$$

В отсутствие столкновений  $D_e \rightarrow 0$ , а следовательно, и  $\partial f_0 / \partial v_{\parallel} \rightarrow 0$ .

В слабоионизованной плазме вместо (1), используя кинетическое уравнение с модельным интегралом столкновений БГК, получаем

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} D \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} - \nu_e (f_0 - f_M), \quad (4)$$

где  $\nu_e = \text{const}$ .

Здесь также видно, что при  $\nu_e \neq 0$  и  $\partial f_0 / \partial v_{\parallel} \neq 0$ .

**Задача 2.** Получить уравнения квазилинейной теории для низкочастотных дрейфовых колебаний бесстолкновительной магнитоактивной неоднородной плазмы в нулевом приближении геометрической оптики.

**Решение.** Уравнения квазилинейной теории можно записать только для слабо нарастающих кинетически неустойчивых дрейфовых колебаний, поскольку для них  $\omega \approx \omega_{\text{др}} \gg \delta$ . За раскачку указанных колебаний в бесстолкновительной плазме ответственна черенковская диссипация волн на электронах плазмы. Поэтому в результате развития подобных неустойчивостей будет искажаться функция распределения электронов.

В соответствии с § 56 и учитывая явный вид функции распределения электронов в неоднородной плазме (см. § 41), для низкочастотных дрейфовых колебаний ( $\omega \ll \Omega_e$ ) вместо (56.25) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} = & -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{m^2} \sum_k |\Phi_k|^2 \left( k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + \frac{k_y}{\Omega_e} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \times \\ & \times J_0^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_e} \right) \left( \text{Im} \frac{1}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} \right) \left( k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + \frac{k_y}{\Omega_e} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) f_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Для кинетически неустойчивых колебаний имеем

$$\text{Im} \frac{1}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} = -\pi \delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}).$$

Учитывая это обстоятельство, из (1) находим уравнение для стационарной функции распределения:

$$\left( \frac{\omega}{v_{\parallel}} \cdot \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + \frac{k_y}{\Omega_e} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) f_0 = 0. \quad (2)$$

Отсюда видно, что при развитии дрейфовых неустойчивостей на квазилинейной стадии устанавливается состояние без «плато», т. е.  $\partial f_0 / \partial v_{\parallel} \neq 0$ . Учитывая малое отклонение  $f_0$  от максвелловской функции распределения, приближенно можно записать

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} \approx -\frac{k_y v_{\parallel}}{\omega \Omega_e} \cdot \frac{\partial f_M}{\partial x}. \quad (3)$$

**Задача 3.** В модели независимых частиц исследовать стационарные монохроматические волны конечной амплитуды в системе изотропной плазмы и прямолинейного моноэнергетического релятивистского электронного пучка малой плотности.

**Решение.** Как было показано в гл. VI, прямолинейный пучок малой плотности в изотропной плазме возбуждает продольные волны с фазовой скоростью, близкой к скорости пучка (черенковская неустойчивость). Поэтому в системе плазма — пучок интерес представляют волны с конечной амплитудой. Естественно, нелинейность таких волн в первую очередь сказывается на движении электронов пучка. Взаимодействие волн с электронами плазмы можно считать линейным, а саму плазму — холодной.

Движение электронов пучка в модели независимых частиц описывается системой уравнений непрерывности (16.4) и Эйлера (16.8).

В поле монохроматической волны все величины будем считать зависящими от координаты  $\xi = t - \frac{xk}{\omega}$ ; при этом ось  $ox$  совпадает с направлением распространения волны. Кроме того, ограничимся рассмотрением одномерной задачи, считая скорость электронов пучка в системе покоя волны нерелятивистской и параллельной оси  $ox$ , а поле  $E$  потенциальным, т. е.

$$E = \frac{k}{\omega} \cdot \frac{d\Phi}{d\xi}, \quad (1)$$

где  $\Phi(\xi)$  — потенциал поля волны.

В указанных ограничениях находим интегралы уравнений движения:

$$\left. \begin{aligned} N_0 \left( \frac{\omega}{k} - v \right) &= N_b \left( \frac{\omega}{k} - u \right), \\ \frac{kc}{\omega} \sqrt{p^2 + m^2 c^2} - p + \frac{ek}{\omega} \Phi &= \frac{kc}{\omega} m \gamma \left( 1 - \frac{u}{c} \cdot \frac{\omega}{kc} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $p = mv(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  — импульс,  $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ , а  $u$  и  $N_b$  — скорость и плотность электронов пучка в точках, где  $\Phi = 0$ .

Определяя из системы (2) плотность электронов и подставляя в уравнение Пуассона, получаем

$$\left( 1 - \frac{\omega_{L0}^2}{\omega^2} \right) \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = \omega_b^2 \frac{\omega^2}{k^2} \cdot \frac{m}{e} \left[ \frac{u - \frac{\omega}{k}}{\sqrt{\left(u - \frac{\omega}{k}\right)^2 - \frac{2e\Phi}{m\gamma^3}}} - 1 \right]. \quad (3)$$

В линейном приближении, т. е. в пределе  $m\gamma^3 \left(u - \frac{\omega}{k}\right)^2 \gg 2e\Phi$ , решение уравнения (3) следует искать в виде  $\Phi(\xi) = \Phi_0 \cos \omega\xi$ , что приводит к известному дисперсионному соотношению, описывающему нарастающие во времени (а следовательно, нестационарные) потенциальные волны бесконечно малой амплитуды (см. гл. VI).

Нестационарными остаются и волны конечной амплитуды, если только кинетическая энергия электронов пучка в системе покоя волны больше потенциала поля волны и электроны могут двигаться относительно волны, преодолевая «горбы» потенциала.

Стационарной оказывается нелинейная волна с амплитудой

$$2e\Phi_0 = m\gamma^3 \left(u - \frac{\omega}{k}\right)^2. \quad (4)$$

При этом условии электроны пучка захватываются полем волны и обмен энергией между ними отсутствует. Подставляя решение  $\Phi(\xi) = \Phi_0 \cos \omega\xi$  в (3) и усредняя по  $\xi$ , получаем

$$e\Phi_0 = \frac{m u^2 \gamma}{3\sqrt{2}} \left( \frac{N_b}{N_0} \right)^{2/3}. \quad (5)$$

Не представляет труда определить и энергию поля колебаний:

$$\frac{E_0^2}{8\pi N_b m c^2 (\gamma - 1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{c^2} \left( \frac{N_b}{N_0} \right)^{2/3} \frac{\gamma^2}{\gamma - 1}. \quad (6)$$

Заметим, что из условия отсутствия захвата электронов в нерелятивистском пределе  $e\Phi_0 \ll m\delta_k^2/k^2$  для продольной волны в изотропной плазме, когда  $\delta_k$  определяется формулой (18.6) (декремент затухания Ландау), получаем неравенство (57.14):

$$\frac{e\Phi_0}{T} \ll \frac{\pi}{8(kr_{De})^8} e^{-\frac{1}{k^2 r_{De}^2} - 3} \quad (7)$$

## Глава XII

### НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

#### § 59. Основы нелинейной электродинамики материальных сред

В предыдущей главе изучались нелинейные явления, заключающиеся в воздействии электромагнитных волн на основное состояние плазмы, на ее функцию распределения. При этом не учитывалось взаимодействие волн. Такое нелинейное явление принято называть квазилинейным. Было показано, что квазилинейный процесс изменения основного состояния плазмы характеризуется некоторым временем релаксации  $\tau_{кв}$ . Очевидно, что квазилинейное приближение справедливо, если за время  $\tau_{кв}$  нелинейные явления взаимодействия волн не успевают заметно проявиться.

Для оценки времени нелинейного взаимодействия волн в плазме в этой главе рассмотрим обратный предел. Именно, предполагая основное состояние плазмы неизменным, исследуем нелинейные эффекты, связанные со взаимодействием волн, и оценим время их взаимодействия  $\tau_{н}$ . Справедливость такого рассмотрения обеспечивается условием  $\tau_{н} \ll \tau_{кв}$ . В обратном же пределе справедливо квазилинейное приближение.

Прежде чем перейти к изучению конкретных нелинейных эффектов взаимодействия волн в плазме, кратко изложим общие основы нелинейной электродинамики материальных сред. В гл. I отмечалось, что уравнения поля в среде могут содержать нелинейность, связанную с нелинейностью материального уравнения (5.6) или (5.7), устанавливающего связь между  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$ , либо  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ . В линейной электродинамике ограничиваются линейными материальными уравнениями. При достаточно слабых полях в этих соотношениях можно пользоваться разложением по степеням поля  $\mathbf{E}$ , учитывая как линейные (линейная электродинамика), так и нелинейные члены любых порядков. Последние будут описывать взаимодействие волн. Следует отметить, что только в случае слабых полей (смысл этого разъясняется в конкретной модели плазмы), когда применимо разложение по степеням поля и основными являются линейные слагаемые, можно вводить понятия

собственных волн в среде, а с помощью малых нелинейных членов описывать взаимодействие волн.

В общем виде материальное уравнение для пространственно однородной и стационарной среды, разложенное по степеням поля и учитывающее принцип причинности, записывается в виде

$$D_i(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^t dt_1 \int d\mathbf{r}_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int d\mathbf{r}_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \int d\mathbf{r}_n \times \\ \times \varepsilon_{ij_1, \dots, j_n}(t-t_1, \mathbf{r}-\mathbf{r}_1, t_1-t_2, \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2, \dots, t_{n-1}-t_n, \mathbf{r}_{n-1}-\mathbf{r}_n) \times \\ \times E_{j_1}(t_1, \mathbf{r}_1) \dots E_{j_n}(t_n, \mathbf{r}_n). \quad (59.1)$$

Ограничиваясь первым слагаемым этого ряда, получим материальное уравнение линейной теории (6.2). Далее учтем члены более высокого порядка — квадратичные и кубические по полю. Кроме того, ограничимся исследованием нелинейных эффектов в пространственно однородной и стационарной среде, когда зависимость тензоров  $\varepsilon_{ij_1, \dots, j_n}$  от времени и координат только разностная, т. е. нет зависимости просто от  $t_n$  и  $\mathbf{r}_n$ . Наиболее характерные нелинейные эффекты взаимодействия волн в слабонелинейной плазме проявляются именно в таком приближении.

Уравнения Максвелла (5.5) совместно с материальным уравнением (59.1) образуют полную систему уравнений электродинамики слабонелинейной среды. В случае пространственно однородной и стационарной среды удобно разложить поля в интеграл Фурье:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \int d\omega d\mathbf{k} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (59.2)$$

и ввести понятия многоиндексных тензоров диэлектрической и проницаемости:

$$\varepsilon_{ij_1, \dots, j_n}(\omega, \mathbf{k}, \omega_1, \mathbf{k}_1, \dots, \omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}) = \int_0^{\infty} dt \times \\ \times e^{i\omega t} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \int_0^{\infty} dt_1 e^{i\omega_1 t_1} \int d\mathbf{r}_1 e^{-i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1} \dots \int_0^{\infty} dt_{n-1} \times \\ \times e^{i\omega_{n-1} t_{n-1}} \int d\mathbf{r}_{n-1} e^{-i\mathbf{k}_{n-1} \mathbf{r}_{n-1}} \varepsilon_{ij_1, \dots, j_n}(t, \mathbf{r}, t_1, \mathbf{r}_1, \dots, t_{n-1}, \mathbf{r}_{n-1}). \quad (59.3)$$

В частности, двухиндексный тензор  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  представляет собой обычный тензор диэлектрической проницаемости, используемый в линейной электродинамике.

С помощью многоиндексных тензоров материальное уравнение (59.1) записывается в виде

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) + \sum_{n=2}^{\infty} \int d\omega_1 d\mathbf{k}_1 \dots d\omega_{n-1} d\mathbf{k}_{n-1} \times$$



$$\begin{aligned} & \times \varepsilon_{i j_1 \dots j_n}(\omega, \mathbf{k}, \dots, \omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}) \cdot E_{j_1}(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \dots \\ & E_{j(n-1)}(\omega_{n-2} - \omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-2} - \mathbf{k}_{n-1}) E_{j_n}(\omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}). \end{aligned} \quad (59.4)$$

Теперь уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0 \quad (59.5)$$

в пространстве  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  принимает вид

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) - \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right] E_j(\omega, \mathbf{k}) = \\ & = \sum_{n=2}^{\infty} \int d\omega_1 d\mathbf{k}_1 \dots d\omega_{n-1} d\mathbf{k}_{n-1} \varepsilon_{i j_1 \dots j_n}(\omega, \mathbf{k}, \omega_1, \mathbf{k}_1, \dots, \omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}) \times \\ & \times E_{j_1}(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \dots E_{j(n-1)}(\omega_{n-2} - \omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-2} - \mathbf{k}_{n-1}) \times \\ & \times E_{j_n}(\omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}). \end{aligned} \quad (59.6)$$

В линейном приближении по полю это уравнение переходит в уравнение линейной электродинамики (8.3).

Уравнение (59.6) может быть положено в основу нелинейной электродинамики среды только в условиях слабой нелинейности, когда представление поля в виде совокупности плоских волн (59.2) близко к точному решению задачи. При этом члены в правой части являющиеся малыми, описывающими малое отклонение волн в среде от плоских из-за их нелинейного взаимодействия. В первом приближении, когда нелинейными слагаемыми можно пренебречь, плоские волны являются точными решениями уравнений поля (8.3) при условии связи между  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  в виде обычного дисперсионного уравнения

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \frac{\omega^2}{c^2} \right| = 0. \quad (59.7)$$

Итак, в линейном приближении получаем только сведения о типе волн, которые могут существовать в среде.

Учет малых нелинейных слагаемых приводит к тому, что амплитуды волн оказываются слабыми функциями времени и координат. Чтобы обеспечить условие медленности изменения амплитуд, как и в предыдущей главе, вводится малый параметр  $\mu$ :

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mu t, \mu \mathbf{r}, \omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{E}^*(\mu t, \mu \mathbf{r}, \omega, \mathbf{k}) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (59.8)$$

Для описания этих слабых зависимостей от времени и координат (слабых по сравнению с  $1/\omega$  и  $1/k$ ) воспользуемся усреднением, подобно тому, как это делалось в § 7 при выводе выражения для энергии поля в среде. Тогда получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D_i(t, \mathbf{r})}{\partial t} \approx & -i\omega e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\mu t, \mu \mathbf{r}, \omega, \mathbf{k}) + \\
& + i\omega \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} E_j^*(\mu t, \mu \mathbf{r}, \omega, \mathbf{k}) + \\
& + \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \varepsilon_{ij}^{\circ}(\omega, \mathbf{k})] \frac{\partial E_j(\mu t, \mu \mathbf{r}, \omega, \mathbf{k})}{\partial \mu t} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \\
& + \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \varepsilon_{ij}^{\circ}(\omega, \mathbf{k})] \frac{\partial E_j^*(\mu t, \mu \mathbf{r}, \omega, \mathbf{k})}{\partial \mu t} e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \\
& - \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} [\omega \varepsilon_{ij}^{\circ}(\omega, \mathbf{k})] \frac{\partial E_j(\mu t, \mu \mathbf{r}, \omega, \mathbf{k})}{\partial \mu \mathbf{r}} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \\
& - \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} [\omega \varepsilon_{ij}^{\circ}(\omega, \mathbf{k})] \frac{\partial E_j^*(\mu t, \mu \mathbf{r}, \omega, \mathbf{k})}{\partial \mu \mathbf{r}} e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \\
& - i\omega \delta D_i(\omega, \mathbf{k}) + i\omega \delta D_i^*(\omega, \mathbf{k}). \tag{59.9}
\end{aligned}$$

Здесь  $\delta D_i(\omega, \mathbf{k})$  — нелинейная часть вектора индукции [т. е. нелинейное слагаемое в (59.4)], в которой слабой зависимостью от  $t$  и  $\mathbf{r}$  пренебрегаем.

Подставим (59.9) в соотношение для энергии поля (7.1) (при  $\mathbf{j}_0 = 0$ ):

$$\frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) + \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{B}] = 0 \tag{59.10}$$

и произведем усреднение. В результате получим

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[ \frac{\partial \omega \varepsilon_{ij}^{\circ}(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \right] \frac{1}{4\pi} E_j(\omega, \mathbf{k}) \times \right. \\
& \times E_i^*(\omega, \mathbf{k}) \left. \right\} - \frac{\partial}{\partial r_s} \left\{ \left[ \frac{\partial \omega \varepsilon_{ij}^{\circ}(\omega, \mathbf{k})}{\partial k_s} + (k_i \delta_{sj} + k_j \delta_{is} - \right. \right. \\
& \left. \left. - 2k_s \delta_{ij}) \frac{c^2}{\omega} \right] \frac{E_j(\omega, \mathbf{k}) E_i^*(\omega, \mathbf{k})}{4\pi} \right\} = \frac{i\omega}{4\pi} [\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) E_i^*(\omega, \mathbf{k}) - \\
& - \varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) E_j^*(\omega, \mathbf{k}) E_i(\omega, \mathbf{k})] + \frac{i\omega}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \int d\omega_1 d\mathbf{k}_1 \dots d\omega_{n-1} d\mathbf{k}_{n-1} \times \\
& \times \varepsilon_{ij_1 \dots j_n}(\omega, \mathbf{k}, \dots, \omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}) E_j^*(\omega, \mathbf{k}) E_{j_1}(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \dots \\
& \dots E_{j_n}(\omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}) - \frac{i\omega}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \int d\omega_1, d\mathbf{k}_1, \dots, d\omega_{n-1}, \\
& d\mathbf{k}_{n-1} \varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}, \dots, \omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}) E_i(\omega, \mathbf{k}) \times \\
& \times E_{j_1}^*(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \dots E_{j_n}^*(\omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}). \tag{59.11}
\end{aligned}$$

По существу это уравнение представляет собой закон сохранения энергии в системе. Левая его часть описывает изменение амплитуды волн благодаря их излучению и поглощению, а правая — благодаря нелинейным взаимодействиям. Обычно в правой части этого уравнения оставляют лишь несколько членов (в нелинейной оптике ограничиваются тремя членами разложения). Полученное при таком обрыве ряда уравнение называют у к о р о ч е н н ы м.

При выводе уравнения (59.11) на фазы волн ограничения не накладывались, поэтому им можно пользоваться при исследовании нелинейных волн как с фиксированной, так и со случайной фазой.

В случае, когда фазы волн беспорядочны (хаотичны), уравнение (59.11) следует усреднить по фазам и тем самым перейти к статистической электродинамике. При этом мы ограничимся членами до четвертого порядка по полю и учтем следующие усредненные по фазам соотношения (см. гл. X):

$$\langle \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) \rangle = 0, \quad (59.12)$$

$$\langle E_i(\omega, \mathbf{k}) E_j^*(\omega', \mathbf{k}') \rangle = \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') (E_i E_j)_{\omega, \mathbf{k}},$$

где  $(E_i E_j)_{\omega, \mathbf{k}}$  — спектральная плотность флуктуаций электрического поля.

Следует заметить, что соотношения (59.12), строго говоря, справедливы лишь в случае стационарных и пространственно однородных состояний среды. Согласно (59.11) в нелинейной электродинамике амплитуды поля в среде медленно меняются в пространстве и во времени, поэтому соотношения (59.12) являются приближенными. В линейной электродинамике эти соотношения точные и из (59.11), отбрасывая члены выше второго порядка по полю, получаем

$$\frac{\partial W(\omega, \mathbf{k})}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S}(\omega, \mathbf{k}) = -2\delta(\omega, \mathbf{k}) W(\omega, \mathbf{k}), \quad (59.13)$$

где введены обозначения:

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega M_{ij}^{\circ}(\omega, \mathbf{k})] (E_i E_j)_{\omega, \mathbf{k}} = W(\omega, \mathbf{k}),$$

$$M_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) = \frac{c^2}{\omega^2} \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}), \quad (59.14)$$

$$\mathbf{S}(\omega, \mathbf{k}) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} [\omega M_{ij}^{\circ}(\omega, \mathbf{k})] \frac{(E_i E_j)_{\omega, \mathbf{k}}}{4\pi},$$

$$\delta(\omega, \mathbf{k}) W(\omega, \mathbf{k}) = - \frac{i\omega}{4\pi} \cdot \frac{\varepsilon_{ij}^{\text{a}}(\omega, \mathbf{k}) (E_i E_j)_{\omega, \mathbf{k}}}{W(\omega, \mathbf{k})}.$$

При выводе аналогичного уравнения нелинейной электродинамики наряду с парными корреляторами (59.12) необходимо знание тройных и четверных корреляторов. В линейной электродинамике тройные корреляторы тождественно равны нулю, а четверные разбиваются на произведение парных. В нелинейном приближении (с точностью до

членов четвертого порядка по полю) четверные корреляторы можно представить в виде произведения парных:

$$\begin{aligned}
 & \langle E_i(\omega, \mathbf{k}) E_s(\omega', \mathbf{k}') E_j(\omega'', \mathbf{k}'') E_r(\omega''', \mathbf{k}''') \rangle = \\
 & = \langle E_i E_s \rangle_{\omega, \mathbf{k}} \langle E_j E_r \rangle_{\omega', \mathbf{k}'} \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega'' + \omega''') \delta(\mathbf{k}'' + \mathbf{k}''') + \\
 & + \langle E_i E_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}} \langle E_s E_r \rangle_{\omega', \mathbf{k}'} \delta(\omega + \omega'') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'') \delta(\omega' + \omega''') \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}''') + \\
 & + \langle E_i E_r \rangle_{\omega, \mathbf{k}'} \langle E_s E_j \rangle_{\omega', \mathbf{k}''} \delta(\omega + \omega''') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}''') \delta(\omega' + \omega'') \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'').
 \end{aligned} \tag{59.15}$$

Тройные же корреляторы отличны от нуля и порядка  $E^4$ . Поэтому при их вычислении необходима большая точность. Запишем уравнение (59.6) с точностью до кубических членов по полю:

$$\begin{aligned}
 M_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) = & - \int d\omega_1 d\mathbf{k}_1 \varepsilon_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega_1, \mathbf{k}_1) \times \\
 & \times E_j(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) E_s(\omega_1, \mathbf{k}_1).
 \end{aligned} \tag{59.16}$$

Решая это уравнение методом последовательных приближений, получаем

$$\begin{aligned}
 E_i(\omega, \mathbf{k}) = & E_i^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) - A_{ir}(\omega, \mathbf{k}) \int d\omega_1 d\mathbf{k}_1 \times \\
 & \times \varepsilon_{rjs}(\omega, \mathbf{k}, \omega_1, \mathbf{k}_1) E_j^{(0)}(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) E_s^{(0)}(\omega_1, \mathbf{k}_1),
 \end{aligned} \tag{59.17}$$

где  $E_i^{(0)}(\omega, \mathbf{k})$  — решение линейного уравнения (59.16), т. е. без правой части, а

$$A_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = M_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = \left[ \varepsilon_{ij} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \right]^{-1}. \tag{59.18}$$

Теперь можно записать тройные корреляторы, если учесть, что поля  $E_i^{(0)}(\omega, \mathbf{k})$  некоррелированы между собой и поэтому

$$\begin{aligned}
 & \langle E_i(\omega, \mathbf{k}) E_s(\omega', \mathbf{k}') E_j(\omega'', \mathbf{k}'') \rangle = - \int d\omega_1 d\mathbf{k}_1 \{ A_{ia}(\omega, \mathbf{k}) \times \\
 & \times \varepsilon_{abc}(\omega, \mathbf{k}, \omega_1, \mathbf{k}_1) \langle E_b^{(0)}(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) E_c^{(0)}(\omega_1, \mathbf{k}_1) \times \\
 & \times E_s^{(0)}(\omega', \mathbf{k}') E_j^{(0)}(\omega'', \mathbf{k}'') \rangle + A_{sc}(\omega', \mathbf{k}') \varepsilon_{cba}(\omega', \mathbf{k}', \omega_1, \mathbf{k}_1) \times \\
 & \times \langle E_b^{(0)}(\omega' - \omega_1, \mathbf{k}' - \mathbf{k}_1) E_a^{(0)}(\omega_1, \mathbf{k}_1) E_i^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) E_j^{(0)}(\omega'', \mathbf{k}'') \rangle + \\
 & + A_{jb}(\omega'', \mathbf{k}'') \varepsilon_{bca}(\omega'', \mathbf{k}'', \omega_1, \mathbf{k}_1) \cdot \langle E_b^{(0)}(\omega'' - \omega_1, \mathbf{k}'' - \mathbf{k}_1) \times \\
 & \times E_a^{(0)}(\omega_1, \mathbf{k}_1) E_j^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) \cdot E_s^{(0)}(\omega', \mathbf{k}') \rangle.
 \end{aligned} \tag{59.19}$$

Подставляя (59.12), (59.19) и (59.15) в усредненное уравнение (59.11), обрезанное с учетом членов до четвертого порядка по полю, окончательно получаем искомое уравнение нелинейной электродинамики

для волн с хаотичными фазами:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \omega M_{ij}^3(\omega, \mathbf{k}) (E_j E_i)_{\omega, \mathbf{k}} \right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[ \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \omega M_{ij}^3(\omega, \mathbf{k}) \times \right. \\
 & \times (E_j E_i)_{\omega, \mathbf{k}} \left. \right] = 2i \varepsilon_{ij}^a(\omega, \mathbf{k}) (E_j E_i)_{\omega, \mathbf{k}} + \text{Im} \int d\omega' d\mathbf{k}' \left[ A_{ia}^*(\omega, \mathbf{k}) \times \right. \\
 & \times S_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') S_{abc}^*(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') (E_s E_c)_{\omega', \mathbf{k}'} \times \\
 & \times (E_j E_b)_{\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}'} + 2A_{jb}(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}') S_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') \times \\
 & \times S_{bca}(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega, \mathbf{k}) (E_s E_c)_{\omega', \mathbf{k}'} (E_a E_i)_{\omega, \mathbf{k}} - \\
 & \left. - 2V_{isac}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') (E_a E_i)_{\omega, \mathbf{k}} (E_s E_c)_{\omega', \mathbf{k}'} \right]. \quad (59.20)
 \end{aligned}$$

При написании этого уравнения опущены слагаемые, содержащие  $A_{ij}(0, 0)$ , как не дающие вклада в задачу нелинейного взаимодействия волн, ибо для волн  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  одновременно не могут быть равны нулю. Все обозначения в уравнении (59.20) были разъяснены ранее, за исключением  $V_{ijab}$  и  $S_{ijs}$ , которые соответственно равны:

$$\begin{aligned}
 V_{ijab}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') & \equiv \varepsilon_{ijab}(\omega, \mathbf{k}, \omega + \omega', \mathbf{k} + \mathbf{k}', \omega', \mathbf{k}') + \\
 + \varepsilon_{jba}(\omega, \mathbf{k}, \omega + \omega', \mathbf{k} + \mathbf{k}', \omega', \mathbf{k}') & = 2\varepsilon_{ijba}(\omega, \mathbf{k}, \omega + \omega', \mathbf{k} + \mathbf{k}', \omega', \mathbf{k}') = \\
 & = 2\varepsilon_{iajb}(\omega, \mathbf{k}, 0, 0, \omega', \mathbf{k}'), \quad (59.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') & \equiv \varepsilon_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') + \varepsilon_{isj}(\omega, \mathbf{k}, \omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}') = \\
 & = 2\varepsilon_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}'). \quad (59.22)
 \end{aligned}$$

В линейном приближении, т. е. при пренебрежении членами четвертого порядка по полю, усреднение (59.20) переходит в (59.11).

Таким образом, составление нелинейного уравнения взаимодействия волн сводится к вычислению тензоров высшего ранга для среды. Для плазмы такие тензоры вычисляются в следующих параграфах, в которых и упрощаются уравнения (59.11) и (59.20). Без использования конкретной модели среды эти уравнения можно упростить, рассматривая либо чисто продольные, либо чисто поперечные волны:

$$\mathbf{E}_i^l(\omega, \mathbf{k}) = E^l \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad \mathbf{E}_i^{tr}(\omega, \mathbf{k}) = E^{tr} \frac{\mathbf{h}}{h}, \quad (59.23)$$

где  $(\mathbf{h}\mathbf{k}) = 0$ . Однако упрощения лучше проводить для конкретной модели среды.

В заключение заметим, что уравнения (59.11) и (59.20), строго говоря, пригодны лишь для описания взаимодействия волн, амплитуды которых значительно превышают уровень тепловых шумов, так как не учитывают эффект спонтанного излучения и поглощения волн частицами плазмы, т. е. столкновения частиц в плазме. В дальнейшем будем ограничиваться именно такими случаями.

**§ 60. Многоиндексные тензоры  
диэлектрической проницаемости однородной плазмы**

Прежде чем перейти к исследованию конкретных нелинейных эффектов взаимодействия волн в плазме, следует вычислить многоиндексные тензоры диэлектрической проницаемости, входящие в уравнения (59.11) и (59.20). В этом параграфе вычислим эти тензоры для бесстолкновительной пространственно однородной плазмы, описываемой уравнением Власова:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (60.1)$$

Равновесную функцию распределения частиц сорта  $\alpha$  в невырожденной плазме будем считать максвелловской:

$$f_{0\alpha} = \frac{N_\alpha}{(2\pi m_\alpha T_\alpha)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_\alpha v^2}{2T_\alpha}\right); \quad (60.2)$$

в вырожденной же плазме — фермиевской.

$$f_{0\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{при } p > p_{F\alpha} = (3\pi^2)^{1/3} \hbar N_\alpha^{1/3}, \\ \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} & \text{при } p < p_{F\alpha}. \end{cases} \quad (60.2a)$$

Отклонение функции распределения от равновесной разложим по степеням полей возмущений (индекс  $\alpha$  в дальнейшем опускаем):

$$\delta f = f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots, \quad f_n \sim E^n. \quad (60.3)$$

Подставляя (60.3) в (60.1) и приравнивая члены одного порядка, для плазмы в отсутствие внешних полей получаем

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{r}} = -e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (60.4)$$

После перехода к Фурье-компонентам

$$f_n(\mathbf{p}, t, \mathbf{r}) = \int d\omega d\mathbf{k} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} f_n(\mathbf{p}, \omega, \mathbf{k}) \quad (60.5)$$

и использования уравнения поля  $\mathbf{B} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{kE}]$  для отдельной компоненты имеем

$$\begin{aligned} f_n(\mathbf{p}, \omega, \mathbf{k}) = & -ie \int d\omega' d\mathbf{k}' \frac{\alpha_{ij}(\mathbf{v}, \omega', \mathbf{k}')}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} E_j(\omega', \mathbf{k}') \times \\ & \times \frac{\partial f_{n-1}(\mathbf{p}, \omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}')}{\partial p_i} = -ie \int d\omega' d\mathbf{k}' d\omega'' d\mathbf{k}'' \times \\ & \times \frac{\alpha_{ij}(\mathbf{v}, \omega', \mathbf{k}')}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \delta(\omega - \omega' - \omega'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial p_i} f_{n-1}(\mathbf{p}, \omega'', \mathbf{k}'') E_j(\omega', \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (60.6)$$

Здесь введено обозначение

$$\alpha_{ij}(\mathbf{v}, \omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega} [k_i v_j + \delta_{ij}(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})] \quad (60.7)$$

и использовано предположение об адиабатическом включении поля в бесконечном прошлом:

$$f_n(\mathbf{p}, t \rightarrow -\infty, \mathbf{r}) \rightarrow 0. \quad (60.8)$$

Заметим, что для  $n = 1$  при условии  $f_0(\mathbf{p}, \omega, \mathbf{k}) = f_0(\mathbf{p})\delta(\omega)\delta(\mathbf{k})$  получаем известное выражение линейной теории (см. гл. IV):

$$f_1(\mathbf{p}, \omega, \mathbf{k}) = -ie \frac{\alpha_{ij}(\mathbf{v}, \omega, \mathbf{k})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} E_j(\omega, \mathbf{k}) \frac{\partial f_0(\mathbf{p})}{\partial p_i}. \quad (60.9)$$

Подставляя это выражение в (60.6) для  $n = 2$ , находим

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{p}, \omega, \mathbf{k}) &= (-ie)^2 \int d\omega_1 d\mathbf{k}_1 d\omega_2 d\mathbf{k}_2 \times \\ &\times \frac{\alpha_{i_1 j_1}(\mathbf{v}, \omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1)}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial}{\partial p_{i_1}} \cdot \frac{\alpha_{i_2 j_2}(\mathbf{v}, \omega_1 - \omega_2, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)}{\omega - \mathbf{k}_1\mathbf{v}} \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial p_{i_1}} f_0(\mathbf{p}, \omega_2, \mathbf{k}_2) E_{j_1}(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) E_{j_2}(\omega_1 - \omega_2, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \end{aligned} \quad (60.10)$$

Таким образом, путем последовательных подстановок можно получить все члены ряда (60.3). Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} f_n(\mathbf{p}, \omega, \mathbf{k}) &= (-ie)^n \int d\omega_1 d\mathbf{k}_1 \dots d\omega_n d\mathbf{k}_n \times \\ &\times g \Gamma_{j_1} g_1 \Gamma_{j_2} \dots g_{n-1} \Gamma_{j_n} f_0(\mathbf{p}, \omega_n, \mathbf{k}_n) \times \\ &\times E_{j_1}(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \dots E_{j_n}(\omega_{n-1} - \omega_n, \mathbf{k}_{n-1} - \mathbf{k}_n). \end{aligned} \quad (60.11)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}, \quad g_n = \frac{1}{\omega_n - \mathbf{k}_n\mathbf{v}}, \\ \Gamma_{j_1} &= \alpha_{i_1 j_1}(\mathbf{v}, \omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \frac{\partial}{\partial p_{i_1}}, \end{aligned} \quad (60.12)$$

$$\Gamma_{j_n} = \alpha_{i_n j_n}(\mathbf{v}, \omega_{n-1} - \omega_n, \mathbf{k}_{n-1} - \mathbf{k}_n) \frac{\partial}{\partial p_{i_n}}.$$

Теперь, когда найдено решение кинетического уравнения в виде разложения по степеням поля, можно перейти к вычислению многоиндексных тензоров диэлектрической проницаемости изотропной плазмы. Для этого следует вычислить плотность тока, индуцированного в плазме:

$$\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) = e \int \mathbf{v} f d\mathbf{p} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 + \dots + \mathbf{j}_n + \dots \quad (60.13)$$

(предполагается, что в равновесном состоянии тока в плазме нет). Ис-

ходя из (60.12) легко показать, что

$$j_n(\omega, \mathbf{k}) = e(-ie)^n \int d\mathbf{p} \mathbf{v} \int d\omega_1 d\mathbf{k}_1 \dots d\omega_n d\mathbf{k}_n g\Gamma_{j_1} g_1\Gamma_{j_2} \dots g_{n-1}\Gamma_{j_n} \times \\ \times f_0(\mathbf{p}, \omega_n, \mathbf{k}_n) E_{j_1}(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \dots E_{j_n}(\omega_{n-1} - \omega_n, \mathbf{k}_{n-1} - \mathbf{k}_n), \\ \rho_n(\omega, \mathbf{k}) = e(-ie)^n \int d\mathbf{p} \int d\omega_1 d\mathbf{k}_1 \dots d\omega_n d\mathbf{k}_n g\Gamma_{j_1} g_1\Gamma_{j_2} \dots g_{n-1}\Gamma_{j_n} \times \\ \times f_0(\mathbf{p}, \omega_n, \mathbf{k}_n) E_{j_1}(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \dots E_{j_n}(\omega_{n-1} - \omega_n, \mathbf{k}_{n-1} - \mathbf{k}_n). \quad (60.14)$$

Из выражения (60.14) для плотности тока находим искомый мно-гоиндексный тензор диэлектрической проницаемости изотропной плазмы:

$$\varepsilon_{ij_1 \dots j_n}(\omega, \mathbf{k}, \omega_1, \mathbf{k}_1, \dots, \omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}) = \delta_{n1} \delta_{ij_1} - \\ - 4\pi(-ie)^{n+1} \int d\mathbf{p} \frac{v_i}{\omega} g\Gamma_{j_1} g_1 \dots g_{n-1} \Gamma_{j_n} f_0(\mathbf{p}), \quad n \geq 1. \quad (60.15)$$

Для  $n = 1$  из (60.15) получаем тензор диэлектрической проницаемости линейной теории:

$$\varepsilon_{ij_1}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij_1} + \frac{4\pi e^2}{\omega} \int d\mathbf{p} v_i g\Gamma_{j_1} f_0(\mathbf{p}) = \\ = \delta_{ij_1} + \frac{4\pi e^2}{\omega} \int d\mathbf{p} v_i \frac{\alpha_{sj_1}(\mathbf{v}, \omega, \mathbf{k})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial p_s} = \\ = \left( \delta_{ij_1} - \frac{k_i k_{j_1}}{k^2} \right) \varepsilon^{tr}(\omega, k) + \frac{k_i k_{j_1}}{k^2} \varepsilon^l(\omega, k), \quad (60.16)$$

а для  $n = 2$  — трехиндексный тензор:

$$\varepsilon_{ij_s}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') = -i \frac{4\pi e^3}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \times \\ \times \alpha_{mj}(\mathbf{v}, \omega'', \mathbf{k}'') \frac{\partial}{\partial p_m} \cdot \frac{\alpha_{ns}(\mathbf{v}, \omega', \mathbf{k}')}{\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial p_n}, \quad (60.17)$$

где  $\omega'' = \omega - \omega'$ ,  $\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ .

Наряду с  $\varepsilon_{ij_s}$  следует выписать тензор  $S_{ij_s}$ , который фигурирует в нелинейном уравнении (59.20). Используя обозначения (59.21), после интегрирования по частям и симметризации получаем

$$S_{ij_s}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') = \frac{4\pi i e^3}{m^4} \cdot \frac{1}{\omega \omega' \omega''} \int d\mathbf{p} \beta_{ni} \times \\ \times (\beta'_{ns} \beta''_{mj} + \beta'_{ms} \beta_{nj} - \beta'_{ns} \beta_{mj}) \frac{\partial f_0}{\partial p_m}, \quad (60.18)$$

где  $\beta_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{\omega}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \alpha_{ij}(\mathbf{v}, \omega, \mathbf{k})$ , причем штрихи у  $\beta_{ij}$  соответствуют штрихованным аргументам  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ .



Формулу (60.18) часто удобно представить в виде

$$S_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') = -\frac{i}{\omega \omega' \omega''} \cdot \frac{4\pi e^3}{m^5} \int d\mathbf{p} f_0 \beta_{ai} \times \\ \times \beta_{bj}^* \beta_{cs}' \left( \frac{k_a}{\omega_0} \delta_{bc} + \frac{k_b''}{\omega_2} \delta_{ac} + \frac{k_c'}{\omega_1} \delta_{ab} \right), \quad (60.19)$$

где  $\omega_0 = \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}$ ,  $\omega_1 = \omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v}$ ,  $\omega_2 = \omega'' - \mathbf{k}''\mathbf{v}$ .

Это выражение получается из (60.18) путем интегрирования по частям; оно полностью симметрично по аргументам и индексам.

В пределе холодной плазмы  $\frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} \rightarrow 0$  из (60.19) имеем

$$S_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') = -\frac{ie}{m} \cdot \frac{\omega_L^2}{\omega \omega' \omega''} \left( \frac{k_i}{\omega} \delta_{js} + \frac{k_s'}{\omega'} \delta_{ij} + \frac{k_j''}{\omega''} \delta_{is} \right). \quad (60.20)$$

Трехиндексный тензор  $S_{ijs}$  полностью определяет распадные нелинейные взаимодействия волн (в том числе и слияния волн). Для изучения индуцированного рассеяния волн на частицах необходимо рассмотреть также четырехиндексный тензор  $V_{ijab}$ , который согласно (59.21) является суммой двух четырехиндексных тензоров диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ijab}$ . На основании общей формулы (60.15) для  $n = 3$  можно записать

$$V_{iajb}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') = -\frac{4\pi e^4}{\omega} \int d\mathbf{p} v_i \left[ \frac{\alpha_{ma}(\mathbf{v}, \omega, \mathbf{k})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial}{\partial p_m} \times \right. \\ \times \frac{\alpha_{nj}(\mathbf{v}, \omega, \mathbf{k})}{\omega + \omega' - (\mathbf{k} + \mathbf{k}')\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial}{\partial p_n} \cdot \frac{\alpha_{lb}(\mathbf{v}, \omega', \mathbf{k}')}{\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v}} + \frac{\alpha_{ma}(\mathbf{v}, \omega', \mathbf{k}')}{\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial}{\partial p_m} \times \\ \left. \times \frac{\alpha_{nb}(\mathbf{v}, \omega', \mathbf{k}')}{\omega' + \omega - (\mathbf{k} + \mathbf{k}')\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial}{\partial p_n} \cdot \frac{\alpha_{lj}(\mathbf{v}, \omega, \mathbf{k})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \right] \frac{\partial f_0}{\partial p_l}. \quad (60.21)$$

Это выражение не обладает столь высокой степенью симметрии, как тензор  $S_{ijl}$ , поэтому упрощать его в общем виде не будем. Однако при исследовании нелинейных процессов в плазме некоторые упрощения будут проведены. Здесь приведем лишь выражение для тензора  $V_{iajb}$  в случае холодной плазмы, причем, учитывая интегрирование по  $\omega'$  и  $\mathbf{k}'$  в (59.20) и четность парных корреляторов поля по  $\omega'$  и  $\mathbf{k}'$ , запишем сразу

$$V_{iajb}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') + V_{iajb}(\omega, \mathbf{k}, -\omega', -\mathbf{k}') = 2 \frac{e^2}{m^2} \cdot \frac{\omega_L^2}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \omega'^2} \times \\ \times \left\{ \delta_{ia} \left( \frac{k_j' k_b'}{\omega'^2} - \frac{k_j k_b}{\omega^2} \right) + \delta_{jb} \left( \frac{k_i' k_a'}{\omega'^2} - \frac{k_i k_a}{\omega^2} \right) - \delta_{ia} \delta_{jb} \left[ \left( \frac{\mathbf{k}}{\omega} - \frac{\mathbf{k}'}{\omega'} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{k^2 + k'^2}{\omega^2 - \omega'^2} - 2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{\omega\omega'} \cdot \frac{\omega^2 + \omega'^2}{\omega^2 - \omega'^2} \right] \right\}. \quad (60.22)$$

В этом выражении частоты  $\omega$  и  $\omega'$  считаем положительными.

Наконец, приведем выражение для тензора  $A_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  [см. (59.18)], который фигурирует в уравнении (59.20), в случае изотропной плазмы. Легко показать, что

$$A_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = A^l \frac{k_i k_j}{k^2} + A^{tr} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) = \frac{1}{\epsilon^l(\omega, k)} \cdot \frac{k_i k_j}{k^2} + \frac{1}{\epsilon^{tr}(\omega, k) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right). \quad (60.23)$$

Рассмотрим теперь многоиндексные тензоры диэлектрической проницаемости для магнитоактивной плазмы. Как и ранее, будем исходить из кинетического уравнения Власова для бесстолкновительной плазмы, записав его в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}(\mathbf{B} + \mathbf{B}_0)] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (60.24)$$

где  $\mathbf{B}_0$  — внешнее магнитное поле.

Представляя функцию  $f$  в виде ряда (60.3), получаем для неравновесных поправок к невозмущенной функции  $f_0$  следующую систему зацепляющихся уравнений:

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0] \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{p}} = -e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \mathbf{p}} \quad (60.25)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$

Уравнение (60.25) для  $n = 1$  представляет собой уравнение линейной теории (23.1). Как и ранее, в качестве равновесной функции  $f_0$  будем выбирать нерелятивистскую функцию распределения Максвелла (60.2), либо функцию распределения Ферми (60.2а). Вводя обозначение  $\tau = \frac{\varphi - \varphi'}{\Omega}$  и переходя к Фурье-компонентам (60.5), запишем решение уравнения (60.25) для  $n = 1$ :

$$f_1(\mathbf{v}, \omega, \mathbf{k}) = -\frac{e}{m} \int_{-\infty}^0 d\tau \exp \{ -i\omega\tau + i\mathbf{k}\delta\mathbf{R}[\tau, \mathbf{v}(\tau)] \} \times \\ \times \alpha_{ij}(\mathbf{v}, \omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) \frac{\partial f_0}{\partial p_i(\tau)}. \quad (60.26)$$

Здесь

$$\mathbf{v}(\tau) = v_z \mathbf{e}_z + [\mathbf{v} \mathbf{e}_z] \sin \Omega\tau + [\mathbf{e}_z [\mathbf{v} \mathbf{e}_z]] \cos \Omega\tau, \quad (60.27)$$

$$\delta\mathbf{R}(\tau, \mathbf{v}) = \int_0^\tau d\tau' \mathbf{v}(\tau'),$$

$\alpha_{ij}(\mathbf{v}, \omega, \mathbf{k})$  определяется соотношением (60.7),  $v(\tau_0)$  — величина, входящая в аргумент функции  $f_1$ .

Аналогично для произвольного значения  $n$  из (60.25) находим

$$f_n(\mathbf{v}, \omega, \mathbf{k}) = -e \int d\omega' dk' d\omega'' dk'' \int_{-\infty}^0 d\tau \exp\{-i\omega\tau + ik\delta\mathbf{R}[\tau, \mathbf{v}(\tau)]\} \times \\ \times \alpha_{ij}[\mathbf{v}(\tau, \mathbf{v}), \omega', \mathbf{k}'] \frac{\partial f_{n-1}[\mathbf{v}(\tau, \mathbf{v}), \omega'', \mathbf{k}'']}{\partial p_i(\tau)} E_j(\omega', \mathbf{k}'). \quad (60.28)$$

Выражая последовательно  $f_n$  через  $f_{n-1}$  и т. д., окончательно получаем

$$f(\mathbf{v}, t, \mathbf{r}) = f_0(\mathbf{v}) \sum_{n=1}^{\infty} (-e)^n \int d\omega dk \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}) \times \\ \times \int d\omega_1 dk_1 \dots d\omega_n dk_n \int_{-\infty}^0 d\tau_0 \int_{-\infty}^0 d\tau_{n-1} G \Gamma_{i_1}(\tau_0) G_1 \Gamma_{i_2}(\tau_0 + \tau_1) \dots \\ \dots G_{n-1} \Gamma_{j_n}(\tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1}) \cdot f_0[\mathbf{v}(\tau_0 + \dots + \tau_{n-1}), \omega_n, \mathbf{k}_n] \times \\ \times E_{j_1}(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \dots E_{j_n}(\omega_{n-1} - \omega_n, \mathbf{k}_{n-1} - \mathbf{k}_n). \quad (60.29)$$

Здесь введены обозначения:

$$G = \exp[-i\omega\tau_0 + ik\delta\mathbf{R}(\tau_0, \mathbf{v})], \\ G_n = \exp\left\{-i\omega_n \tau_n + i\left[k_n \delta\mathbf{R}\left(\sum_{l=0}^n \tau_l, \mathbf{v}\right) - k \delta\mathbf{R}\left(\sum_{l=0}^{n-1} \tau_l, \mathbf{v}\right)\right]\right\}, \\ n = 1, 2, 3 \dots$$

$$\Gamma_{i_1} = \alpha_{i_1 j_1}[\mathbf{v}(\tau_0, \mathbf{v}), \omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1] \frac{\partial}{\partial p_{i_1}(\tau_0, \mathbf{v})}, \quad (60.30)$$

$$\Gamma_{j_n}(\tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1}) = \alpha_{i_n j_n} \left[ \mathbf{v}\left(\sum_{l=0}^{n-1} \tau_l, \mathbf{v}\right), \omega_{n-1} - \omega_n, \mathbf{k}_{n-1} - \mathbf{k}_n \right] \times \\ \times \frac{\partial}{\partial p_{i_n}\left(\sum_{l=0}^{n-1} \tau_l, \mathbf{v}\right)},$$

$$v_i = [\tau_i, \mathbf{v}(\tau_0, \mathbf{v})] \equiv v_i(\tau_0 + \tau_i, \mathbf{v}),$$

$$\delta R_i[\tau_i, \mathbf{v}(\tau_0, \mathbf{v})] = \delta R_i(\tau_0 + \tau_i, \mathbf{v}) - \delta R_i(\tau_0, \mathbf{v}).$$

Полученное решение кинетического уравнения (60.29) позволяет определить с любой степенью точности по полю индуцированный в плазме ток и все многоиндексные тензоры диэлектрической проницаемости магнитоактивной

П л а з м ы:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij_1 \dots j_n}(\omega, \mathbf{k}, \omega_1, \mathbf{k}_1, \dots, \omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}) &= \delta_{n_1} \delta_{ij_1} - 4\pi i (-e)^{n+1} \int d\mathbf{p} \frac{v_i}{\omega} \times \\ &\times \int_{-\infty}^0 d\tau_0 \dots \int_{-\infty}^0 d\tau_{n-1} G \Gamma_{j_1}(\tau_0) G \Gamma_{j_2}(\tau_0 + \tau_1) \dots G_{n-1} \Gamma_{j_n}(\tau_0 + \dots \\ &\dots + \tau_{n-1}) f_0[\mathbf{p}(\tau_0 + \dots + \tau_{n-1}, \mathbf{v})]. \end{aligned} \quad (60.31)$$

Легко показать, что в пределе  $B_0 \rightarrow 0$  это выражение переходит в (60.15).

Для  $n = 1$  из (60.31) получаем двухиндексный тензор диэлектрической проницаемости линейной теории (см. гл. V);

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \delta_{ij} - 4\pi i e^2 \int d\mathbf{p} \frac{v_i}{\omega} \int_{-\infty}^0 d\tau_0 G \Gamma_j(\tau_0) f[\mathbf{p}(\tau_0, \mathbf{v})] = \\ &= \delta_{ij} - \frac{4\pi i e^2}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{v_i}{\omega} \int_{-\infty}^0 d\tau \exp[-i\omega\tau + \\ &+ ik\delta\mathbf{R}(\tau, \mathbf{v})] \alpha_{nj}[\mathbf{v}(\tau, \mathbf{v}), \omega, \mathbf{k}] \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}(\tau, \mathbf{v})}. \end{aligned} \quad (60.32)$$

Для  $n = 2$  имеем трехиндексный тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') &= 4\pi i e^3 \int d\mathbf{p} \frac{v_i}{\omega} \int_{-\infty}^0 d\tau_0 \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \exp[-i\omega\tau_0 + \\ &+ ik\delta\mathbf{R}(\tau_0, \mathbf{v})] \alpha_{nj}[\mathbf{v}(\tau_0, \mathbf{v}), \omega'', \mathbf{k}''] \cdot \frac{\partial}{\partial p_n(\tau_0, \mathbf{v})} \exp[-i\omega'\tau + ik'\delta\mathbf{R}(\tau_0 + \\ &+ \tau, \mathbf{v}) - ik' \cdot \delta\mathbf{R}(\tau_0, \mathbf{v})] \alpha'_{ms}[\mathbf{v}(\tau_0 + \tau_1, \mathbf{v}), \omega', \mathbf{k}'] \frac{\partial f_0}{\partial p_m(\tau_0 + \tau_1, \mathbf{v})}, \end{aligned} \quad (60.33)$$

где  $\omega = \omega' + \omega''$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{k}''$ .

Наконец, для  $n = 3$  получаем четырехиндексный тензор:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{iajb}(\omega, \mathbf{k}, \omega' + \omega, \mathbf{k} + \mathbf{k}', \omega', \mathbf{k}') &= -4\pi i e^4 \int d\mathbf{p} \frac{v_i}{\omega} \int_{-\infty}^0 d\tau_0 \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \times \\ &\times \int_{-\infty}^0 d\tau_2 \exp[-i\omega\tau_0 + ik\delta\mathbf{R}(\tau_0, \mathbf{v})] \alpha_{nj}[\mathbf{v}(\tau_0, \mathbf{v}), \omega', \mathbf{k}'] \frac{\partial}{\partial p_n(\tau_0, \mathbf{v})} \times \\ &\times \exp\{-i(\omega + \omega')\tau_1 + i(\mathbf{k} + \mathbf{k}')[\delta\mathbf{R}(\tau_0 + \tau_1, \mathbf{v}) - \delta\mathbf{R}(\tau_0, \mathbf{v})]\} \times \\ &\times \alpha_{mj}[\mathbf{v}(\tau_0 + \tau_1, \mathbf{v}), \omega_1, \mathbf{k}] \frac{\partial}{\partial p_m(\tau_0 + \tau_1, \mathbf{v})} \times \\ &\times \exp\{-i\omega'\tau_2 + ik'[\delta\mathbf{R}(\tau_0 + \tau_1 + \tau_2, \mathbf{v}) - \delta\mathbf{R}(\tau_0 + \tau_1, \mathbf{v})]\} \times \\ &\times \alpha_{ib}[\mathbf{v}(\tau_0 + \tau_1 + \tau_2, \mathbf{v}), \omega', \mathbf{k}'] \frac{\partial f_0}{\partial p_l(\tau_0 + \tau_1 + \tau_2, \mathbf{v})}. \end{aligned} \quad (60.34)$$

Тензоры  $S_{ij\alpha}$  и  $V_{isab}$ , фигурирующие в усредненном уравнении (59.20), вычисляются по формулам (59.21) и (59.22). Эти вычисления, однако, столь громоздки, что здесь их приводить не будем.

### § 61. Нелинейное взаимодействие волн в изотропной плазме

Из большого многообразия нелинейных взаимодействий волн в плазме ограничимся рассмотрением лишь взаимодействия продольных волн в изотропной немагнитоактивной плазме. Если учесть что во всякого рода плазменных неустойчивостях, как правило, возбуждаются продольные волны, то ограничение продольными волнами покажется вполне оправданным и достаточным. Ограничение же изотропной плазмой продиктовано исключительно соображениями простоты. Кроме того, фазы волн будем считать хаотичными и исходить из усредненного уравнения (59.20).

Прежде всего заметим, что для изотропной плазмы можно записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (E_i E_j)_{\omega, \mathbf{k}} &= (E^{I2})_{\omega, \mathbf{k}} \frac{k_i k_j}{k^2} + \frac{1}{2} (E^{tr2})_{\omega, \mathbf{k}} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \\ M_{ij} &= \varepsilon^l(\omega, k) \frac{k_i k_j}{k^2} + \left[ \varepsilon^{tr}(\omega, k) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right] \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \end{aligned} \quad (61.1)$$

$$\varepsilon_{ij}(\omega, k) = \varepsilon^l(\omega, k) \frac{k_i k_j}{k^2} + \varepsilon^{tr}(\omega, k) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right),$$

$$A_{ij} = M_{ij}^{-1} = \frac{1}{\varepsilon^l(\omega, k)} \cdot \frac{k_i k_j}{k^2} + \frac{1}{\varepsilon^{tr}(\omega, k) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right).$$

Подставляя их в уравнение (59.20) и считая отличным от нуля только продольное поле  $(E^{I2})_{\omega, \mathbf{k}}$ , получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \text{Re } \varepsilon^l(\omega, k)}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (E^{I2})_{\omega, \mathbf{k}} - \frac{\partial}{\partial r} (E^{I2})_{\omega, \mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial k} \text{Re } \varepsilon^l(\omega, k) = \\ &= -2 \text{Im } \varepsilon^l(\omega, k) (E^{I2})_{\omega, \mathbf{k}} + 2 (E^{I2})_{\omega, \mathbf{k}} \int d\omega' d\mathbf{k}' \frac{k_i k_a}{k^2} \times \\ &\times \frac{k'_c k'_s}{k'^2} (E^{I2})_{\omega', \mathbf{k}'} \text{Im} \left[ \int d\omega'' d\mathbf{k}'' \delta(\omega - \omega' - \omega'') \frac{\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'')}{\varepsilon^l(\omega'', k'')} S_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') \times \right. \\ &\times S_{bca}(\omega'', \mathbf{k}'', \omega, \mathbf{k}) \frac{k'_j k'_b}{k''^2} - V_{ic\alpha s}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') \left. \right] + 2 (E^{I2})_{\omega, \mathbf{k}} \int d\omega' d\mathbf{k}' \times \\ &\times d\omega'' d\mathbf{k}'' \delta(\omega - \omega' - \omega'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') (E^{I2})_{\omega', \mathbf{k}'} \text{Im} \left[ \left( \delta_{bj} - \frac{k'_j k'_b}{k''^2} \right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \left. \frac{1}{\varepsilon^{tr}(\omega'', k'') - \frac{k''^2 c^2}{\omega''^2}} \cdot \frac{k_i k_a k'_s k'_c}{k^2 k'^2} \cdot S_{iss}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') S_{bca}(\omega'', \mathbf{k}'', \omega, \mathbf{k}) \right] -$$

$$- \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})} \cdot \int d\omega' d\mathbf{k}' d\omega'' d\mathbf{k}'' \delta(\omega - \omega' - \omega'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \times$$

$$\times (E^{l2})_{\omega', \mathbf{k}'} (E^{l2})_{\omega'', \mathbf{k}''} \left| S_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') \frac{k_i k'_j k'_s}{k k' k''} \right|^2. \quad (61.2)$$

Первое слагаемое в правой части этого уравнения описывает линейное затухание продольных волн, второе и третье слагаемые — индукцированное рассеяние продольных волн в плазме через промежуточные продольные и поперечные виртуальные волны соответственно; наконец, последнее слагаемое описывает слияние двух продольных волн в третью. Рассеяние через продольную виртуальную волну часто называют нелинейным кулоновским рассеянием, а через поперечную — запаздывающим рассеянием. Это различные нелинейные процессы, которые обычно изучают отдельно.

Изучение конкретных нелинейных эффектов начнем с кулоновского рассеяния электронных ленгмюровских колебаний в невырожденной плазме. В уравнении (61.2) при этом следует учесть только второе слагаемое в правой части и переходить к пределу

$$k^2 r_{De}^2 \ll 1, \quad k'^2 r_{De}^2 \ll 1, \quad k''^2 r_{De}^2 \ll 1. \quad (61.3)$$

Вводя спектральную плотность энергии продольных волн  $W^l(\omega, \mathbf{k})$  [см. (59.14)]:

$$W^l(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \operatorname{Re} \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})) (E^{l2})_{\omega, \mathbf{k}}, \quad (61.4)$$

после громоздких, но несложных вычислений находим

$$\left\{ \frac{dW^l(\mathbf{k})}{dt} \right\}_{\text{кул}} = \frac{\partial W^l(\mathbf{k})}{\partial t} - \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \left[ \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \right]^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} W^l(\mathbf{k}) =$$

$$= \frac{\partial W^l(\mathbf{k})}{\partial t} + 3v_{Te} k r_{De} \frac{\partial W^l(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{r}} = W^l(\mathbf{k}) \int d\mathbf{k}' Q(\mathbf{k}, \mathbf{k}') W^l(\mathbf{k}'), \quad (61.5)$$

где

$$Q(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = - \frac{\omega_{Le}}{16\pi^3 N_e T_e} \cdot \frac{(\mathbf{k} \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \cdot \frac{(k'' r_{De})^2}{|\varepsilon^l(\omega'', \mathbf{k}'')|^2} \{ \operatorname{Im} \delta \varepsilon_e^l(\omega'', \mathbf{k}'') \times$$

$$\times [4 [k k']^2 r_{De}^2 k''^2 (2 \operatorname{Re} \delta \varepsilon_e^l(\omega'', \mathbf{k}'') + 2 \operatorname{Re} \delta \varepsilon_i^l(\omega'', \mathbf{k}'') \operatorname{Re} \delta \varepsilon_e^l(\omega'', \mathbf{k}'') +$$

$$+ |\delta \varepsilon_e^l(\omega'', \mathbf{k}'')|^2) + (1 + \delta \varepsilon_i^l(\omega'', \mathbf{k}''))^2 ] + \operatorname{Im} \delta \varepsilon_i^l(\omega'', \mathbf{k}'') |\delta \varepsilon_e^l(\omega'', \mathbf{k}'')|^2 \},$$

где  $\omega'' = \omega - \omega'$ ,  $\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ , а  $\delta \varepsilon_e^l(\omega, \mathbf{k})$ ,  $\delta \varepsilon_i^l(\omega, \mathbf{k})$  выписывались ранее.

Легко показать, что

$$\omega'' = \frac{3}{2} (k^2 - k'^2) \frac{v_{Te}^2}{\omega_{Le}}. \quad (61.6)$$

Ядро интегрального уравнения (61.5)  $Q(k, k')$  антисимметрично относительно замены  $k \rightleftharpoons k'$ . Поэтому

$$W^l = \int dk W^l(k) = \text{const}, \quad (61.7)$$

что получается непосредственным интегрированием (61.5) и означает сохранение энергии продольных волн в процессе нелинейного кулоновского рассеяния. Здесь возможна лишь перекачка энергии из одной области спектра в другую без изменения полной энергии поля. Чтобы проследить направление перекачки, рассмотрим два узких пакета продольных волн и их эволюцию во времени в предположении однородности в пространстве. Пусть в начальный момент известны  $W_1(0)$  и  $W_2(0)$ .

Далее

$$W^l(t) = W_1(t) \delta(k - k_1) + W_2(t) \delta(k - k_2). \quad (61.8)$$

Подставляя это выражение в (61.5), получаем

$$\partial W_1 / \partial t = Q(k_1, k_2) W_1 W_2, \quad \partial W_2 / \partial t = -Q(k_1, k_2) W_1 W_2. \quad (61.9)$$

Отсюда имеем  $W_1 + W_2 = W_0 = \text{const}$ , причем

$$\frac{W_1(t)}{W_2(t)} = \frac{W_1(0)}{W_2(0)} e^{Q(k_1, k_2) W_0 t}. \quad (61.10)$$

или

$$\frac{W_1(t)}{W_1(0)} = W_0 [W_1(0) + W_2(0) e^{-Q(k_1, k_2) W_0 t}]^{-1}. \quad (61.11)$$

Поскольку  $Q(k_1, k_2) < 0$  при  $k_1 > k_2$ , отсюда следует, что в случае кулоновского рассеяния происходит перекачка энергии от коротких волн к длинным. Характерное время этого процесса, оцениваемое из (61.11), равно

$$\tau_{\text{пр}} \approx -\frac{1}{W_0 Q(k_1, k_2)} \quad \text{при } k_1 > k_2. \quad (61.12)$$

Для наглядной иллюстрации сказанного рассмотрим предел  $T_i \rightarrow \rightarrow 0$ ,  $M \rightarrow \infty$ , когда вкладом ионов в  $Q(k_1, k_2)$  можно пренебречь. Тогда характер кулоновского рассеяния полностью определяется электронами, а  $Q(k_1, k_2)$  принимает вид

$$Q(k_1, k_2) = -\frac{3\omega_{Le}}{2(2\pi)^{5/2}} \cdot \frac{r_{De}^3}{N_e T_e} \cdot \frac{k_1^2 - k_2^2}{|k_1 - k_2|^3} \cdot \frac{[k_1 k_2]^2 (k_1 k_2)^2}{k_1^2 k_2^2}. \quad (61.13)$$

Отсюда видно, что при  $k_1 > k_2$  величина  $Q(k_1, k_2) < 0$ . Кроме того, в условиях

$\mathbf{k}_1 \perp \mathbf{k}_2$ , либо  $k_1 \parallel k_2$ , величина  $Q(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \rightarrow 0$ , т. е. в рассматриваемом приближении нелинейное кулоновское рассеяние для строго перпендикулярных, либо строго параллельных волн отсутствует, а поэтому  $\tau_{\text{пр}} \rightarrow \infty$ . По порядку величины

$$\tau_{\text{пр}} \approx 10^2 \frac{N r_{\text{De}}^3}{\omega_{\text{Le}}} \cdot \frac{T_e}{W^l(k)} \cdot \frac{1}{k^5 r_{\text{De}}^6 \Delta k}. \quad (61.14)$$

Заметим, что кулоновское рассеяние на электронах преобладает над рассеянием на ионах при условии  $\frac{T_e T_e}{T_i} > \frac{m}{M} m c^2 \ln \frac{M T_e^3}{m T_i^3}$ . Для водородной плазмы это имеет место при  $\left(\frac{T_e}{T_i}\right) T_e > 10^6$  К, а для плазмы с тяжелыми ионами ( $A \approx 100$ ) при  $\frac{T_e}{T_i} T_e > 10^4$  К, т. е. практически всегда.

Подставим выражение (61.13) в (61.12) и сравним полученный результат со временем поглощения продольной волны благодаря столкновениям электронов с ионами  $\tau_{\text{ст}} = \frac{1}{\nu_{ei}} = \left(\frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \cdot \frac{e^4 N_e L}{T_e^{3/2}}\right)^{-1}$ . Видно, что условие пренебрежения столкновениями частиц при этом сводится к требованию  $\nu_{ei} \tau_{\text{пр}} \gg 1$ , или

$$\frac{W^l}{T_e} \gg \frac{L}{k^5 \Delta k r_{\text{De}}^6} \gg 1. \quad (61.15)$$

Это неравенство обеспечивает пренебрежение спонтанным излучением продольных волн электронами плазмы по сравнению с учтенным ранее индуцированным рассеянием. Следует отметить, что при  $W^l \gg T_e$  спонтанное излучение мало по сравнению с бесстолкновительным черенковским поглощением продольных волн электронами, которое приводит к экспоненциальному уменьшению  $W^l$  с характерным временем, равным обратному декременту затухания Ландау  $\tau_{\text{л}} = 1/\delta$ , где  $\delta$  определяется формулой (18.6). Сравнение этого времени с (61.14) приводит к следующему условию пренебрежения линейным бесстолкновительным поглощением продольных волн по сравнению с нелинейным кулоновским рассеянием:

$$2k^2 r_{\text{De}}^2 \ln \frac{T_e}{W^l N r_{\text{De}}^3} \ll 1. \quad (61.16)$$

Поскольку время квазилинейной релаксации плазменных волн всегда больше времени их линейного затухания  $\tau_{\text{л}}$ , неравенство (61.16) представляет также условие пренебрежения квазилинейной релаксацией равновесного распределения электронов в процессе нелинейного кулоновского рассеяния волн.

Рассмотрим влияние поперечного виртуального поля на нелинейное взаимодействие продольных волн в плазме. Оно описывается третьим слагаемым в уравнении (61.2). Конкретный эффект, который будем изучать, состоит в слиянии двух продольных волн в одну поперечную.



Отметим важность этого процесса в прикладном отношении. Дело в том, что продольные волны легко возбуждаются в плазме, например при взаимодействии пучка с плазмой, но они как бы заперты в самой плазме и наружу не выходят. Поперечные же волны, напротив, легко выходят из плазмы. Поэтому слияние продольных волн в поперечную — это канал излучения из плазмы возбуждаемых там продольных волн.

При слиянии двух продольных волн с частотами  $\omega \approx \omega' \approx \omega_{Le} \gg \gg kv_{Te}$  образуется поперечная волна с частотой  $\omega'' \approx \approx 2\omega_{Le}$  и с волновым вектором  $k'' = \sqrt{3} \frac{\omega_{Le}}{c}$ . Этот процесс описывается вкладом в уравнение (61.2) от полюса

$$\varepsilon^{tr}(\omega'', k'') - \frac{k''^2 c^2}{\omega''^2} = 0. \quad (61.17)$$

Тепловым движением частиц в этом процессе можно пренебречь, и для скорости его протекания из (61.2) имеем уравнение

$$\left\{ \frac{dW^l}{dt} \right\}_{cl} = - \frac{1}{12(2\pi)^2} \cdot \frac{\omega_{Le}}{N_e r_{De}^3} \cdot \frac{W^l(k)}{T_e} \cdot \frac{c^2 r_{De}^4}{v_{Te}^2} \int dk' W^l(k') \times \\ \times \delta \left[ 3 - (k + k')^2 \frac{c^2}{\omega_{Le}^2} \right] \frac{[kk']}{k^2 k'^2} (k^2 - k'^2)^2, \quad (61.18)$$

при написании которого учтено, что  $\omega'' = \omega + \omega' = 2\omega_{Le}$ ,  $k'' = k' + + k$  и что при этом

$$\frac{1}{\varepsilon^{tr}(\omega'', k'') - \frac{k''^2 c^2}{\omega''^2}} \approx -i\pi\delta \left[ \varepsilon^{tr}(\omega'', k'') - \frac{k''^2 c^2}{\omega''^2} \right] = -i4\pi\delta \left( 3 - \frac{k''^2 c^2}{\omega_{Le}^2} \right).$$

Из уравнения (61.18) легко оцениваем характерное время слияния продольных волн с длиной волны  $\lambda_0 \approx c/\omega_{Le}$ :

$$\tau_{cl} \approx 10^3 \frac{N_e r_{De}^3}{\omega_{Le}} \cdot \frac{T_e}{W^l} \left( \frac{c}{v_{Te}} \right)^5. \quad (61.19)$$

Сравнивая это выражение с (61.14) для  $\lambda_0 \sim \frac{1}{k} \sim \frac{c}{\omega_{Le}}$  и  $\Delta k \sim \frac{\omega_{Le}}{c}$ , видим, что  $\tau_{cl}/\tau_{пр} \sim 10 \frac{v_{Te}}{c} < 1$ , т. е. перекачка по спектру идет медленнее, чем слияние волн. Но для таких волн очень трудно осуществить условие  $\tau_{cl} \nu_{ei} < 1$ , для этого нужно выполнение неравенства  $W^l \gg T_e (c/v_{Te})^5$ .

Наряду с рассмотренным процессом слияния двух продольных волн в одну поперечную третье слагаемое в уравнении (61.2) описывает также рассеяние продольной волны через промежуточную поперечную виртуальную волну. Этот процесс описывается вкладом вне полюса (61.17), т. е. от  $\omega''$  и  $k''$ , для которых величина (61.17) от-

лично от нуля. Из уравнения (61.2) для этого процесса получаем

$$\left\{ \frac{dW^l}{dt} \right\}_{\text{сп}} = - \frac{1}{6(2\pi)^{5/2}} \cdot \frac{\omega_{Le}}{N_e r_{De}^3} \cdot \frac{W^l(k)}{T_e} r_{De}^2 \int dk' W^l(k') \frac{[kk']^2}{k^2 k'^2} \left[ 1 + \right. \\ \left. + 4 \frac{(kk') c^2}{\omega_{Le}^2} \cdot \frac{|k - k'|^2}{k^2 - k'^2} \right] \left[ \frac{4}{9} \cdot \frac{c^4 (k - k')^2}{v_{Te}^4 (k^2 - k'^2)} + 2 \frac{c^2}{v_{Te}^2} + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{r_{De}^2 (k - k')^2} \right]^{-1}. \quad (61.20)$$

Легко показать, что для коротковолновых колебаний с  $k, k' > > \omega_{Le}/c$  перекачка волн по спектру благодаря рассеянию через промежуточное поперечное поле всегда меньше, чем перекачка, обусловленная кулоновским рассеянием. Для длинноволновых же колебаний с  $k, k' < \omega_{Le}/c$  это не так. Уравнение (61.20) в этом пределе (точнее, для волн с  $k, k' \ll \frac{\omega_{Le}}{c} \cdot \frac{v_{Te}}{c}$ ) принимает вид

$$\left\{ \frac{dW^l}{dt} \right\}_{\text{сп}} = - \frac{2}{3(2\pi)^{7/2}} \cdot \frac{\omega_{Le}}{N_e r_{De}^3} \cdot \frac{W^l(k)}{T_e} r_{De}^4 \int dk' W^l(k') \frac{[kk']^2}{k^2 k'^2} \times \\ \times \frac{|k - k'|^3}{k^2 - k'^2}. \quad (61.21)$$

Отсюда видно, что перекачка волн по спектру благодаря запаздывающему взаимодействию, так же как и кулоновскому, происходит из коротковолновой области в длинноволновую, причем время перекачки

$$\tau_{\text{сп}} \sim 10^3 \frac{N_e r_{De}^3}{\omega_{Le}} \cdot \frac{T_e}{W^l} \cdot \frac{\Delta k}{k^5 r_{De}^4} \quad (61.22)$$

оказывается в ряде случаев меньше времени (61.14), обусловленного кулоновским рассеянием, например в условиях  $(\Delta k)^2 r_{De}^2 < 0,1$  (или  $\Delta k \sim k \sim k'$  при  $k^2 r_{De}^2 < 0,1$ ).

Наконец, отметим, что последнее слагаемое в уравнении (61.2) в случае нелинейного взаимодействия электронных ленгмюровских колебаний тождественно равно нулю. В этом легко убедиться, если вспомнить, что оно описывает слияние двух продольных волн в третью продольную, а для электронных ленгмюровских волн подобный процесс невозможен. Последнее слагаемое уравнения (61.2) проявляется в таких процессах, как слияние двух ионно-звуковых волн в третью, либо слияние продольной электронной волны с ионно-звуковой. Здесь, однако, не будем рассматривать все многообразие нелинейных эффектов взаимодействия продольных и поперечных волн в изотропной плазме и тем более в плазме, находящейся в магнитном поле, так как по этому вопросу имеется обширная литература.

В заключение приведем еще одну широко распространенную форму записи нелинейного уравнения, описывающего взаимодействия волн в плазме. На примерах уравнений (61.5), (61.18) и (61.20) было

показано, что нелинейное уравнение, описывающее взаимодействие продольных волн в плазме, имеет вид

$$\frac{dW^l(\mathbf{k})}{dt} = W^l(\mathbf{k}) \int d\mathbf{k}' Q(\mathbf{k}, \mathbf{k}') W^l(\mathbf{k}'). \quad (61.23)$$

Часто вместо спектральной плотности энергии  $W^l(\mathbf{k})$  вводят число колебаний (число плазмонов)

$$N_{\mathbf{k}} = \frac{W^l(\mathbf{k})}{\hbar\omega(\mathbf{k})}, \quad (61.24)$$

где  $\omega(\mathbf{k})$  — частота продольных волн.

Легко видеть, что  $N_{\mathbf{k}}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{dN_{\mathbf{k}}}{dt} = \hbar N_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{k}' Q(\mathbf{k}, \mathbf{k}') N_{\mathbf{k}'} \omega(\mathbf{k}'). \quad (61.25)$$

Для описания взаимодействия волн разного типа в плазме (продольных и поперечных) вводят соответствующие числа плазмонов.

### Задачи к главе XII

**Задача 1.** Исследовать процесс вынужденного комптоновского рассеяния поперечной волны в изотропной плазме.

**Решение.** Будем учитывать лишь кулоновское рассеяние на флуктуациях продольного поля и считать фазы падающей и рассеянной волн случайными. При этом, подставляя в уравнение (59.20) коррелятор полей (61.1) и считая отличным от нуля лишь

$$W^{lr} = \frac{\partial}{\partial\omega} \left\{ \omega \left[ \text{Re } \varepsilon^{lr}(\omega, k) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right] \right\} (E^{lr})_{\omega, \mathbf{k}} \quad (1)$$

для вынужденного комптоновского рассеяния поперечных волн, получаем [ср. с. (61.5)]:

$$\left\{ \frac{dW^{lr}}{dt} \right\}_{\text{кул}} = W^{lr}(\mathbf{k}) \int d\mathbf{k}' Q(\mathbf{k}, \mathbf{k}') W^{lr}(\mathbf{k}'), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = & -\frac{1}{8(2\pi)^3} \cdot \frac{\omega_{Le}^4}{N_e T_e \omega^3} \cdot \frac{(k'' r_{De})^2}{|\varepsilon^l(\omega'', k'')|^2} \cdot \left\{ \text{Im } \delta\varepsilon_e^l(\omega'', k'') \times \right. \\ & \times \left[ 2 \frac{v_{Te}^2}{\omega^2} \cdot \frac{[\mathbf{k}\mathbf{k}']^2}{k^2 k'^2} (k'^2 + k^2 - \mathbf{k}\mathbf{k}') \cdot (2\text{Re } \delta\varepsilon_e^l(\omega'', k'') + 2\text{Re } \delta\varepsilon_e^l(\omega'', k'') \times \right. \\ & \times \left. \text{Re } \delta\varepsilon_e^l(\omega'', k'') + |\delta\varepsilon_e^l(\omega'', k'')|^2) + \left( 1 + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \right) \left| 1 + \delta\varepsilon_e^l(\omega'', k'') \right|^2 \right] + \\ & \left. + \left( 1 + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \right) \text{Im } \delta\varepsilon_e^l(\omega'', k'') \left| \delta\varepsilon_e^l(\omega'', k'') \right|^2 \right\}. \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь  $\omega'' = \omega - \omega'$ ,  $k'' = k - k'$ , причем  $\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{Le}^2$ .

Антисимметрия ядра уравнения (3) относительно замены  $\mathbf{k} \rightleftharpoons \mathbf{k}'$  сразу же приводит к закону сохранения полной энергии поперечных электромагнитных

волн в процессе рассеяния:

$$\int dk W^{tr}(k) \equiv (E^{tr2}) = \text{const.} \quad (4)$$

Таким образом, рассеяние носит упругий характер, возможна лишь перекачка энергии из одной области спектра в другую без изменения полной энергии поля.

В случае рассеяния волн на флуктуациях чисто электронной плазмы вкладом ионов в (3) можно пренебречь:

$$Q(k, k') = -\frac{1}{8(2\pi)^3} \cdot \frac{\omega_{Le}^4}{N_e T_e \omega^3} \cdot \frac{(k'' r_{De})^2}{|\varepsilon^l(\omega'', k'')|^2} \left\{ \text{Im} \delta \varepsilon_e^l(\omega'', k'') \left[ 2 \frac{v_{Te}^2}{\omega^2} \times \right. \right. \\ \times \frac{[kk']^2}{k^2 k'^2} (k'^2 + k^2 - kk') \cdot (2 \text{Re} \delta \varepsilon_e^l(\omega'', k'') + |\delta \varepsilon_e^l(\omega'', k'')|^2) + \\ \left. \left. + \left( 1 + \frac{(kk')^2}{k^2 k'^2} \right) \right] \right\}. \quad (5)$$

Оценим это выражение для рассеяния высокочастотных поперечных волн  $\omega, \omega' \gg \omega_{Le}$  в обратном направлении,  $k' = -k$ . Имеем

$$Q(k, k') \approx -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{Le}^4}{\omega^3} \cdot \frac{c}{v_{Te}} \cdot \frac{\Delta k}{k} \cdot \frac{1}{N_e T_e}. \quad (6)$$

Из уравнения (2) при этом получаем характерное время рассматриваемого процесса

$$\tau \approx 10^3 \frac{\omega^3}{\omega_{Le}^4} \cdot \frac{v_{Te}}{c} \cdot \frac{k}{\Delta k} \cdot \frac{N_e T_e}{E_{tr}^2}. \quad (7)$$

Амплитуда рассеянной волны будет расти во времени как

$$(E^{tr2})_{\text{рас}} \approx (E^{tr2})_{\text{пад}} e^{t/\tau}. \quad (8)$$

**Задача 2.** Вывести выражения для двух- и трехиндексных диэлектрических проницаемостей холодной электронной плазмы в модели независимых частиц. Решени е. Исходим из системы уравнений непрерывности и Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \text{div} NV &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + (V \nabla) V &= \frac{e}{m} \left\{ E + \frac{1}{c} [VB] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Поля  $E$  и  $V$  удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} B &= \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j, \quad \text{div} B = 0, \\ \text{rot} E &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \text{div} E = 4\pi \rho, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$\rho = eN, \quad j = eNV. \quad (3)$$

В равновесном состоянии в отсутствие полей  $E$  и  $V$  считаем

$$N_0 = \text{const}, \quad V_0 = 0. \quad (4)$$

Под действием полей возмущения возникают переменные  $\delta N(t, \mathbf{r})$  и  $\mathbf{V}(t, \mathbf{r})$ , причем в случае малых полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  можно записать

$$N = N_0 + N_1 + N_2 + \dots, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots, \quad (5)$$

где

$$N_1 \sim \mathbf{E}, \quad N_2 \sim \mathbf{E}^2, \quad \mathbf{V}_1 \sim \mathbf{E}, \quad \mathbf{V}_2 \sim \mathbf{E}^2. \quad (6)$$

В линейном приближении по полю имеем

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + \operatorname{div} N_0 \mathbf{V}_1 = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial t} = \frac{e}{m} \mathbf{E}. \quad (7)$$

После преобразования Фурье для Фурье-компонент отсюда получаем

$$N_1(\omega, \mathbf{k}) = \frac{ieN_0}{m\omega^2} \mathbf{kE}(\omega, \mathbf{k}), \quad \mathbf{V}_1(\omega, \mathbf{k}) = \frac{ie}{m\omega} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}). \quad (8)$$

При этом в линейном приближении по полю имеем

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = e N_0 \mathbf{V}_{1i}(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}), \quad (9)$$

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{ie^2 N_0}{m\omega},$$

или

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}), \quad (10)$$

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right) \delta_{ij}.$$

Здесь  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  — двухиндексный тензор диэлектрической проницаемости холодной изотропной электронной плазмы.

Чтобы получить выражение для трехиндексного тензора диэлектрической проницаемости, запишем плотность тока с точностью до членов второго порядка по полю:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e N_0 \mathbf{V}_1(\mathbf{r}, t) + e N_1(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}_1(\mathbf{r}, t) + e N_0 \mathbf{V}_2(\mathbf{r}, t). \quad (11)$$

Здесь  $N_1(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{V}_1(\mathbf{r}, t)$  определяются уравнениями (7), а

$$\frac{\partial \mathbf{V}_2}{\partial t} + (\mathbf{V}_1 \nabla) \mathbf{V}_1 = \frac{e}{mc} [\mathbf{V}_1 \mathbf{B}]. \quad (12)$$

Исключая из этого уравнения поле  $\mathbf{B}$  с помощью [уравнения Максвелла и производя преобразования Фурье, получаем

$$V_{2i}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega} \int d\omega' d\mathbf{k}' d\omega'' d\mathbf{k}'' \delta(\omega - \omega' - \omega'') \cdot \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \times$$

$$\times \left[ \alpha_{ijs}(\omega'', \mathbf{k}'') \frac{ie}{m} E_j(\omega'', \mathbf{k}'') + k_s'' V_{1i}(\omega'', \mathbf{k}'') \right] V_{1s}(\omega', \mathbf{k}'), \quad (13)$$

где

$$\alpha_{ijs}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega} (k_i \delta_{js} - k_s \delta_{ij}). \quad (14)$$

Подставляя далее  $\mathbf{V}_1(\omega, \mathbf{k})$  из (8), находим

$$V_{2i}(\omega, \mathbf{k}) = - \frac{e^2}{m^2} \int d\omega' d\mathbf{k}' \frac{k_i - k_i'}{\omega - \omega'} \cdot \frac{\delta_{js}}{\omega\omega'} \cdot E_s(\omega', \mathbf{k}') E_j(\omega'', \mathbf{k}''), \quad (15)$$

причем  $\omega'' = \omega - \omega'$ , а  $\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ .

Из (11) окончательно находим Фурье-компоненту плотности тока с точностью до членов второго порядка по полю:

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) + \int d\omega' d\mathbf{k}' \sigma_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') E_j(\omega'', \mathbf{k}'') E_s(\omega', \mathbf{k}'), \quad (16)$$

где

$$\sigma_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') = -\frac{e^3 N_0}{m^2} \cdot \frac{1}{\omega' \omega''} \left( \frac{k_i''}{\omega} \delta_{js} + \frac{k_s'}{\omega'} \delta_{ij} \right), \quad (17)$$

или

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) + \int d\omega' d\mathbf{k}' \cdot \varepsilon_{ijs}(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') E_j(\omega'', \mathbf{k}'') E_s(\omega', \mathbf{k}'), \quad (18)$$

$$\varepsilon_{ijs}(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') = -\frac{ie}{m} \cdot \frac{\omega_{Le}^2}{\omega \omega' \omega''} \cdot \left( \frac{k_i''}{\omega} \delta_{js} + \frac{k_s'}{\omega'} \delta_{ij} \right).$$

Тензор  $\varepsilon_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega'', \mathbf{k}'')$  получается из  $\varepsilon_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}')$  путем замены  $\omega' \rightleftharpoons \omega''$ ,  $\mathbf{k}' \rightleftharpoons \mathbf{k}''$ ,  $s \rightleftharpoons j$ . Наконец, для их симметризованной комбинации [ср. (60.20)] имеем

$$S_{ijs}(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') = -\frac{ie}{m} \frac{\omega_{Le}^2}{\omega \omega' \omega''} \cdot \left( \frac{k_i}{\omega} \delta_{js} + \frac{k_j''}{\omega''} \delta_{is} + \frac{k_s'}{\omega'} \delta_{ij} \right). \quad (19)$$

Аналогично находят четырехиндексные тензоры  $\varepsilon_{iajb}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}', \omega'', \mathbf{k}'')$  и  $V_{iajb}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}')$  [см. (59.21) и (60.22)].

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Основные операторы теории поля  
в ортогональной криволинейной системе координат

Основными операторами теории поля являются grad, div, rot, Δ. В прямоугольной декартовой системе координат, в которой

$$\mathbf{r} = ix + jy + kz,$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  — направляющие орты, имеем

$$\begin{aligned} \text{grad } \Psi(x, y, z) &= \nabla \Psi = \mathbf{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \\ \text{div } \mathbf{A}(x, y, z) &= (\nabla \mathbf{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \\ \text{rot } \mathbf{A}(x, y, z) &= [\nabla \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right), \\ \Delta \Psi(x, y, z) &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \nabla &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Не представляет труда записать эти операторы в любой криволинейной системе координат  $(q_1, q_2, q_3)$ , связанной с прямоугольной декартовой системой формулами преобразования

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3). \quad (3)$$

Если детерминант преобразования

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial q_1 & \partial x/\partial q_2 & \partial x/\partial q_3 \\ \partial y/\partial q_1 & \partial y/\partial q_2 & \partial y/\partial q_3 \\ \partial z/\partial q_1 & \partial z/\partial q_2 & \partial z/\partial q_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (4)$$

го справедливы следующие соотношения:

$$\text{grad } \Psi (q_1, q_2, q_3) = \frac{\mathbf{e}_1}{H_1} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{H_2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{H_3} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_3},$$

$$\text{div } \mathbf{A} (q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 H_1 H_2) \right], \quad (5)$$

$$\text{rot } \mathbf{A} (q_1, q_2, q_3) = \frac{\mathbf{e}_1}{H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} (A_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (A_2 H_2) \right] + \frac{\mathbf{e}_2}{H_1 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_3} (A_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (A_3 H_3) \right] + \frac{\mathbf{e}_3}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (A_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (A_1 H_1) \right],$$

$$\Delta \Psi (q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ H_2 H_3 \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \right) + H_1 H_3 \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} \right) + H_1 H_2 \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{1}{H_3} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_3} \right) \right].$$

Здесь  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — направляющие орты криволинейной системы координат, а  $H_1, H_2, H_3$  — так называемые коэффициенты Ляме, которые находят по формуле

$$H_i = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}, \quad (6)$$

где  $i = 1, 2, 3$ .

В книге часто использовалась цилиндрическая система координат, в которой

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \quad (7)$$

а  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$  — направляющие орты, причем  $q_1 = r, q_2 = \varphi, q_3 = z$ . Имеем

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = 1. \quad (8)$$

Поэтому в цилиндрической системе координат

$$\text{grad } \Psi (r, \varphi, z) = \mathbf{e}_z \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} (r, \varphi, z) &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] = \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} (r, \varphi, z) &= \mathbf{e}_r \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\varphi \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \\ &+ \mathbf{e}_z \left( \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right), \end{aligned}$$

$$\Delta \Psi (r, \varphi, z) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}.$$



**Пример 1.** Найти коэффициенты Ляме в сферической системе координат:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta,$$

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \vartheta.$$

Находим

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r \sin \vartheta, \quad H_3 = r.$$

**Пример 2.** Считая ось  $Oz$  направленной вдоль вектора  $\mathbf{B}$ , вычислить оператор  $[\mathbf{vB}] \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$  в цилиндрической системе в пространстве скоростей  $\mathbf{v}_x = v_{\perp} \cos \varphi$ ,  $\mathbf{v}_y = v_{\perp} \sin \varphi$ ,  $v_z = v_z$ . Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial v_x} = \frac{\partial v_{\perp}}{\partial v_x} \cdot \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + \frac{\partial \varphi}{\partial v_x} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} - \frac{\sin \varphi}{v_{\perp}} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial}{\partial v_y} = \frac{\partial v_{\perp}}{\partial v_y} \cdot \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + \frac{\partial \varphi}{\partial v_y} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + \frac{\cos \varphi}{v_{\perp}} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

легко находим

$$[\mathbf{vB}] \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} = B \left( v_y \frac{\partial}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial}{\partial v_y} \right) = -B \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ II

### Элементы тензорного исчисления

Понятие о тензоре тесно связано с преобразованием систем координат. В книге использовалась в основном трехмерная ортогональная декартова система координат  $oxyz$ , которую далее будем записывать в симметричной форме  $Ox_1x_2x_3$ . Пусть заданы две декартовы системы координат  $Ox_1x_2x_3$  и  $Ox'_1x'_2x'_3$  с общим началом координат  $O$ . Тогда координаты любой точки  $M$  в нештрихованной и штрихованной системах связаны между собой соотношениями

$$x_k = e_{kj} x'_j, \quad x'_k = e_{kj}^{-1} x_j = e_{jk} x_j, \quad (1)$$

где  $e_{ij}$  — косинусы углов между осями штрихованной и нештрихованной систем:

$$\begin{array}{c|ccc} & x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ \hline x_1 & e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ \hline x_2 & e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ \hline x_3 & e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{array}, \quad (2)$$

а по повторяющимся (немым) индексам везде далее подразумевается суммирование от 1 до 3.

Легко показать, что имеет место соотношение

$$e_{ik} e_{jk} = e_{ki} e_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (3)$$

Преобразование (1) называют ортогональным аффинным преобразованием (поворотом системы координат), а матрицу

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \quad (4)$$

— матрицей преобразования.

Поскольку с точкой  $M$  связан вектор  $\mathbf{x}$  с компонентами  $x_1, x_2, x_3$ , либо  $\mathbf{x}'$  с компонентами  $x'_1, x'_2, x'_3$  соответственно в нештрихованной и штрихованной системах координат, соотношения (1) выражают законы преобразования векторных величин при поворотах системы координат. Более того, совокупность трех чисел, преобразующихся согласно (1), является вектором.

Если заданы два вектора  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  и  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , то их скалярное произведение, определенное соотношением

$$(\mathbf{a}\mathbf{b}) = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \quad (5)$$

оказывается инвариантным при преобразованиях системы координат (1), т. е.

$$a_i b_i = a'_i b'_i. \quad (6)$$

Действительно,

$$a'_i b'_i = e_{ki} a_k e_{sj} b_s = \delta_{ks} a_k b_s = a_s b_s,$$

что и требовалось показать.

Свойство инвариантности скалярного произведения (6) часто используется в качестве определения вектора. Так, если заданы вектор  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  и совокупность трех чисел  $a_i = (a_1, a_2, a_3)$ , причем линейная форма

$$F_1 = a_i x_i \quad (7)$$

инвариантна при преобразованиях системы координат (1), то совокупность  $a_i$  образует вектор,  $(a_i) = \mathbf{a}$ .

По аналогии определяется и тензор второго ранга: если заданы два вектора  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  и  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  и квадратичная форма

$$F_2 = d_{ij} x_i y_j \quad (8)$$

инвариантна при преобразованиях системы координат (1), то совокупность 9 чисел  $d_{ij}$  называют тензором второго ранга.

Легко показать, что совокупность  $\delta_{ij}$ , определенная соотношением (3), является тензором. Действительно,

$$\delta_{ij} x_i y_j = x_j y_j = \mathbf{x}\mathbf{y} = \text{const}. \quad (9)$$

Из определения (8) следуют формулы преобразования для тензора второго ранга:

$$d_{ij} x_i y_j = d'_{ij} x'_i y'_j = d'_{ij} e_{mi} x_m e_{nj} y_n = d'_{sk} e_{is} e_{jk} x_i y_j, \quad (10)$$

или

$$d_{ks} = e_{ki} e_{sj} d'_{ij}. \quad (11)$$

Аналогично получается формула

$$d'_{ks} = e_{ik} e_{js} d_{ij}. \quad (12)$$

Таким образом, тензор второго ранга преобразуется как общее произведение двух векторов  $a_i b_j$ . Поэтому часто тензор второго ранга определяется как совокупность 9 чисел, преобразующихся как общее произведение двух векторов.

Аналогично определяются тензоры более высоких рангов. Так, тензором третьего ранга  $\beta_{ijk}$  называется совокупность 27 чисел, оставляющих инвариантом при преобразованиях (1) кубическую форму

$$F_3 = \beta_{ijk} x_i y_j z_k, \quad (13)$$

когда  $x$ ,  $y$  и  $z$  — векторы, либо совокупность чисел  $\beta_{ijk}$ , преобразующихся как общее произведение трех векторов  $a_i$ ,  $b_j$ ,  $c_k$  и т.д. При этом скалярную величину можно рассматривать как тензор нулевого ранга, а векторную — как тензор первого ранга.

Компоненты тензоров могут быть как действительными, так и комплексными числами. Поэтому в общем случае говорят о комплексных тензорах. При этом важное значение имеет понятие об эрмитовости тензора. Так, тензор второго ранга называется эрмитовским, если (звездочка «\*» означает знак комплексного сопряжения)

$$\alpha_{ij}^{*a} = \alpha_{ji}^a. \quad (14)$$

Если же

$$\alpha_{ij}^{*a} = -\alpha_{ij}^a, \quad (15)$$

то тензор называется антиэрмитовским. Очевидно, что любой тензор можно разложить на сумму эрмитовской и антиэрмитовской частей.

Ранее говорилось о тензорах как о совокупности комплексных чисел. Компоненты тензора, однако, могут быть функциями как скалярных (например, времени,  $\alpha_{ij}(t)$ ), так и векторных (например, координат,  $\alpha_{ij}(r)$ ) величин. Поэтому в общем случае следует записывать:

$\varphi(t, r)$  — скаляр (тензор нулевого ранга),

$\alpha_i(t, r)$  — вектор (тензор первого ранга),

$\alpha_{ij}(t, r)$  — тензор второго ранга,

$\beta_{ijk}(t, r)$  — тензор третьего ранга и т. д.

Аналогично определяются тензоры как функции многих скалярных и векторных (а также тензорных) переменных.

При дифференцировании тензора по скаляру ранг его не меняется; дифференцирование же тензора по вектору увеличивает его ранг. Так,

$\frac{\partial \varphi(t, r)}{\partial r_i}$  — вектор (тензор первого ранга),

$\frac{\partial \alpha_i(t, r)}{\partial r_j}$  — тензор второго ранга,

$\frac{\partial \alpha_{ij}(t, r)}{\partial r_k}$  — тензор третьего ранга и т. д.

Это обстоятельство следует учитывать при разложении тензора в ряд по степеням векторной величины:

$$\alpha_{ij}(t, r + \Delta r) = \alpha_{ij}(t, r) + \frac{\partial \alpha_{ij}(t, r)}{\partial r_k} \Delta r_k + \frac{\partial^2 \alpha_{ij}(t, r)}{\partial r_k \partial r_s} \Delta r_k \Delta r_s + \dots \quad (16)$$

Разложение в ряд по степеням скалярной величины проводят обычным образом.

До сих пор говорилось о повороте системы координат и определялись тензорные величины как обладающие определенной симметрией по отношению к преобразованию поворота (1). Введем преобразование зеркального отражения осей симметрии координат. При этом все тензорные величины следует делить на истинные и псевдовеличины. Так, истинным скаляром называется величина, которая инвариантна не только при поворотах системы координат, но и при преобразовании зеркального отражения. Если же величина не меняется при поворотах системы координат, но меняет свой знак при зеркальном отражении, то она называется псевдоскаляром. Подобным образом определяют истинные и псевдотензоры любого ранга. Истинный тензор четного ранга не меняет знака при преобразовании зеркального отражения, а псевдотензор меняет. Истинный тензор не-

четного ранга меняет знак при преобразовании зеркального отражения, а псевдотензор не меняет.

К числу истинных векторов в трехмерном пространстве относятся радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , векторы скорости  $\mathbf{v}$  и импульса  $\mathbf{p}$ , волновой вектор  $\mathbf{k}$ , векторы напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  и электрической индукции  $\mathbf{D}$ , вектор плотности тока  $\mathbf{j}$  и др. Истинными скалярами являются время  $t$ , плотность заряда  $\rho$ , энергия частицы,  $\mathcal{E}(p)$  и частота  $\omega(\mathbf{k})$ , причем

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{E}(p)}{\partial \mathbf{p}}, \quad v_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}. \quad (17)$$

Псевдовектор можно образовать как векторное произведение двух истинных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , т.е.  $[\mathbf{ab}]$  является псевдовектором. Наоборот, векторное произведение истинного вектора  $\mathbf{a}$  на псевдовектор  $\mathbf{d}$  дает истинный вектор  $[\mathbf{ad}]$ . Поэтому магнитное поле  $\mathbf{B}$  является псевдовектором — его векторное произведение на вектор скорости  $\mathbf{v}$  дает истинный вектор силы  $\mathbf{F} \sim [\mathbf{vB}]$ .

Особую роль в электродинамике материальных сред играет единичный полностью антисимметричный тензор третьего ранга  $e_{ijk}$ , определяемый соотношением

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{— если какая-либо пара индексов } i, j \text{ и } k \text{ совпадает,} \\ 1 & \text{— если индексы } i, j \text{ и } k \text{ образуют правильную последовательность чисел } 1, 2, 3, \\ -1 & \text{— если индексы } i, j \text{ и } k \text{ образуют неправильную последовательность чисел } 1, 2, 3. \end{cases} \quad (18)$$

Правильной называется циклическая последовательность чисел 1, 2, 3, неправильной — нециклическая последовательность этих чисел.

Тензор  $e_{ijk}$  является псевдотензором третьего ранга. Поэтому векторное произведение двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  можно записать в виде

$$[\mathbf{ab}]_i = e_{ijk} a_j b_k. \quad (19)$$

Скалярное произведение истинного вектора  $\mathbf{a}$  на псевдовектор  $\mathbf{d}$  в отличие от скалярного произведения двух истинных векторов является псевдоскаляром:

$$(\mathbf{ad}) = a_i d_i = a_i e_{ijk} b_j c_k. \quad (20)$$

Здесь  $d_i = e_{ijk} b_j c_k$  — псевдовектор, а  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — истинные векторы.

Сказанное справедливо не только для числовых и функциональных векторов  $a_i(\mathbf{r})$  и тензоров  $\alpha_{ij}(\mathbf{r})$ ,  $\beta_{ijk}(\mathbf{r})$ , но также для векторных и тензорных операторов. Как отмечалось, при дифференцировании по векториому аргументу ранг матрицы увеличивается. Теперь можно ввести оператор дифференцирования как вектор

$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{r}}$  и определить операцию дифференцирования как векторное, либо скалярное произведение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_i} \varphi(\mathbf{r}) &= \nabla_{\mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}) = \text{grad } \varphi(\mathbf{r}), \\ \frac{\partial}{\partial r_i} a_i(\mathbf{r}) &= \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \text{div } \mathbf{a}(\mathbf{r}), \\ e_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_j} a_k(\mathbf{r}) &= [\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r})]_i = \text{rot } \mathbf{a}(\mathbf{r}) \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (21)$$

При этом, если  $\varphi(\mathbf{r})$  — истинный скаляр, а  $\mathbf{r}$  — истинный вектор, то первая из величин (21) — истинный вектор; если же  $\varphi(\mathbf{r})$  — псевдоскаляр, а  $\mathbf{r}$  — истинный вектор, то эта величина — псевдовектор; псевдовектором она будет также,

если  $\varphi(\mathbf{r})$  истинный скаляр, а  $\mathbf{r}$  — псевдовектор. Аналогично расшифровываются и другие величины (21), а также высшие производные и операторы высшего порядка. Например,

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial}{\partial r_i} \varphi(\mathbf{r}) = \Delta \varphi(\mathbf{r}) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \right) \varphi(\mathbf{r}), \quad (22)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = [\nabla_{\mathbf{r}} [\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r})]]_i = \varepsilon_{imn} \varepsilon_{njh} \frac{\partial}{\partial r_j} \cdot \frac{\partial}{\partial r_m} \cdot a_h = \frac{\partial}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial}{\partial r_j} a_j(\mathbf{r}) - \frac{\partial^2}{\partial r_j \partial r_j} a_i(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{r}) - \Delta \mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad \text{и т. д.}$$

Изложенную теорию трехмерных тензоров легко обобщить на четырехмерный случай. В четырехмерном пространстве времени и координат  $(t, \mathbf{r})$  преобразованием поворота являются преобразования Лоренца, которые и положены в основу определения четырехмерных векторов и тензоров. Четырехмерными векторами, кроме  $(t, \mathbf{r})$ , являются плотности тока и заряда  $(\mathbf{j}, \rho)$ , волновой вектор и частота  $(\omega, \mathbf{k})$  и др. Теорию четырехмерных тензоров, однако, здесь не будем излагать, поскольку в книге они по существу не использовались.

**Пример 1.** Сокращением тензора по двум индексам называется суммирование диагональных элементов квадратной матрицы тензора по этим индексам. При сокращении тензора по двум индексам его ранг уменьшается на два.

Сократить единичный тензор второго ранга  $\delta_{ij}$ , т. е. найти  $\delta_{ii}$ :

$$\delta_{ii} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

**Пример 2.** Составить общий тензор второго ранга  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}) \equiv \varepsilon_{ij}(-\mathbf{k})$  из одного истинного вектора  $\mathbf{k}$  и сократить его по индексам:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}) = \alpha_1 \delta_{ij} + \alpha_2 k_i k_j = \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{tr} + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l,$$

т. е.

$$\alpha_1 = \varepsilon^{tr}, \quad \alpha_2 = \frac{\varepsilon^l - \varepsilon^{tr}}{k^2}.$$

В пределе  $\mathbf{k} \rightarrow 0$  отсюда имеем  $\varepsilon_{ij}(0) = \alpha_1 \delta_{ij}$ , а  $\varepsilon^l = \varepsilon^{tr} = \varepsilon$ . Таким образом общим тензором второго ранга в отсутствие какого-либо вектора,  $\mathbf{k} \rightarrow 0$ , является  $\varepsilon_{ij}(0) = \varepsilon \delta_{ij}$ :

$$\varepsilon_{ii}(k) = (3 - 1) \varepsilon^{tr} + \varepsilon^l = 2\varepsilon^{tr} + \varepsilon^l, \quad \varepsilon_{ii}(0) = 3\varepsilon.$$

**Пример 3.** Составить тензор второго ранга  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{B}) = \varepsilon_{ij}(-\mathbf{B})$  из одного псевдовектора  $\mathbf{B}$  и сократить его по индексам:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{B}) = \alpha_1 \delta_{ij} + \alpha_2 b_i b_j + \alpha_3 \varepsilon_{ijk} b_k \equiv \varepsilon_{\perp} \delta_{ij} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) b_i b_j + i g \varepsilon_{ijk} b_k,$$

где  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ .

В матричной форме этот тензор имеет вид

$$\varepsilon_{ij}(B) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & i g & 0 \\ -i g & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}.$$

Здесь ось  $Ox_3 = Oz$  направлена вдоль вектора  $\mathbf{B}$ . В отсутствие вектора  $\mathbf{B}$  имеем

$$\varepsilon_{ij}(0) = \varepsilon \delta_{ij}, \quad \varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{\parallel} = \varepsilon.$$

Наконец,

$$\varepsilon_{ii}(\mathbf{B}) = 2\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}, \quad \varepsilon_{ii}(0) = 3\varepsilon$$

**Пример 4.** Составить тензор второго ранга  $\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{V}) = \epsilon_{ji}(-\mathbf{k}, -\mathbf{V})$  из истинного вектора  $\mathbf{k}$  и псевдовектора  $\mathbf{V}$  и сократить его по индексам:

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{V}) = \alpha_1 \delta_{ij} + \alpha_2 k_i k_j + \alpha_3 b_i b_j + \alpha_4 e_{ijm} \cdot b_m + \alpha_5 e_{imn} e_{jrs} k_m b_n k_r b_s + \\ + \alpha_6 (e_{imn} k_m b_n k_j - e_{jmn} k_m b_n k_i),$$

где  $\mathbf{b} = \mathbf{V}/V$ .

Направив ось  $Ox_3 = Oz$  вдоль вектора  $\mathbf{b}$ , а ось  $Ox_1 = Ox$ , так, чтобы вектор  $\mathbf{k} = (k_{\perp}, 0, k_{\parallel})$ , получим

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{V}) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ -\epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & -\epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{pmatrix},$$

Здесь

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \alpha_1 + \alpha_2 k_{\perp}^2, & \epsilon_{22} &= \alpha_1 + \alpha_5 k_{\perp}^2, \\ \epsilon_{12} &= \alpha_4 + \alpha_6 k_{\perp}^2, & \epsilon_{23} &= -\alpha_6 k_{\perp} k_{\parallel}, \\ \epsilon_{13} &= \alpha_2 k_{\perp} k_{\parallel}, & \epsilon_{33} &= \alpha_1 + \alpha_2 k_{\parallel}^2 + \alpha_3. \end{aligned}$$

Сокращая полученный тензор по индексам, находим

$$\epsilon_{ii}(\mathbf{k}, \mathbf{V}) = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = 3\alpha_1 + \alpha_2 k^2 + \alpha_3 + \alpha_5 k_{\perp}^2.$$

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

---

### К ПЕРВОЙ ЧАСТИ

1. А х и е з е р А. И. и др. Электродинамика плазмы. — М.: Наука, 1974.
2. Б а л е с к у Р. Статистическая механика заряженных частиц. — М.: Мир, 1965.
3. Б о г о л ю б о в Н. Н. Динамические проблемы статистической физики. — М.: Гостехиздат, 1946.
4. Г и н з б у р г В. Л. и Р у х а д з е А. А. Волны в магнитоактивной плазме. — М.: Наука, 1975.
5. Г и н з б у р г В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.
6. Г о л а н т В. Е., Ж и л и н с к и й А. П., С а х а р о в И. Е. Основы физики плазмы. — М.: Госатомиздат, 1975.
7. И ш и м а р у С. Основные принципы физики плазмы. — М.: Госатомиздат, 1975.
8. К л и м о н т о в и ч Ю. Л. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. — М.: Изд. МГУ, 1964.
9. К л и м о н т о в и ч Ю. Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. — М.: Госатомиздат, 1977.
10. К р о л л Н. и Т р а й в е л п и с А. Основы физики плазмы. — М.: Мир, 1975.
11. Л а н д а у Л. Д. и Л и ф ш и ц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1957.
12. Л о м и н а д з е Д. Г. Циклотронные волны в плазме. — Тбилиси.: Изд. «Мецниереба», 1975.
13. П л а т ц м а н Ф. и В о л ь ф П. Волны и взаимодействия в плазме твердых тел. — М.: Мир, 1975.
14. П у с т о в а л о в В. В. и С и л и н В. П. Нелинейное взаимодействие волн в плазме. — М.: Труды ФИАН, т. 61, 1972.
15. С и л и н В. П. Введение в кинетическую теорию газов. — М.: Наука, 1971.
16. С и л и н В. П. и Р у х а д з е А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. — М.: Госатомиздат, 1961.
17. С т и к с Т. Х. Теория плазменных волн. — М.: Госатомиздат, 1965.
18. Сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Л е о н т о в и ч а, т. 1—7. — М.: Госатомиздат, 1963—1973 гг.
19. Э к к е р Г. Теория полностью ионизованной плазмы. — М.: Мир, 1974.

### КО ВТОРОЙ ЧАСТИ

1. А х и е з е р А. И. и др. Электродинамика плазмы. — М.: Наука, 1974.
2. Г и н з б у р г В. Л. и Р у х а д з е А. А. Волны в магнитоактивной плазме. — М.: Наука, 1975.
3. Г и н з б у р г В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.
4. Г о л а н т В. Е., Ж и л и н с к и й А. П., С а х а р о в И. Е. Основы физики плазмы — М.: Госатомиздат, 1975.

5. Иванов А. А. Физика сильнонеравновесной плазмы. — М.: Госатомиздат, 1977.
6. Ишимару С. Основные принципы физики плазмы. — М.: Госатомиздат, 1975.
7. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1976.
8. Кондратенко А. Н. Плазменные волноводы. — М.: Госатомиздат, 1976.
9. Кролл Н. и Трайвелпис А. Основы физики плазмы. — М.: Мир, 1975.
10. Ломинадзе Д. Г. Циклотронные волны в плазме. — Тбилиси.: Изд. «Мецниереба», 1975.
11. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей, т. 1, 2. — М.: Госатомиздат, 1975.
12. Платцман Ф. и Вольф П. Волны и взаимодействия в плазме твердых тел. — М.: Мир, 1975.
13. Силин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. — М.: Наука, 1973.
14. Сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича, т. 1—7. — М.: Госатомиздат, 1963—1973 гг.
15. Эккер Г. Теория полностью ионизованной плазмы. — М.: Мир, 1974.

#### К ТРЕТЬЕЙ ЧАСТИ

1. Ахизер А. И. и др. Электродинамика плазмы. — М.: Наука, 1974.
2. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.
3. Иванов А. А. Физика сильнонеравновесной плазмы. — М.: Госатомиздат, 1977.
4. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1976.
5. Климонтович Ю. Л. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. — М.: Изд. МГУ, 1964.
6. Кролл Н. и Трайвелпис А. Основы физики плазмы. — М.: Мир, 1975.
7. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1957.
8. Силин В. П. и Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. — М.: Госатомиздат, 1961.
9. Силин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. — М.: Наука, 1973.
10. Ситенко А. Г. Флуктуации и нелинейные взаимодействия волн в плазме. — Киев.: «Наукова думка», 1977.
11. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. — М.: Наука, 1967.
12. Цытович В. Н. Теория турбулентной плазмы. — М.: Госатомиздат, 1971.
13. Сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича, т. 1—7. — М.: Госатомиздат, 1963—1973 гг.



# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<b>ЧАСТЬ I. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ РАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЫ . . . . .</b>	
<b>Глава I. Основные понятия физики плазмы . . . . .</b>	
§ 1. Определение плазмы . . . . .	5
§ 2. Параметры плазмы . . . . .	7
§ 3. Квазинейтральность. Плазменная частота и дебаевский радиус . . . . .	10
§ 4. Газовое приближение. Плазменный параметр . . . . .	12
<b>Глава II. Основы электродинамики сред с пространственной и временной дисперсией . . . . .</b>	
§ 5. Уравнения электромагнитного поля в среде и граничные условия . . . . .	16
§ 6. Тензор комплексной проводимости и диэлектрической проницаемости . . . . .	20
§ 7. Энергия электромагнитного поля в среде . . . . .	23
§ 8. Электромагнитные волны в среде . . . . .	27
§ 9. Начальная задача . . . . .	30
§ 10. Граничная задача . . . . .	33
<b>Глава III. Уравнения динамики плазмы . . . . .</b>	
§ 11. Простейшие модели плазмы . . . . .	40
§ 12. Кинетическое уравнение с самосогласованным полем . . . . .	43
§ 13. Кинетическое уравнение Больцмана . . . . .	45
§ 14. Интеграл столкновений заряженных частиц . . . . .	48
§ 15. Модельный интеграл упругих столкновений частиц . . . . .	52
§ 16. Обоснование простейших моделей плазмы . . . . .	55
<b>Глава IV. Диэлектрическая проницаемость и спектры колебаний однородной изотропной плазмы . . . . .</b>	
§ 17. Диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной однородной изотропной плазмы . . . . .	67
§ 18. Спектры продольных колебаний бесстолкновительной невырожденной плазмы . . . . .	73
§ 19. Продольные колебания бесстолкновительной вырожденной плазмы . . . . .	77
§ 20. Поперечные волны в бесстолкновительной изотропной плазме . . . . .	79
§ 21. Диэлектрическая проницаемость и спектры колебаний слабоионизованной плазмы с учетом столкновений частиц . . . . .	82
§ 22. Диэлектрическая проницаемость и спектры колебаний полностью ионизованной плазмы с учетом столкновений частиц . . . . .	87

<b>Глава V. Диэлектрическая проницаемость и спектры колебаний однородной магнитоактивной плазмы . . . . .</b>	<b>99</b>
§ 23. Тензор диэлектрической проницаемости однородной бесстолкновительной магнитоактивной плазмы . . . . .	99
§ 24. Диэлектрическая проницаемость и спектры колебаний холодной бесстолкновительной магнитоактивной плазмы . . . . .	105
§ 25. Влияние теплового движения частиц на характер колебаний бесстолкновительной магнитоактивной плазмы . . . . .	111
§ 26. Циклотронные волны в плазме . . . . .	117
§ 27. Тензор диэлектрической проницаемости слабоионизованной магнитоактивной плазмы с учетом столкновений частиц . . . . .	120
§ 28. Тензор диэлектрической проницаемости полностью ионизованной магнитоактивной плазмы с учетом столкновений частиц . . . . .	124
§ 29. Влияние столкновений частиц на затухание электромагнитных волн в магнитоактивной плазме . . . . .	127
<b>ЧАСТЬ 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЫ . . . . .</b>	<b>140</b>
<b>Глава VI. Взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой . . . . .</b>	<b>140</b>
§ 30. Тензор диэлектрической проницаемости однородной неравновесной анизотропной плазмы . . . . .	140
§ 31. Неустойчивость плазмы с анизотропной температурой частиц . . . . .	145
§ 32. Взаимодействие прямолинейного электронного пучка с плазмой. Черенковская неустойчивость . . . . .	152
§ 33. Взаимодействие вращающегося электронного пучка (потока осцилляторов) с плазмой. Циклотронная неустойчивость . . . . .	159
<b>Глава VII. Плазма во внешнем электрическом поле . . . . .</b>	<b>174</b>
§ 34. Функция распределения заряженных частиц плазмы во внешнем электрическом поле . . . . .	174
§ 35. Устойчивость немагнитичной плазмы во внешнем постоянном электрическом поле . . . . .	178
§ 36. Влияние магнитного поля на устойчивость плазмы во внешнем постоянном электрическом поле . . . . .	184
§ 37. Плазма в сверхвысокочастотном электрическом поле . . . . .	188
§ 38. Параметрическое взаимодействие сверхвысокочастотного электрического поля с плазмой . . . . .	196
<b>Глава VIII. Электромагнитные свойства пространственно неоднородной плазмы . . . . .</b>	<b>216</b>
§ 39. Неоднородные среды без пространственной дисперсии. Приближение геометрической оптики . . . . .	216
§ 40. Приближение геометрической оптики для неоднородных сред с пространственной дисперсией . . . . .	224
§ 41. Тензор диэлектрической проницаемости слабонеоднородной плазмы в приближении геометрической оптики . . . . .	227
§ 42. Спектры высокочастотных колебаний слабонеоднородной плазмы . . . . .	234
§ 43. Дрейфовые колебания слабонеоднородной бесстолкновительной плазмы . . . . .	242
§ 44. Влияние столкновений заряженных частиц на спектры дрейфовых колебаний слабонеоднородной плазмы . . . . .	250
§ 45. Конвективные неустойчивости неоднородной плазмы . . . . .	260
<b>Глава IX. Линейные электромагнитные явления в пространственно ограниченной плазме. . . . .</b>	<b>274</b>

§ 46. Поверхностные электромагнитные волны в полугораниченной плазме. . . . .	274
§ 47. Неустойчивость границы плазмы, удерживаемой магнитным полем. . . . .	285
§ 48. Плазменный волновод. . . . .	292
<b>ЧАСТЬ 3 ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ПЛАЗМЫ</b>	<b>312</b>
<b>Г л а в а X. Электромагнитные флуктуации в плазме и рассеяние волн</b>	<b>312</b>
§ 49. Корреляционные функции системы заряженных частиц. . . . .	312
Общее рассмотрение. . . . .	312
§ 50. Флуктуации в равновесной плазме. Флуктуационно-диссипативная теорема. . . . .	319
§ 51. Спектральное распределение флуктуаций в равновесной бесстолкновительной плазме . . . . .	321
§ 52. Флуктуации в неравновесной плазме. Неизотермическая квазиравновесная плазма и плазма с пучком. . . . .	329
§ 53. Флуктуации и столкновения частиц в плазме . . . . .	334
§ 54. Рассеяние электромагнитных волн в плазме . . . . .	339
§ 55. Трансформация волн в плазме. . . . .	348
<b>Г л а в а XI. Основы квазилинейной теории колебаний плазмы</b> . . . . .	<b>352</b>
§ 56. Уравнения квазилинейной теории плазмы . . . . .	352
§ 57. Квазилинейная релаксация плазменных колебаний . . . . .	359
§ 58. Квазилинейная релаксация пучковой неустойчивости в плазме . . . . .	363
<b>Г л а в а XII. Нелинейное взаимодействие волн в плазме.</b> . . . .	<b>371</b>
§ 59. Основы нелинейной электродинамики материальных сред . . . . .	371
§ 60. Многоиндексные тензоры диэлектрической проницаемости однородной плазмы . . . . .	378
§ 61. Нелинейное взаимодействие волн в изотропной плазме . . . . .	385
<b>Приложения</b> . . . . .	<b>395</b>
<b>Рекомендуемая литература</b> . . . . .	<b>403</b>

**Андрей Федорович Александров,  
Лариса Семеновна Богданкевич,  
Анри Амвросиевич Рухадзе**

---

**ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ  
ПЛАЗМЫ**

---

Редактор Т. И. Артемова  
Художник А. С. Александров  
Художественный редактор Т. М. Скворцова  
Технический редактор Л. А. Муравьева  
Корректор В. В. Кожуткина

ИБ № 1087

Изд. № Эр.-238. Сдано в набор 19.09.77. Подл.  
к печати 24.07.78. Т-10176. Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бу-  
мага тип. № 1. Гарнитура литературная. Печать  
высокая. Объем 25,5 усл. печ. л. + 0,25 усл.  
печ. л. форз. 24,9 уч.-изд. л. + форз. 0,42. Тираж  
8000 экз. Зак. 723. Цена 1 р. 20 к.

Издательство «Высшая школа»,  
Москва, К-51. Неглинная ул., 29/14.

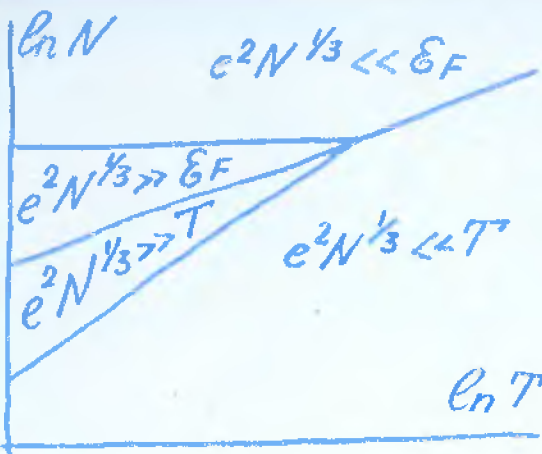
Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете Совета Министров  
СССР по делам издательств, полиграфии и книжной  
торговли. 150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.

А.Ф. Александров  
Л.С. Богданкевич  
А.А. Рухадзе

---

---

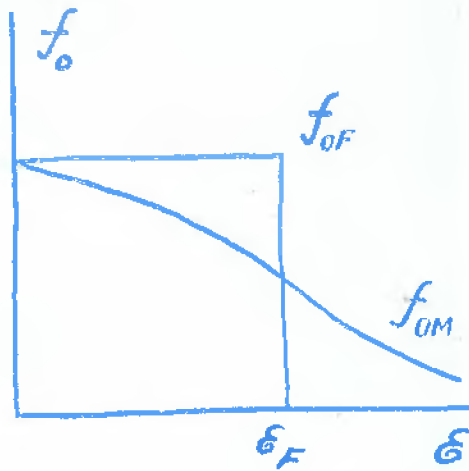
**ОСНОВЫ  
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ  
ПЛАЗМЫ**



$$|k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k})| = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + e \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st}$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left( D_{ij} \frac{\partial f}{\partial p_j} - A_i f \right)$$



$$\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \epsilon^{tr}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon^l(\omega, k)$$

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon^{tr}(\omega, k) = 0 \quad \epsilon^l(\omega, k) = 0$$

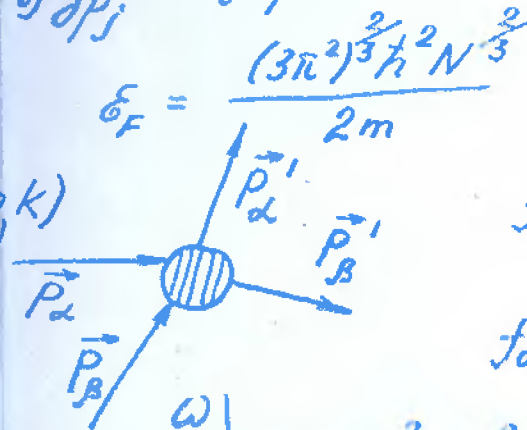
$$\omega \rightarrow \omega + i\delta$$

$$v_s^2 = \frac{T_e}{M}$$

$$\delta = \frac{2\pi^2 e^2 \omega}{k^2} \int \vec{k} \frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) d\vec{p}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Le}}{k^3 \tau_{De}^3} e^{-\frac{1}{2k^2 \tau_{De}^2} - \frac{3}{2}}$$

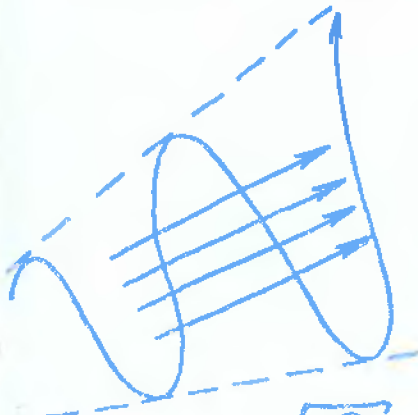
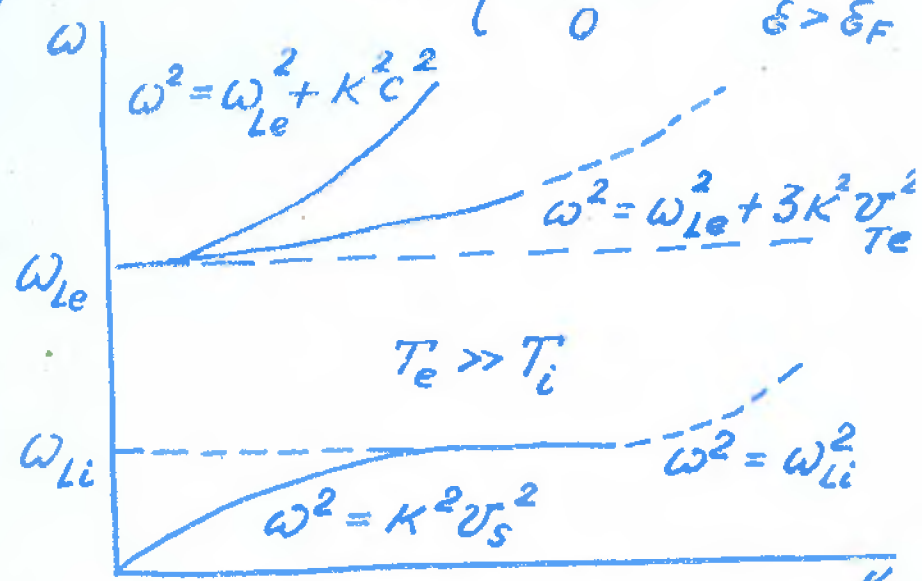
$$\tau_{De}^2 = \frac{T_e}{4\pi e^2 N_e}$$



$$\epsilon_F = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 N^{2/3}}{2m}$$

$$f_{0M} = \frac{N}{(2\pi m T)^{3/2}} e^{-\frac{mv^2}{2T}}$$

$$f_{0F} = \begin{cases} \frac{2}{(2\pi \hbar)^3} & \epsilon \leq \epsilon_F \\ 0 & \epsilon > \epsilon_F \end{cases}$$



$$\vec{u}_0 = \frac{e \vec{E}_0}{m v_e}$$

$$E_0 < E_{kp}$$

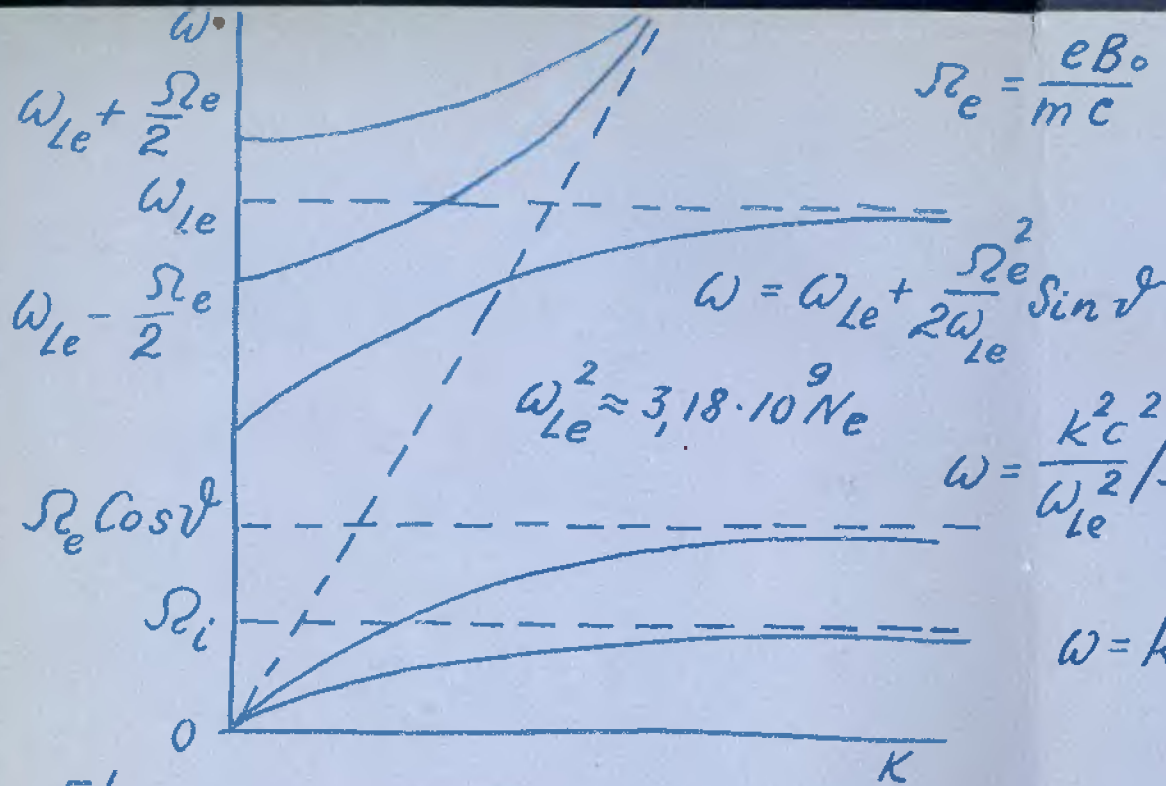
$$E_{kp} = \frac{m v_{Te}}{e} v_{\phi\phi}$$



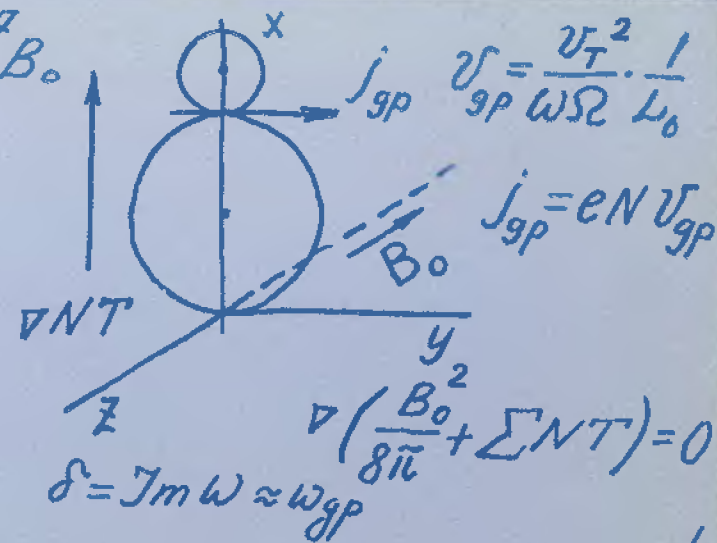
$$\omega = \vec{k} \cdot \vec{u} = \omega_0 \quad \frac{E^2}{8\pi n_B m c^2 \gamma} \approx \left( \frac{n_B}{n_p} \right)^{1/3} \delta$$

$$v_{\phi\phi} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \frac{e^2 e_i^2 N_i L}{T_e^{3/2}} \approx 50 N_i T_e^{-3/2} \text{ (eps)}$$

$$\delta = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{n_B}{2n_p} \right)^{1/3 - 1} \delta$$



$$\Omega_e = \frac{eB_0}{mc} \approx 2 \cdot 10^7 B_0$$



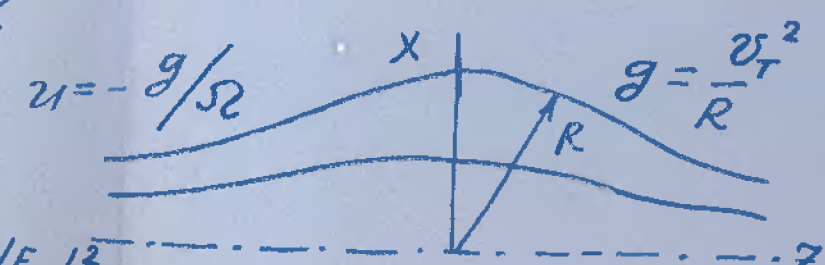
$$\omega = \frac{kc^2}{\omega_{Le}^2} \frac{1}{|\Omega_e \cos \nu|}$$

$$\omega = k v_A \quad v_A = c \frac{\Omega_i}{\omega_{Li}} = \sqrt{\frac{B_0^2}{4\pi N M}}$$

$$\gamma = (1 - \frac{u}{c})^{-1/2}$$

$$E_i' = \alpha_{ij} E_j \quad j_i = \beta_{ij} j_j'$$

$$\omega \rho - \vec{k} \vec{j} = \omega' \rho' - \vec{k}' \vec{j}' = 0$$

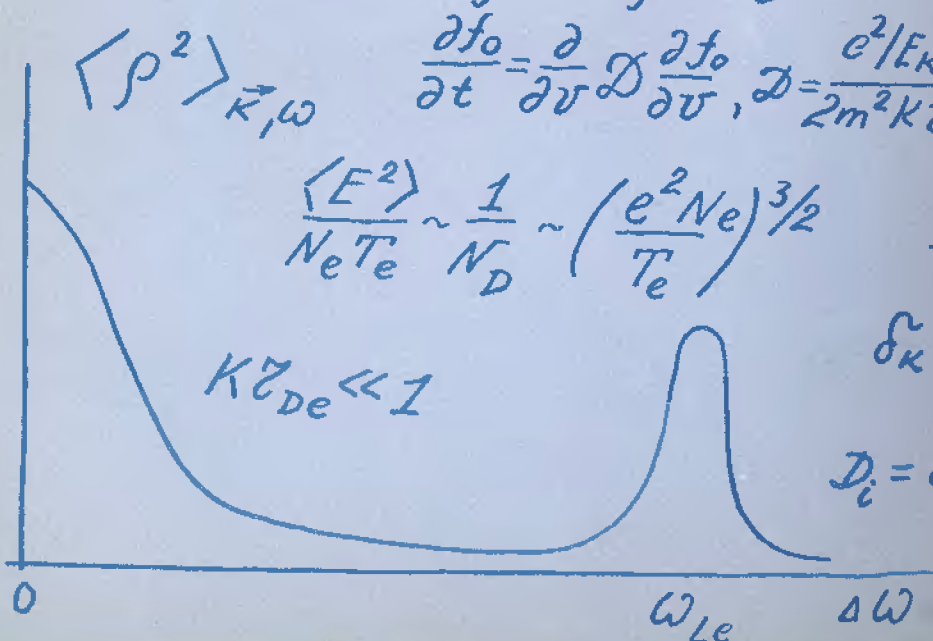


$$\omega^2 = g \frac{\partial \ln N}{\partial x}$$

$$\omega' = (\omega - \vec{k} \vec{u}) \gamma^{-1}$$

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$$

$$\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$$



$$\frac{\langle E^2 \rangle}{N_e T_e} \sim \frac{1}{N_D} \sim \left( \frac{e^2 N_e}{T_e} \right)^{3/2}$$

$$\frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} = 2 \delta_k |E_k|^2$$

$$\delta_k = \frac{\pi \omega_{Le}^3}{2 k^2} \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v=k}$$

$$D_i = \hat{\epsilon}_{ij} E_j + \hat{\epsilon}_{ijk} E_j E_k + \hat{\epsilon}_{ijke} E_j E_k E_e + \dots$$

$$\int dx k_x(\omega, x) = \pi (n + \frac{1}{2})$$

